Ejercicio 1 [3 puntos] *Demostrar o refutar razonadamente las siguientes afirmaciones:*

1. *Si la fórmula F no es consecuencia lógica del conjunto de fórmulas S, entonces $\neg F$ es consecuencia lógica de S.*
2. *Existe una fórmula F sin símbolos de igualdad tal que todos los modelos de F tienen al menos 2 elementos.*
3. *Si la cláusula C es consecuencia de las cláusulas C_1 y C_2, entonces C es una resolvente de C_1 y C_2.*

Solución:

El apartado 1 es falso. Por ejemplo, si $S = \{p\}$ y $F = q$, entonces F no es consecuencia de S pero $\neg F$ tampoco lo es.

El apartado 2 es falso. Por ejemplo, si F es la fórmula $P(a) \wedge \neg P(b)$ todos los modelos de F tienen al menos dos elementos.

El apartado 3 es falso. Por ejemplo, si $C_1 = \{p\}$, $C_2 = \{q\}$ y $C = \{p, q\}$, entonces C es consecuencia de las cláusulas C_1 y C_2 pero C no es una resolvente de C_1 y C_2.

Ejercicio 2 [2 puntos] *Determinar, mediante tableros semánticos, cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas. En caso afirmativo, proporcionar una prueba por tableros semánticos y, en caso negativo, un modelo que lo justifique:*

1. $p \to q \vee s$ *es consecuencia lógica del conjunto de fórmulas* $\{q \to s,\ \neg(\neg p \wedge q)\}$
2. $\exists x (P(x) \to Q(x)) \to (\exists x P(x) \to \exists x Q(x))$ *es lógicamente válida.*

Solución:

Solución del apartado 1 La fórmula es consecuencia syss el conjunto

$$\{q \to s,\ \neg(\neg p \wedge q),\ \neg(p \to q \vee s)\}$$

tiene un tablero completo cerrado.

Como el tablero

$$
\begin{array}{lll}
1. & q \to s & \\
2. & \neg(\neg p \land q) & \\
3. & \neg(p \to q \lor s) & \\
4. & p & (3) \\
5. & \neg(q \lor s) & (3) \\
6. & \neg q & (5) \\
7. & \neg s & (5)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cc}
8.\ \neg q\ (1) & 9.\ s\ (1)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cc}
\begin{array}{lll} 10. & \neg\neg p & (2) \\ 12. & p & (10) \\ & \text{Abierta} & \end{array} & 11.\ \neg q\ (2)
\end{array}
$$

tiene una rama abierta, la fórmula no es consecuencia. Además, un contramodelo es la interpretación I tal que $I(p) = 1$, $I(q) = I(s) = 0$.

Solución del apartado 1 El tablero de la negación de la fórmula es

$$
\begin{array}{lll}
1. & \neg(\exists x(P(x) \to Q(x)) \to (\exists x P(x) \to \exists x Q(x))) & \\
2. & \exists x(P(x) \to Q(x)) & (1) \\
3. & \neg(\exists x P(x) \to \exists x Q(x)) & (1) \\
4. & \exists x P(x) & (3) \\
5. & \neg\exists x Q(x) & (3) \\
6. & P(a) & (4) \\
7. & P(b) \to Q(b) & (2)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cc}
\begin{array}{lll} 8. & \neg P(b) & (7) \\ 10. & \neg Q(a) & (3a) \\ 11. & \neg Q(b) & (3b) \\ & \text{Abierta} & \end{array} & 9.\ Q(b)\ (7)
\end{array}
$$

Como tiene una rama abierta, la fórmula no es válida. Un contraejemplo obtenido a partir del tablero es (U, I) tal que $U = \{a, b\}$, $I(P) = \{a\}$, $I(Q) = \emptyset$.

Ejercicio 3 [2 puntos] *Determinar, mediante resolución, cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas. En caso afirmativo, proporcionar una prueba por resolución y, en caso negativo, un modelo que lo justifique:*

1. $\{p \lor q \to r \lor s,\ \neg(p \land \neg r \land s),\ \neg(p \to r \land s)\}$ *es consistente.*
2. $\{\forall x \exists y(P(x,y) \land Q(x,y)),\ \forall x \forall y(Q(x,y) \to R(x,y))\} \models \forall x \exists y(P(x,y) \land R(x,y))$

Solución:

Solución del apartado 1 En primer lugar se calcula su forma clausal. La de la primera fórmula es

$$
\begin{array}{rl}
 & p \lor q \to r \lor s \\
\equiv & \neg(p \lor q) \lor (r \lor s) \\
\equiv & (\neg p \land \neg q) \lor (r \lor s) \\
\equiv & (\neg p \lor r \lor s) \land (\neg q \lor r \lor s) \\
\equiv & \{\{\neg p, r, s\}, \{\neg q, r, s\}\}
\end{array}
$$

La de la segunda fórmula es

$$
\begin{array}{rl}
 & \neg(p \land \neg r \land s) \\
\equiv & \neg p \lor \neg(\neg r \land s)) \\
\equiv & \neg p \lor (\neg\neg r \lor \neg s) \\
\equiv & \neg p \lor (r \lor \neg s) \\
\equiv & \{\{\neg p, r, \neg s\}\}
\end{array}
$$

La de la tercera fórmula es

$$
\begin{array}{rl}
 & \neg(p \to r \land s) \\
\equiv & p \land \neg(r \land s) \\
\equiv & p \land (\neg r \lor \neg s) \\
\equiv & \{\{p\}, \{\neg r, \neg s\}\}
\end{array}
$$

La resolución es

$$
\begin{array}{rll}
1. & \{\neg p, r, s\} & \\
2. & \{\neg q, r, s\} & \\
3. & \{\neg p, r, \neg s\} & \\
4. & \{p\} & \\
5. & \{\neg r, \neg s\} & \\
6. & \{r, s\} & \text{de 1 y 4} \\
7. & \{r, \neg s\} & \text{de 3 y 4} \\
8. & \{\neg s\} & \text{de 5 y 7} \\
9. & \{r\} & \text{de 6 y 8}
\end{array}
$$

Durante la resolución las siguientes cláusulas están subsumidas: la 1 (por la 6), la 3 (por la 7), la 5 (por la 8), la 7 (por la 8), la 2 (por la 9) y la 6 (por la 9).

Como no se llega a la cláusula vacía, el conjunto es consistente y un modelo es I tal que $I(p) = I(r) = 1$, $I(s) = 0$.

Solución del apartado 2 En primer lugar se calcula las formas clausales de las hipótesis y de la negación de la conclusión. La de primera hipótesis es

$$
\begin{array}{rl}
 & \forall x \exists y (P(x,y) \land Q(x,y)) \\
\approx & \forall x (P(x, f(x)) \land Q(x, f(x))) \\
\equiv & \{\{P(x, f(x))\}, \{Q(x, f(x))\}\}
\end{array}
$$

La de la segunda hipótesis es

$$
\begin{array}{rl}
 & \forall x \forall y (Q(x,y) \to R(x,y)) \\
\equiv & \forall x \forall y (\neg Q(x,y) \lor R(x,y)) \\
\equiv & \{\{\neg Q(x,y), R(x,y)\}\}
\end{array}
$$

La de la negación de la conclusión es

$$
\begin{array}{ll}
 & \neg\forall x \exists y (P(x,y) \land R(x,y)) \\
\equiv & \exists x \forall y \neg (P(x,y) \land R(x,y)) \\
\equiv & \exists x \forall y (\neg P(x,y) \lor \neg R(x,y)) \\
\approx & \forall y (\neg P(a,y) \lor \neg R(a,y)) \\
\equiv & \{\{\neg P(a,y), \neg R(a,y)\}\}
\end{array}
$$

La resolución es

$$
\begin{array}{lll}
1. & \{P(x,f(x))\} & \\
2. & \{Q(x,f(x))\} & \\
3. & \{\neg Q(x,y), R(x,y)\} & \\
4. & \{\neg P(a,y), \neg R(a,y)\} & \\
5. & \{\neg R(a,f(a)\} & \text{de 1 y 4 con } [x/a, y/f(a)] \\
6. & \{\neg Q(a,f(a)\} & \text{de 5 y 3 con } [x/a, y/f(a)] \\
7. & \square & \text{de 6 y 2 con } [x/a]
\end{array}
$$

Por tanto la conclusión es consecuencia de las hipótesis.

Ejercicio 4 [3 puntos] *En el ordenador.*
