

Capítulo 4

Patrones de demostración

4.1 Demostraciones por casos

Nota 4.1.1 (Regla de eliminación de la disyunción).

$$(disjE) \frac{P \vee Q \quad \frac{P}{R} \quad \frac{Q}{R}}{R}$$

Lema 4.1.2 (Ejemplo de demostración por casos).

$$P \vee Q \implies Q \vee P$$

lemma *disj-conmutativa*: $P \vee Q \implies Q \vee P$

proof –

assume $P \vee Q$

thus $Q \vee P$

proof (*rule disjE*)

assume P

thus *?thesis* **by** (*rule disjI2*)

next

assume Q

thus *?thesis* **by** (*rule disjI1*)

qed

qed

Nota 4.1.3. El lema anterior puede demostrarse automáticamente como se muestra a continuación.

lemma *disj-conmutativa-auto*: $P \vee Q \implies Q \vee P$

by *auto*

4.2 Negación

Nota 4.2.1 (Reglas de la negación).

$$(notI) \frac{\frac{P}{False}}{\neg P} \quad (notE) \frac{\neg P \quad P}{R}$$

Lema 4.2.2 (Ejemplo de demostración con negaciones). *Si $x^2 + y = 13$ e $y \neq 4$, entonces $x \neq 3$.*

lemma

fixes $x :: nat$

assumes 1: $x * x + y = 13$

and 2: $y \neq 4$

shows $x \neq 3$

proof (rule notI)

assume $x = 3$

with 1 have $y = 4$ **by** simp

with 2 show False **by** (rule notE)

qed

lemma

fixes $x :: nat$

assumes 1: $x * x + y = 13$

and 2: $y \neq 4$

shows $x \neq 3$

proof (rule notI)

assume $x = 3$

with 1 2 show False **by** auto

qed

Nota 4.2.3. El lema anterior puede demostrarse automáticamente como se muestra a continuación.

lemma

fixes $x :: nat$

assumes 1: $x * x + y = 13$

and 2: $y \neq 4$

shows $x \neq 3$

using *assms*

by auto

4.3 Contradicciones

Nota 4.3.1 (Regla de contradicción).

$$(FalseE) \frac{False}{P}$$

Lema 4.3.2 (Ejemplo de uso de la regla de contradicción). *Si $1 = 2$, entonces $3 = 7$.*

lemma

assumes $1 = (2::nat)$

shows $3 = (7::nat)$

proof –

have *False* **using** *assms* **by** *simp*

thus $3 = (7::nat)$ **by** (*rule FalseE*)

qed

Nota 4.3.3. El lema puede demostrarse automáticamente, como sigue.

lemma

assumes $1 = (2::nat)$

shows $3 = (7::nat)$

using *assms*

by *auto*

Lema 4.3.4 (Ejemplo de demostración por casos y contradicción).

$$\{\neg P, P \vee Q\} \vdash Q.$$

lemma *disjCE*:

assumes $\neg P$ **and** $P \vee Q$

shows Q

using $\langle P \vee Q \rangle$

proof (*rule disjE*)

assume P

thus Q **using** $\langle \neg P \rangle$ **by** *contradiction*

next

assume Q

thus Q **by** *assumption*

qed

4.4 Equivalencias

Nota 4.4.1 (Reglas de equivalencia).

$$(iffI) \frac{\frac{P}{Q} \quad \frac{Q}{P}}{P = Q} \quad (iffD1) \frac{Q = P \quad Q}{P} \quad (iffD2) \frac{P = Q \quad Q}{P}$$

Lema 4.4.2 (Ejemplo de introducción de equivalencia). *La fórmula*

$$(R \longrightarrow C) \wedge (S \longrightarrow C)$$

es equivalente a

$$R \vee S \longrightarrow C.$$

lemma $((R \longrightarrow C) \wedge (S \longrightarrow C)) = (R \vee S \longrightarrow C)$

proof (*rule iffI*)

assume $(R \longrightarrow C) \wedge (S \longrightarrow C)$

thus $R \vee S \longrightarrow C$ **by** *blast*

next

assume $R \vee S \longrightarrow C$

thus $(R \longrightarrow C) \wedge (S \longrightarrow C)$ **by** *blast*

qed

Nota 4.4.3 (El método *blast*). En la demostración anterior es la primera vez que se usa el método de razonamiento automático *blast*.

Nota 4.4.4. El lema anterior puede demostrarse automáticamente como se muestra a continuación.

lemma $((R \longrightarrow C) \wedge (S \longrightarrow C)) = (R \vee S \longrightarrow C)$

by *auto*

Lema 4.4.5 (Ejemplo de eliminación de equivalencia).

$$1. A \longleftrightarrow B, A \vdash B$$

$$2. A \longleftrightarrow B, B \vdash A$$

lemma **assumes** $A = B$ **and** A **shows** B

using *assms*

by (*rule iffD1*)

lemma **assumes** $A = B$ **and** B **shows** A

using *assms*
by (*rule iffD2*)

