

Programación declarativa (2007–08)

Tema 12: Problemas de grafos y de las reinas

José A. Alonso Jiménez

Grupo de Lógica Computacional
Departamento de Ciencias de la Computación e I.A.
Universidad de Sevilla

Tema 12: Problemas de grafos y de las reinas

1. Problemas de grafos

- Representación de grafos

- Caminos en un grafo

- Caminos hamiltonianos en un grafo

2. El problema de las reinas

- Especificación del problema de las reinas

- Representación mediante filas y columnas

- Representación mediante columnas

- Representación mediante filas, columnas y diagonales

Tema 12: Problemas de grafos y de las reinas

1. Problemas de grafos

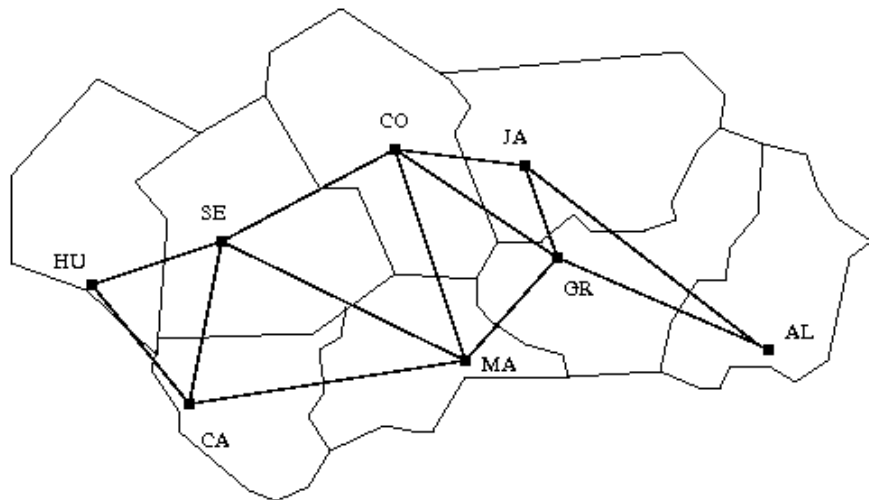
Representación de grafos

Caminos en un grafo

Caminos hamiltonianos en un grafo

2. El problema de las reinas

Grafo de Andalucía



Representación del grafo

- `arcos(+L)` se verifica si L es la lista de arcos del grafo.

```
arcos([huelva-sevilla,  huelva-cádiz,  
      cádiz-sevilla,   sevilla-málaga,  
      sevilla-córdoba, cordoba-málaga,  
      cordoba-granada, cordoba-jaén,  
      jaén-granada,    jaén-almería,  
      granada-almería]).
```

Adyacencia y nodos

- ▶ `adyacente(?X,?Y)` se verifica si X e Y son adyacentes.

```
adyacente(X,Y) :-  
    arcos(L) ,  
    (member(X-Y,L) ; member(Y-X,L)) .
```

- ▶ `nodos(?L)` se verifica si L es la lista de nodos.

```
nodos(L) :-  
    setof(X,Y^adyacente(X,Y),L) .
```

Tema 12: Problemas de grafos y de las reinas

1. Problemas de grafos

Representación de grafos

Caminos en un grafo

Caminos hamiltonianos en un grafo

2. El problema de las reinas

Caminos

- camino(+A,+Z,-C) se verifica si C es un camino en el grafo desde el nodo A al Z. Por ejemplo,

```
?- camino(sevilla,granada,C).  
C = [sevilla, córdoba, granada] ;  
C = [sevilla, Málaga, córdoba, granada]  
Yes
```

```
camino(A,Z,C) :-  
    camino_aux(A,[Z],C).
```

Caminos

- `camino_aux(+A,+CP,-C)` se verifica si `C` es una camino en el grafo compuesto de un camino desde `A` hasta el primer elemento del camino parcial `CP` (con nodos distintos a los de `CP`) junto `CP`.

```
camino_aux(A, [A|C1], [A|C1]).
```

```
camino_aux(A, [Y|C1], C) :-  
    adyacente(X, Y),  
    not(member(X, [Y|C1])),  
    camino_aux(A, [X, Y|C1], C).
```

Tema 12: Problemas de grafos y de las reinas

1. Problemas de grafos

- Representación de grafos

- Caminos en un grafo

- Caminos hamiltonianos en un grafo

2. El problema de las reinas

Caminos hamiltonianos

- ▶ `hamiltoniano(-C)` se verifica si `C` es un camino hamiltoniano en el grafo (es decir, es un camino en el grafo que pasa por todos sus nodos una vez). Por ejemplo,

```
?- hamiltoniano(C).
```

```
C = [almería, jaén, granada, córdoba, Málaga, sevilla, hu
```

```
?- findall(_C,hamiltoniano(_C),_L), length(_L,N).
```

```
N = 16
```

- ▶ Primera definición de `hamiltoniano`

```
hamiltoniano_1(C) :-
```

```
    camino(_,_,C),
```

```
    nodos(L),
```

```
    length(L,N),
```

```
    length(C,N).
```

Camino hamiltoniano

► Segunda definición de hamiltoniano

```
hamiltoniano_2(C) :-  
    nodos(L),  
    length(L,N),  
    length(C,N),  
    camino(_,_,C).
```

► Comparación de eficiencia

```
?- time(findall(_C,hamiltoniano_1(_C),_L)).  
37,033 inferences in 0.03 seconds (1234433 Lips)  
?- time(findall(_C,hamiltoniano_2(_C),_L)).  
13,030 inferences in 0.01 seconds (1303000 Lips)
```

Tema 12: Problemas de grafos y de las reinas

1. Problemas de grafos

2. El problema de las reinas

Especificación del problema de las reinas

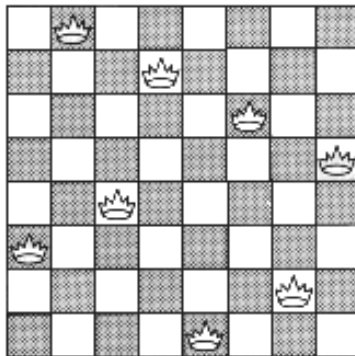
Representación mediante filas y columnas

Representación mediante columnas

Representación mediante filas, columnas y diagonales

El problema de las 8 reinas

- El problema de las ocho reinas consiste en colocar 8 reinas en un tablero rectangular de dimensiones 8 por 8 de forma que no se encuentren más de una en la misma línea: horizontal, vertical o diagonal.



- └ El problema de las reinas
 - └ Representación mediante filas y columnas

Tema 12: Problemas de grafos y de las reinas

1. Problemas de grafos

2. El problema de las reinas

Especificación del problema de las reinas

Representación mediante filas y columnas

Representación mediante columnas

Representación mediante filas, columnas y diagonales

Representación mediante filas y columnas

► Sesión:

```
?- tablero(S), solución(S).  
S = [1-4, 2-2, 3-7, 4-3, 5-6, 6-8, 7-5, 8-1] ;  
S = [1-5, 2-2, 3-4, 4-7, 5-3, 6-8, 7-6, 8-1] ;  
S = [1-3, 2-5, 3-2, 4-8, 5-6, 6-4, 7-7, 8-1]  
Yes
```

- `tablero(L)` se verifica si `L` es una lista de posiciones que representan las coordenadas de 8 reinas en el tablero.

```
tablero(L) :-  
    findall(X-Y, between(1,8,X),L).
```


Representación mediante filas y columnas

- `solución_1(?L)` se verifica si `L` es una lista de pares de números que representan las coordenadas de una solución del problema de las 8 reinas.

```
solución_1([ ]).  
solución_1([X-Y|L]) :-  
    solución_1(L),  
    member(Y,[1,2,3,4,5,6,7,8]),  
    no_ataca(X-Y,L).
```

Representación mediante filas y columnas

- `no_ataca([X,Y],L)` se verifica si la reina en la posición (X,Y) no ataca a las reinas colocadas en las posiciones correspondientes a los elementos de la lista `L`.

```
no_ataca(_, []).
```

```
no_ataca(X-Y, [X1-Y1|L]) :-
```

```
    X =\= X1,          Y =\= Y1,
```

```
    X-X1 =\= Y-Y1,    X-X1 =\= Y1-Y,
```

```
    no_ataca(X-Y,L).
```

- └ El problema de las reinas
 - └ Representación mediante columnas

Tema 12: Problemas de grafos y de las reinas

1. Problemas de grafos

2. El problema de las reinas

Especificación del problema de las reinas

Representación mediante filas y columnas

Representación mediante columnas

Representación mediante filas, columnas y diagonales

Representación mediante columnas

- `solución_2(L)` se verifica si `L` es una lista de 8 números, $[n_1, \dots, n_8]$, de forma que si las reinas se colocan en las casillas $(1, n_1), \dots, (8, n_8)$, entonces no se atacan entre sí.

```
solución_2(L) :-  
    permutación([1,2,3,4,5,6,7,8],L),  
    segura(L).
```

- `segura(L)` se verifica si `L` es una lista de m números $[n_1, \dots, n_m]$ tal que las reinas colocadas en las posiciones $(x, n_1), \dots, (x + m, n_m)$ no se atacan entre sí.

```
segura([]).  
segura([X|L]) :-  
    segura(L),  
    no_ataca(X,L,1).
```

Representación mediante columnas

- $\text{no_ataca}(Y, L, D)$ se verifica si Y es un número, L es una lista de números $[n_1, \dots, n_m]$ y D es un número tales que las reinas colocada en la posición (X, Y) no ataca a las colocadas en las posiciones $(X + D, n_1), \dots, (X + D + m, n_m)$.

```
no_ataca(_, [], _).
```

```
no_ataca(Y, [Y1|L], D) :-
```

```
    Y1 - Y = \= D,
```

```
    Y - Y1 = \= D,
```

```
    D1 is D+1,
```

```
    no_ataca(Y, L, D1).
```

Tema 12: Problemas de grafos y de las reinas

1. Problemas de grafos

2. El problema de las reinas

Especificación del problema de las reinas

Representación mediante filas y columnas

Representación mediante columnas

Representación mediante filas, columnas y diagonales

Representación mediante filas, columnas y diagonales

- `solución_3(?L)` se verifica si `L` es una lista de 8 números, $[n_1, \dots, n_8]$, de forma que si las reinas se colocan en las casillas $(1, n_1), \dots, (8, n_8)$, entonces no se atacan entre sí.

```
solución_3(L) :-  
    solución_3_aux(  
        L,  
        [1,2,3,4,5,6,7,8],  
        [1,2,3,4,5,6,7,8],  
        [-7,-6,-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,7],  
        [2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16]) .
```

Representación mediante filas, columnas y diagonales

- `solucion_3_aux(?L,+Dx,+Dy,+Du,+Dv)` se verifica si `L` es una permutación de los elementos de `Dy` de forma que si `L` es $[y_1, \dots, y_n]$ y `Dx` es $[1, \dots, n]$, entonces $y_j - j$ ($1 \leq j \leq n$) son elementos distintos de `Du` e $y_j + j$ ($1 \leq j \leq n$) son elementos distintos de `Dv`.

```

solucion_aux([ ], [ ], _Dy, _Du, _Dv) .
solucion_aux([Y|Ys], [X|Dx1], Dy, Du, Dv) :-
    select(Y, Dy, Dy1),
    U is X-Y,
    select(U, Du, Du1),
    V is X+Y,
    select(V, Dv, Dv1),
    solucion_aux(Ys, Dx1, Dy1, Du1, Dv1) .

```

Comparaciones de eficiencia

```
?- time((findall(_S,(tablero_1(_S), solucion_1(_S)),_L),length(_L,N))).  
211,330 inferences in 0.12 seconds (1761083 Lips)
```

```
N = 92
```

```
?- time((findall(_S,solución_2(_S),_L),length(_L,N))).  
1,422,301 inferences in 0.72 seconds (1975418 Lips)
```

```
N = 92
```

```
?- time((findall(_S,solucion_3(_S),_L),length(_L,N))).  
120,542 inferences in 0.07 seconds (1722029 Lips)
```

```
N = 92
```

Búsqueda de todas las soluciones para N reinas:

| | solución 1 | | solución 2 | | solución 3 | |
|----|-------------|--------|-------------|-------|-------------|-------|
| N | inferencias | seg. | inferencias | seg. | inferencias | seg. |
| 4 | 401 | 0.00 | 543 | 0.00 | 546 | 0.00 |
| 6 | 8,342 | 0.00 | 20,844 | 0.01 | 6,660 | 0.01 |
| 8 | 195,628 | 0.15 | 1,422,318 | 0.91 | 120,614 | 0.09 |
| 10 | 5,303,845 | 4.05 | 150,300,540 | 96.82 | 2,774,095 | 2.01 |
| 12 | 182,574,715 | 147.22 | | | 83,067,721 | 64.93 |

Bibliografía

1. I. Bratko *Prolog Programming for Artificial Intelligence (2nd ed.)* (Addison–Wesley, 1990)
 - ▶ Cap. 4: “Using Structures: Example Programs”
 - ▶ Cap. 9: “Operations on Data Structures”
2. L. Sterling y E. Shapiro *The Art of Prolog (2nd edition)* (The MIT Press, 1994)
 - ▶ Cap. 2 “Database programming”