
Ejercicio 1 [2 puntos] *Demostrar o refutar razonadamente las siguientes afirmaciones:*

- *Si F es consecuencia lógica de S_1 y de S_2, también es consecuencia lógica de $S_1 \cap S_2$.*
- *Existen fórmulas satisfacibles tal que todos sus modelos son necesariamente infinitos.*
- *Sea S un conjunto de fórmulas y T un tablero asociado a S. ¿Es cierto que los literales de las hojas de T son consecuencias lógicas de S?*
- *Dadas las fórmulas $F : \forall x \exists y P(x,y)$, $G : \exists y \forall x P(x,y)$. Decidir razonadamente si son lógicamente equivalentes, o si alguna es consecuencia lógica de la otra.*

Solución:

Apartado 1: Es falso. Por ejemplo, si S_1 es $\{p\}$, S_2 es $\{q\}$ y F es $p \vee q$, entonces F es consecuencia lógica de S_1 y de S_2, pero $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ y F no es consecuencia lógica de $S_1 \cap S_2$.

Apartado 2: Es cierto. Por ejemplo, sea F la fórmula

$$\forall x \forall y (g(x) = g(y) \rightarrow x = y) \wedge \exists x \forall y (x \neq g(y))$$

En cualquier modelo de F, la interpretación de g es una función inyectiva pero no suprayectiva; por tanto, el universo tiene que ser infinito.

Apartado 3: No es cierto. Por ejemplo, sea $S = \{p \vee q\}$. Entonces, el tablero asociado a S es

$$\begin{array}{ccc} & 1.\ p \vee q & \\ \swarrow & & \searrow \\ 2.\ p\ (1) & & 3.\ q\ (1) \end{array}$$

El literal de la hoja izquierda es p que no es consecuencia de S (ya que la interpretación I con $I(p) = 0$ e $I(q) = 1$ es un modelo de S que no lo es de p).

Apartado 4: Las fórmulas no son equivalentes. Por ejemplo, consideremos como universo $U = \mathbb{N}$ y como $<$ como la interpretación de P. Entonces, (U, I) es un modelo de F que lo es de G.

Vamos a demostrar, por resolución, que F es consecuencia de G. Lo que equivale a probar que $\{G, \neg F\}$ es inconsistente. En primer lugar, calculamos las cláusulas,

- Fórmula 1:
$$\begin{array}{ll} & \exists y \forall x P(x,y) \\ \approx & \forall x P(x,a) \\ \equiv & \{\{P(x,a)\}\} \end{array}$$
- Fórmula 2:
$$\begin{array}{ll} & \neg \forall x \exists y P(x,y) \\ \equiv & \exists x \forall y \neg P(x,y) \\ \approx & \forall y \neg P(b,y) \\ \equiv & \{\{\neg P(b,y)\}\} \end{array}$$

La resolución es

1	$\{P(x,a))\}$	Premisa
2	$\{\neg P(b,y)\}$	Premisa
3	$\square$	Res. 1,2

Por tanto, S es inconsistente.

Ejercicio 2 [2 puntos] *Decidir, usando tableros semánticos, si las siguientes relaciones de consecuencia lógica son o no ciertas.*

1. $p \to (q \to r) \models r \to (q \to p)$.
2. $\{\forall x(P(x) \to Q(x)), \exists x P(x)\} \models \neg\forall x \neg Q(x)$.

En caso de que no lo sean, obtener del tablero un contramodelo que lo justifique.

Solución:

Apartado 1.

$$
\begin{array}{lll}
1. & p \to (q \to r) & \\
2. & \neg(r \to (q \to p)) & \\
3. & r & (2) \\
4. & \neg(q \to p) & (2) \\
5. & q & (4) \\
6. & \neg p & (4)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cc}
7.\ \neg p\ \ (1) & 8.\ q \to r\ \ (1) \\
\text{Abierta} &
\end{array}
$$

La rama izquierda es abierta. Por tanto, no se da la relación de consecuencia y un contramodelo es I tal que $I(p) = 0$, $I(q) = 1$ e $I(r) = 1$.

Apartado 1.

$$
\begin{array}{lll}
1. & \forall x(P(x) \to Q(x)) & \\
2. & \exists x P(x) & \\
3. & \neg\neg\forall x \neg Q(x) & \\
4. & \forall x \neg Q(x) & (3) \\
5. & P(a) & (2) \\
6. & P(a) \to Q(a) & (1)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|lll}
7.\ \neg P(a)\ \ (6) & 8. & Q(a) & (6) \\
\text{Cerrada 5,7} & 9. & \neg Q(a) & (4) \\
 & & Cerrada 8,9 &
\end{array}
$$

Por tanto, se cumple la relación de consecuencia.

Ejercicio 3 [3 puntos] *Determinar, mediante resolución, cuáles de las siguientes afirmaciones* *son ciertas. En caso afirmativo, proporcionar una prueba por resolución y, en caso negativo, un modelo que lo justifique:*

1. $\forall x(P(x) \to Q(x)) \models \neg\exists xP(x) \vee \forall xQ(x)$
2. $\{\exists x\forall y[\neg A(x,y) \to \exists z(Q(z) \vee P(z,y))], \forall x\exists y\neg A(x,y), \neg\exists x\exists yP(x,y), \neg\exists xQ(x)\}$ *es consistente*

Solución:

Apartado 1. En primer lugar, calculamos las cláusulas,

- Fórmula 1:

$$\begin{array}{rl} & \forall x(P(x) \to Q(x)) \\ \equiv & \forall x(\neg P(x) \vee Q(x)) \\ \equiv & \{\{\neg P(x), Q(x)\}\} \end{array}$$

- Fórmula 2:

$$\begin{array}{rl} & \neg(\neg\exists xP(x) \vee \forall xQ(x)) \\ \equiv & \neg(\neg\exists xP(x) \vee \forall yQ(y)) \\ \equiv & \neg\neg\exists xP(x) \wedge \neg\forall yQ(y) \\ \equiv & \exists xP(x) \wedge \exists y\neg Q(y) \\ \equiv & \exists x(P(x) \wedge \exists y\neg Q(y)) \\ \equiv & \exists x\exists y(P(x) \wedge \neg Q(y)) \\ \approx & \exists y(P(a) \wedge \neg Q(y)) \\ \approx & P(a) \wedge \neg Q(b) \\ \approx & \{\{P(a)\}, \{\neg Q(b)\}\} \end{array}$$

La resolución es

1	$\{\neg P(x), Q(x)\}$	Premisa
2	$\{P(a)\}$	Premisa
3	$\{\neg Q(b)\}$	Premisa
4	$\{Q(a)\}$	Res. 1,2 $[x/a]$
5	$\{\neg P(b)\}$	Res. 1,3 $[x/b]$

Al saturarse sin encontrar la cláusula vacía, no se cumple la relación de consecuencia. Un contramodelo es la estructura con universo $U = \{a, b\}$ e interpretación I tal que $I(P) = \{a\}$ e $I(P) = \{a\}$.

Apartado 2. En primer lugar, calculamos las cláusulas,

- Fórmula 1:

$$\begin{array}{rl} & \exists x\forall y[\neg A(x,y) \to \exists z(Q(z) \vee P(z,y))] \\ \equiv & \exists x\forall y[\neg\neg A(x,y) \vee \exists z(Q(z) \vee P(z,y))] \\ \equiv & \exists x\forall y[A(x,y) \vee \exists z(Q(z) \vee P(z,y))] \\ \equiv & \exists x\forall y\exists z[A(x,y) \vee Q(z) \vee P(z,y)] \\ \approx & \forall y\exists z[A(a,y) \vee Q(z) \vee P(z,y)] \\ \approx & \forall y[A(a,y) \vee Q(f(y)) \vee P(f(y),y)] \\ \equiv & \{\{A(a,y), Q(f(y)), P(f(y),y)\}\} \end{array}$$

- Fórmula 2:

$$\begin{array}{rl} & \forall x \exists y \neg A(x,y) \\ \approx & \forall x \neg A(x,g(x)) \\ \equiv & \{\{\neg A(x,g(x))\}\} \end{array}$$

- Fórmula 3:

$$\begin{array}{rl} & \neg \exists x \exists y P(x,y) \\ \equiv & \neg \exists x \exists y P(x,y) \\ \equiv & \forall x \forall y \neg P(x,y) \\ \equiv & \{\{\neg P(x,y)\}\} \end{array}$$

- Fórmula 4:

$$\begin{array}{rl} & \neg \exists x Q(x) \\ \equiv & \forall x \neg Q(x) \\ \equiv & \{\{\neg Q(x)\}\} \end{array}$$

La resolución es

1	$\{A(a,y), Q(f(y)), P(f(y),y)\}$	Premisa
2	$\{\neg A(x,g(x))\}$	Premisa
3	$\{\neg P(x,y)\}$	Premisa
4	$\{\neg Q(x)\}$	Premisa
5	$\{A(a,y), Q(f(y))\}$	Res. 1,3 $[x/f(y)]$
6	$\{A(a,y)\}$	Res. 5,4 $[x/f(y)]$
7	$\square$	Res. 6,2 $[x/a, y/g(a)]$

Al obtenerse la cláusula vacía, el conjunto es inconsistente.

Ejercicio 4 [3 puntos] *Demostrar, con Isabelle/HOL,*

1. $p \wedge q \to r \vee s,\ q \to \neg s \vdash p \to \neg q \vee r$
2. $\forall x.(P(x) \to Q(x)),\ \forall x.(\neg S(x) \to \neg Q(x)),\ \neg(\forall x.S(x)) \vdash \exists x.\neg P(x)$
