Temas de "Programación declarativa" (2007–08)

José A. Alonso Jiménez

Grupo de Lógica Computacional
Dpto. de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial
Universidad de Sevilla
Sevilla, 28 de Agosto de 2007

Índice general

Parte I

Programación funcional

Capítulo 1

Programación funcional básica

Programación declarativa (2007–08)

Tema 1: Programación funcional básica

José A. Alonso Jiménez

Índice

1. Lenguajes funcionales

1.1. De la programación imperativa a la declarativa

Crisis del software

Problemas:

- ¿Cómo tratar con el tamaño y complejidad de los programas actuales?
- Cómo reducir el tiempo y el coste de desarrollo de los programas?
- ¿Cómo aumentar la confianza en que los programas funcionan correctamente?

Solución de la crisis del software: lenguajes tales que:

- los programas sean claros, concisos y con un alto nivel de abstracción;
- soporten componentes reusables;
- faciliten el uso de verificación formal;
- permitan prototipado rápido y
- tengan herramientas potentes para la resolución de problemas.

Programación imperativa vs declarativa

- Programación imperativa:
  - Los programas usan **estados implícitos**.
  - Los programas son sucesiones de **órdenes**.
  - Los programas expresan **cómo** se ha de computar.
  - Lenguajes imperativos: Fortran, Pascal, C.
- Programación declarativa:
  - Los programas no usan **estados implícitos**.
  - Los programas son conjunto de **expresiones**.
  - Los programas expresan **qué** se ha de computar.
  - La repetición se realiza mediante **recursión**.

Tipos de programación declarativa y bases teóricas

Tipos de programación declarativa:

- Programación funcional (o aplicativa):
  - Se basa en el concepto de **función** matemática.
  - Una computación consiste en la aplicación de una función a sus argumentos.
  - Lenguajes funcionales: Haskell, ML, Scheme, Lisp.
- Programación relacional (o lógica):
  - Se basa en el concepto de **relación** matemática.
  - Una computación consiste en la búsqueda de valores de argumentos para satisfacer relaciones.
  - Lenguajes lógicos: Prolog, DLV, Racer.

Bases teóricas:

- Programación imperativa: máquinas de A. Turing (años 30).
- Programación funcional: lambda cálculo de A. Church (años 20).
- Programación lógica: resolución de A. Robinson (años 60).

1.2. Historia de la programación funcional

Historia de la programación funcional

- 1930s: Lambda cálculo (Alonzo Church).
- 1960: Lisp (John McCarthy).
- 1960s: ISWIM (Peter Landin).
- 1970s: FP (John Backus).
- 1970s: ML (Robin Milner).
- 1972: Prolog (Colmerauer).
- 1970s–1980s: Miranda (David Turner).
- 1987: Haskell.
- 2003: Haskell 98 Report.

2. El intérprete de Haskell

2.1. Cálculo de expresiones

Cálculo de expresiones e intérpretes

- Un **programa funcional** es un conjunto de expresiones.
- En los lenguajes funcionales se pueden **definir funciones**.
- Una **computación** es la evaluación de una expresión.
- Las evaluaciones las realizan los **intérpretes**.
- **Hugs** es un intérprete del lenguaje funcional **Haskell**.

Inicio, cálculo, ayuda y fin de Hugs

```
PD> hughs
__   __ __  __  ____   ___      ----------------------------------------
||   || ||  || ||  || ||__      Hugs 98: Based on the Haskell 98 standard
||___|| ||__|| ||__||  __||     Copyright (c) 1994-2005
||---||         ___||           World Wide Web: http://haskell.org/hugs
||   ||                        Bugs: http://hackage.haskell.org/trac/hugs
||   || Version: September 2006 ----------------------------------------

Hugs mode: Restart with command line option +98 for Haskell 98 mode

Type :? for help
Hugs> 2+3
5
```

```
Hugs> :?
LIST OF COMMANDS:  Any command may be abbreviated to :c where
c is the first character in the full name.

:load <filenames>   load modules from specified files
:load               clear all files except prelude
:also <filenames>   read additional modules
:reload             repeat last load command
:edit <filename>    edit file
:edit               edit last module
:module <module>    set module for evaluating expressions
<expr>              evaluate expression
:type <expr>        print type of expression
:?                  display this list of commands
:set <options>      set command line options
:set                help on command line options
```

```
:names [pat]        list names currently in scope
:info <names>       describe named objects
:browse <modules>   browse names exported by <modules>
:main <aruments>    run the main function with the given arguments
:find <name>        edit module containing definition of name
:cd dir             change directory
:gc                 force garbage collection
:version            print Hugs version
:quit               exit Hugs interpreter
Hugs> :q
[Leaving Hugs]
```

Uso de comandos del sistema operativo

```
Hugs> !pwd
/home/jalonso/alonso/curso-pd
Hugs> !date
mar jul 24 13:01:37 CEST 2007
```

Ejemplos de evaluaciones

- Evaluación de expresiones aritméticas:

```
Hugs> 5+2*3
11
```

- Evaluación de expresiones matemáticas:

```
Hugs> sqrt(9)
3.0
Hugs> sqrt 9
3.0
Hugs> sin 0.2 * sin 0.2 + cos 0.2 * cos 0.2
1.0
```

- Evaluación de expresiones con listas:

```
Hugs> length [1,3,6]
3
Hugs> reverse [3,4,5,6]
[6,5,4,3]
Hugs> head [1,3,6]
1
```

- Suma de los elementos de una lista:

```
Hugs> sum [3..6]
18
```

- Composición de funciones:

```
Hugs> head (reverse [3..6])
6
```

2.2. Definición de funciones

Proceso de construcción de un programa

- Llamada al editor:

```
Hugs> :edit "factorial.hs"
```

- Edición del programa `factorial.hs`:

```
fact n = product [1..n]
```

- Carga del programa:

```
Hugs> :load "factorial.hs"
```

- Evaluación:

```
Main> fact 4
24
```

Ampliación del programa

- Números combinatorios: $\binom{n}{m} = \frac{n!}{k!\ (n-k)!}$
- Llamada al editor:

```
Main> :edit "factorial.hs"
```

- Edición:

```
fact n = product [1..n]

comb n k = (fact n) `div` ((fact k) * (fact (n-k)))
```

- Recarga:

```
Main> :reload "factorial.hs"
```

- Evaluación:

```
Main> comb 6 2
15
```

3. Funciones estándard

3.1. Constantes, operadores y funciones predefinidas

Constantes

- Una **constante** es una función sin parámetros.
- Ejemplo de **definición de una constante**:

```
pi = 3.1416
```

- Ejemplo de uso:

```
Main> 2*pi
6.2832
```

Operadores

- Un **operador** es una función con dos parámetros que se escribe entre ellos.
- Ejemplo de **definición de un operador**:

```
n !^! k = (fact n) `div` ((fact k) * (fact (n-k)))
```

- Ejemplo de uso:

```
Main> 6 !^! 2
15
```

Funciones predefinidas y primitivas

- El **preludio** tiene **funciones predefinidas**.
- Consulta de definiciones:

```
Main> :set +E "emacs"
Main> :find fact
 -- Abre con emacs el fichero
 -- con la definición de factorial.
Main> :find sum
 -- Abre con emacs el preludio.
 -- Buscando se encuentra la definición
 --    sum = foldl' (+) 0
```

- Existen **funciones primitivas** definidas en el intérprete, pero no en Haskell.

Nombres de funciones y de parámetros

- Ejemplo: en la definición

```
fact n = product [1..n]
```

  - el **nombre de la función** es `fact`
  - el **nombre del parámetro** es `n`

- Los **nombres de las funciones y de los parámetros** tienen que empezar con una letra minúscula. Después pueden seguir más letras (minúsculas o mayúsculas), pero también números, el símbolo `'` y el símbolo `_`.
- Haskell diferencia las mayúsculas de las minúsculas.
- No se pueden usar como nombres las palabras reservadas.
- Los **nombres de operadores** son cadenas de símbolos como
  `: # % & * + - = . / \ < > ? ! @ ^ |`

3.2. Funciones sobre números

Tipos de números y operadores aritméticos en Haskell

- Tipos de números:
  - Enteros: 17, 0 y -3;
  - Números reales: 2.5, -7.8, 0.0, 1.2e3 y 0.5e-2.
- Operadores aritméticos:
  - Operadores: `+`, `-`, `*` y `/`.
  - Ejemplos:

```
5-12     ⇝ -7
7.2*3.0  ⇝ 21.6
19/4     ⇝ 4.75
1.5+2    ⇝ 3.5
```

- Los operadores aritméticos son primitivos.

Funciones numéricas predefinidas

- Funciones predefinidas para números enteros:
  - `abs` valor absoluto
  - `signum` -1 para negativos, 0 para cero y 1 para positivos
  - `gcd` máximo común divisor
  - `^` potencia
- Funciones predefinidas para números reales:
  - `sqrt` raíz cuadrada
  - `sin` seno
  - `log` logaritmno natural
  - `exp` exponencial
- Funciones predefinidas de transfomación entre enteros y reales:
  - `FromInteger` de entero a real
  - `round` redondea un real a entero

3.3. Funciones booleanas

Funciones booleanas entre números

Una **función booleana** es una función cuyo valor es un booleano (es decir `True` o `False`).

Funciones booleanas entre números:

- Relaciones:
  - `<` (menor que)
  - `>` (mayor que),
  - `<=` (menor o igual que)
  - `>=` (mayor o igual que),
  - `==` (igual a)
  - `/=` (distinto de).
- Ejemplos:

```
1<2             ⇝ True
2<1             ⇝ False
2+3 > 1+4       ⇝ False
sqrt 2.0 <= 1.5 ⇝ True
5 /= 1+4        ⇝ False
```

Funciones lógicas

- Las **funciones lógicas** son funciones cuyos argumentos y valores son booleanos.
- Funciones lógicas:
  `&&` (conjunción),
  `||` (disyunción) y
  `not` (negación).
- Ejemplos:

```
1<2 && 3<4 ⇝ True
1<2 && 3>4 ⇝ False
1<2 || 3>4 ⇝ True
not False  ⇝ True
not (1<2)  ⇝ False
```

Otras funciones booleanas predefinidas

- Funciones:
  `even x` `x` es par
  `odd x` `x` es impar
- Ejemplos:

```
even 7    ⇝ False
even 6    ⇝ True
odd (5+2) ⇝ True
```

3.4. Funciones sobre listas

Funciones predefinidas sobre listas

- `[]` es la lista vacía.
- `x:l` coloca `x` al frente de `l`

```
1:[]      ⇝ [1]
1:[3,4,3] ⇝ [1,3,4,3]
```

- `length l` es el número de elementos de `l`

```
length [2,4,2] ⇝ 3
```

- `sum l` es la suma de los elementos de `l`

```
sum [2,4,2] ⇝ 8
```

- `l1 ++ l2` es la concatenación de `l1` y `l2`

```
[2,3] ++ [3,2,4,1] ⇝ [2,3,3,2,4,1]
```

- `null l` se verifica si `l` es la lista vacía

```
null []    ⇝ True
null [1,2] ⇝ False
```

- `and l` se verifica si todos los elementos de `l` son verdaderos.

```
and [1<2, 2<3, 1 /= 0] ⇝ True
and [1<2, 2<3, 1 == 0] ⇝ False
```

- `or l` se verifica si algún elemento de `l` es verdadero. Por ejemplo,

```
or [2>3, 5<9] ⇝ True
or [2>3, 9<5] ⇝ False
```

- `[n..m]` la lista de los números de `n` a `m`

```
[2..5] ⇝ [2,3,4,5]
```

- `take n l` es la lista de los `n` primeros elementos de `l`.

```
take 2 [3,5,4,7]  ⇝ [3,5]
take 12 [3,5,4,7] ⇝ [3,5,4,7]
take 3 [10..20]   ⇝ [10,11,12]
```

3.5. Funciones sobre funciones

Funciones con funciones como parámetros

- `map f l` es la lista obtenida aplicando `f` a cada elemento de `l`

```
map fact [1,2,3,4,5] ⇝ [1,2,6,24,120]
map sqrt [1,2,4]     ⇝ [1.0,1.4142135623731,2.0]
map even [1..5]      ⇝ [False,True,False,True,False]
```

4. Definición de funciones

4.1. Definición por combinación

Definiciones por combinación con un parámetro

- `fact n` es el factorial de `n`. Por ejemplo,

```
fact 4 ⇝ 24
```

```
fact n = product [1..n]
```

- `impar x` se verifica si el número `x` es impar. Por ejemplo,

```
impar 7  ⇝  True
impar 6  ⇝  False
```

```
impar x = not (even x)
```

- `cuadrado x` es el cuadrado del número `x`. Por ejemplo,

```
cuadrado 3  ⇝  9
```

```
cuadrado x = x*x
```

- `suma_de_cuadrados l` es la suma de los cuadrados de los elementos de la lista `l`. Por ejemplo,

```
suma_de_cuadrados [1,2,3]  ⇝  14
```

```
suma_de_cuadrados l = sum (map cuadrado l)
```

Definiciones por combinación con varios parámetros

- `n_combinaciones n k` es el número de maneras de escoger `k` elementos de un conjuntos de `n` elementos. Por ejemplo,

```
n_combinaciones 6 2 ⇝ 15
```

```
n_combinaciones n k =
    (fact n) `div` ((fact k) * (fact (n-k)))
```

- `raices a b c` es la lista de las raices de la ecuación $ax^2 + bc + c = 0$. Por ejemplo,

```
raices 1 3 2  ⇝  [-1.0,-2.0]
```

```
raices a b c = [ (-b+sqrt(b*b-4*a*c))/(2*a),
                 (-b-sqrt(b*b-4*a*c))/(2*a) ]
```

Definiciones por combinación sin parámetros

- `iva` el porcentaje de IVA.

```
iva = 0.16
```

- `cambioEuro` es el cambio de un euro a pesetas

```
cambioEuro = 166.386
```

Forma de las definiciones de las funciones

- el nombre de la función
- los nombres de los parámetros (si existen)
- el símbolo =
- una expresión, que puede contener los parámetros, las funciones estándar y otras funciones definidas.

Definiciones por combinación de funciones booleanas

- Ejemplos:

```
negativo x = x<0
positivo x = x>0
esCero   x = x == 0
```

- Notar la diferencia entre = y == en la definición de `esCero`.

Definiciones con entornos locales

- Ejemplo de redefinición de `raices`

```
raices' a b c = [ (-b+d)/n, (-b-d)/n ]
    where d  = sqrt(b*b-4*a*c)
          n  = 2*a
```

- Mejora en legibilidad y en eficiencia.

```
Main> :set +s
Main> raices 1 3 2
[-1.0,-2.0]
(134 reductions, 242 cells)
Main> raices' 1 3 2
[-1.0,-2.0]
(104 reductions, 183 cells)
```

4.2. Definición por distinción de casos

Definiciones por distinción de casos

- `abs x` es el valor absoluto de `x`. Por ejemplo,

```
abs (-3) ⇝ 3
```

Prelude

```
abs x | x < 0  = -x
      | x >= 0 = x
```

- `signum x` es 1 si `x` es positivo, 0 si `x` es cero y -1 si `x` es negativo. Por ejemplo,

```
signum 7    ⇝ 1
signum (-4) ⇝ -1
```

Prelude

```
signum x | x > 0      = 1
         | x == 0     = 0
         | otherwise  = -1
```

- Las definiciones de los diferentes casos son precedidas por expresiones booleanas, que se llaman **guardas**.
- En cada **expresión guardada** debe existir el símbolo `|`, una expresión booleana, el símbolo = y una expresión.
- Forma de las definiciones de las funciones:
  - el nombre de la función
  - los nombres de los parámetros (si existen)
  - el símbolo = y una expresión, o una o más expresiones guardadas.
  - si se desea, la palabra `where` seguida de definiciones locales.

4.3. Definición por análisis de patrones

Clases de parámetros

- **Parámetros formales**: los usados en las definiciones de funciones.
- **Parámetos actuales**: los usados en las llamadas de funciones.
- Ejemplos:
  - en la definición

    ```
    f x y = x * y
    ```

    los parámetros formales son `x` e `y`.
  - en la expresión

    ```
    f 7 (2+3)
    ```

    los parámetros actuales son `7` y `2+3`.
- En la evaluación de una expresión se sustituyen los parámetros formales por los parámetros actuales.
- Los parámetros formales, hasta ahora, son nombres.
- Los parámetros actuales son expresiones.

Definiciones con patrones

- `g l` es la suma de los dos elementos de `l` si `l` es una lista de 3 números el primero de los cuales es el número 1.

  ```
  g [1,x,y] = x+y
  ```

  Por ejemplo,

  ```
  Main> g [1,3,5]
  8
  Main> g [2,3,5]
  Program error: pattern match failure: g [2,3,5]
  Main> g [1,3,5,4]
  Program error: pattern match failure: g [1,3,5,4]
  ```

- `suma l` es la suma de los elementos de la lista `l` cuando `l` es una lista con tres elementos como máximo.

```
suma []      = 0
suma [x]     = x
suma [x,y]   = x+y
suma [x,y,z] = x+y+z
```

Por ejemplo,

```
Main> suma [1,3]
4
Main> suma [1,3,4,5]
Program error: pattern match failure: suma [1,3,4,5]
```

Construcciones que se pueden utilizar como patrón

- Números (por ejemplo `3`);
- Las constantes `True` y `False`;
- Nombres (por ejemplo, `x`);
- Listas cuyos elementos también son patrones (por ejemplo `[1,x,y]`);
- El operador `:` con patrones a la izquierda y a la derecha (por ejemplo `a:b`);
- El operador `+` con un patrón a la izquierda y un entero a la derecha (por ejemplo `n+1`);

Ejemplos de emparejamiento de patrones

Patrón	Argumento	Sustitución
x	0	{x/0}
0	0	{}
(x:y)	[1,2]	{x/1, y/[2]}
(1:x)	[1,2]	{x/[2]}
(1:x)	[2,3]	Fallo
(x:_:_:y)	[1,2,3,4,5,6]	{x/1, y/[4,5,6]}
[]	[]	{}
[1,x]	[1,2]	{x/2}
[x,y]	[1]	Fallo
(n+2)	6	{n/4}
(n+1)	0	Fallo

Definiciones con patrones en el preludio

- `x && y` es la conjunción de `x` e `y`

Prelude
```
False && x   = False
True  && x   = x
```

- `head l` es la cabeza de la lista `l`. Por ejemplo,

```
head [3,5,2] ⇝ 3
```

Prelude
```
head (x:_) = x
```

- `tail l` es el resto de la lista `l`. Por ejemplo,

```
tail [3,5,2] ⇝ [5,2]
```

Prelude
```
tail (_:xs) = xs
```

- Patrón de **variable anónima**: _

Definición con patrones aritméticos

- `anterior x` es el anterior de `x`. Por ejemplo,

```
Main> anterior 3
2
Main> anterior 0
Program error: pattern match failure: anterior 0
```

```
anterior (n+1) = n
```

4.4. Definición por recursión

Ejemplos de definiciones por recursión numérica

- `fac n` es el factorial del número `n`. Por ejemplo,

```
fac 20 ⇝ 2432902008176640000
```

```
fac 0     = 1
fac (n+1) = (n+1) * fac n
```

- `potencia x y` es x^y. Por ejemplo,

  `potencia 2 4` $\leadsto$ `16`

```
potencia x 0     = 1
potencia x (n+1) = x * (potencia x n)
```

Cálculo paso a paso del factorial

Cálculo paso a paso de `fac 4`:

```
fac 0     = 1               -- fac.1
fac (n+1) = (n+1) * fac n   -- fac.2
```

```
fac 4
= 4 * fac 3                    [por fac.2]
= 4 * (3 * fac 2)              [por fac.2]
= 4 * (3 * (2 * fac 1))        [por fac.2]
= 4 * (3 * (2 * (1 * fac 0)))  [por fac.2]
= 4 * (3 * (2 * (1 * 1)))      [por fac.1]
= 4 * (3 * (2 * 1))            [por aritmética]
= 4 * (3 * 2)                  [por aritmética]
= 4 * 6                        [por aritmética]
= 24                           [por aritmética]
```

Ejemplos de definiciones por recursión sobre listas

- `sum l` es la suma de los elementos de `l`. Por ejemplo,

  `sum [1,3,6]` $\leadsto$ `10`

Prelude

```
sum []     = 0
sum (x:xs) = x + sum xs
```

- `longitud l` es el número de elementos de `l`. Por ejemplo,

  `longitud [1,3,6]` $\leadsto$ `3`

```
longitud []     = 0
longitud (_:xs) = 1 + longitud xs
```

Cálculo paso a paso de la longitud

Cálculo paso a paso de `longitud [3,2,3,5]`:

```
longitud []     = 0                 -- longitud.1
longitud (_:xs) = 1 + longitud xs   -- longitud.2
```

```
longitud [3,2,3,5]
= 1 + longitud [2,3,5]                [por longitud.2]
= 1 + (1 + longitud [3,5])            [por longitud.2]
= 1 + (1 + (1 + longitud [5]))        [por longitud.2]
= 1 + (1 + (1 + (1 + longitud [])))   [por longitud.2]
= 1 + (1 + (1 + (1 + 0)))             [por longitud.1]
= 1 + (1 + (1 + 1))                   [por aritmética]
= 1 + (1 + 2)                         [por aritmética]
= 1 + 3                               [por aritmética]
= 4                                   [por aritmética]
```

4.5. Indentación y comentarios

Indentación y comentarios

- Haskell usa una sintaxis bidimensional.
- Tipos de comentarios:
  - hasta fin de línea: `--`
  - región comentada: `{- ... -}`

5. Tipado

5.1. Clases de errores

Errores sintácticos

- Ejemplo de **error sintáctico**: Sea `ej1.hs` un fichero con el siguiente contenido

  Código erróneo

  ```
  esCero x = x=0
  ```

  al cargarlo, se produce el siguiente error:

  ```
  Hugs> :l ej1.hs
  ERROR "ej1.hs":1 - Syntax error in input (unexpected `=')
  ```

Errores de dependencia

- Ejemplo de **error de dependencia** (i.e. uso de funciones no definidas): Sea `ej2.hs` un fichero con el siguiente contenido

  Código erróneo
  ```
  fact n = producto [1..n]
  ```

  al cargarlo, se produce el siguiente error:

  ```
  Hugs> :l ej2.hs
  ERROR "ej2.hs":1 - Undefined variable "producto"
  ```

Errores de tipo

- Ejemplo de **error de tipo**: Sea `ej3.hs` un fichero con el siguiente contenido

  Código erróneo
  ```
  f x = 2*x + True
  ```

  al cargarlo, se produce el siguiente error:

  ```
  Hugs> :l "ej3.hs"
  ERROR "ej3.hs":1 - Instance of Num Char required for definition of ff
  ```

- Ejemplo de **error de tipo** en evaluación:

  ```
  Hugs> length 3
  ERROR - Unresolved overloading
  *** Type       : Num [a] => Int
  *** Expression : length 3
  ```

Fases de análisis

1. análisis sintáctico
2. análisis de dependencias
3. análisis de tipo

5.2. Expresiones de tipo

Determinación del tipo de una expresión

- Mediante `:type`

```
Hugs> :type 2+3
2 + 3 :: Num a => a
```

- Mediante la activación de escritura de tipos:

```
Hugs> :set +t
Hugs> 2+3
5 :: Integer
```

que se lee "`5` **es de tipo** `Integer`".

Tipos básicos

- `Int`: el tipo de los enteros en el intervalo $[-2^{29}, 2^{29} - 1]$.
- `Integer`: el tipo de los enteros de precisión ilimitada.
- `Float`: el tipo de los números reales.
- `Double`: el tipo de los reales con mayor precisión que `Float`.
- `Bool`: el tipo de los valores booleanos: `True` y `False`.

Nota: Los nombres de los tipos comienzan por mayúscula.

Tipo lista

- Ejemplos de tipo lista:

```
Hugs> :set +t
Hugs> [1,2,3]
[1,2,3] :: [Integer]
Hugs> [True,False]
[True,False] :: [Bool]
Hugs> [[1,2],[2,3,4]]
[[1,2],[2,3,4]] :: [[Integer]]
```

- `[a]` es el tipo de las listas de elementos del tipo `a`.
- Todos los elementos de una lista tienen que ser del mismo tipo:

```
Hugs> [1,True]
ERROR - Unresolved overloading
*** Type       : Num Bool => [Bool]
*** Expression : [1,True]
```

Tipo de funciones

- Determinación del tipo de una función:

```
Hugs> :type length
length :: [a] -> Int
Hugs> :type sqrt
sqrt :: Floating a => a -> a
Hugs> :type even
even :: Integral a => a -> Bool
Hugs> :type sum
sum :: Num a => [a] -> a
```

- Determinación del tipo de una lista de funciones:

```
Hugs> :type [sin, cos, tan]
[sin,cos,tan] :: Floating a => [a -> a]
```

Inferencia de tipos

El intérprete puede determinar automáticamente los tipos. Por ejemplo, si se define

```
f []     = 0
f (x:xs) = x + f xs
```

entonces se puede determinar el tipo de `f`

```
Main> :type f
f :: Num a => [a] -> a
```

Declaración de tipos (Signaturas)

- Se puede escribir el tipo de una función en el programa. Por ejemplo,

```
g :: [Int] -> Int
g []     = 0
g (x:xs)  = x + g xs
```

  entonces se puede comprobar el tipo

```
Main> :type g
g :: [Int] -> Int
```

- Ventajas de la declaración de tipos:
  - se comprueba si la función tiene el tipo que está declarado
  - la declaración del tipo ayuda a entender la función.
- No hace falta escribir la declaración directamente delante la definición.

5.3. Polimorfismo

Ejemplo de función polimorfa

- Ejemplo:

```
Hugs> :type length
length :: [a] -> Int
```

Se lee "`length` aplica una lista de elementos de un tipo `a` en un número entero de precisión limitada".

- Notas:
  - `a` es una **variable de tipo**.
  - Un tipo que contiene variables de tipo, se llama **tipo polimórfico**.
  - Las funciones con un tipo polimórfico se llaman **funciones polimórficas**.
  - El fenómeno en sí se llama **polimorfismo**.

Otros ejemplos de funciones polimorfas

- Ejemplo de polimosrfismo con listas:

```
Main> :type head
head :: [a] -> a
```

- Ejemplo de polimosrfismo sin listas:

Prelude

```
id :: a -> a
id x = x
```

Por ejemplo,

```
Main> :type id True
id True :: Bool
Main> :type id [True, False]
id [True,False] :: [Bool]
Main> :type id 3
id 3 :: Num a => a
```

Ejemplo de tipos de funciones de más de un parámetro

- `map f l` es la lista obtenida aplicando `f` a cada elemento de `l`

```
map fact [1,2,3,4,5] ⇝ [1,2,6,24,120]
map sqrt [1,2,4]     ⇝ [1.0,1.4142135623731,2.0]
map even [1..5]      ⇝ [False,True,False,True,False]
```

- Tipo de `map`:

```
Hugs> :type map
map :: (a -> b) -> [a] -> [b]
```

Ejemplo de tipo de operadores

- `l1 ++ l2` es la concatenación de `l1` y `l2`

```
[2,3] ++ [3,2,4,1] ⇝ [2,3,3,2,4,1]
```

- Tipo de `(++)`

```
Main> :type (++)
(++) :: [a] -> [a] -> [a]
```

- `x && y` es la conjunción de `x` e `y`. Por ejemplo,

```
1<2 && 3<4 ⇝ True
1<2 && 3>4 ⇝ False
```

- Tipo de `(&&)`

```
Main> :type (&&)
(&&) :: Bool -> Bool -> Bool
```

5.4. Sobrecarga

Diferencia entre polimorfismo y sobrecarga

- Ejemplo de función polimorfa:

```
Main> :type length
length :: [a] -> Int
```

- Ejemplo de operador sobrecargado:

```
Main> :type (+)
(+) :: Num a => a -> a -> a
```

  se lee "`+` es de tipo `a -> a -> a` donde `a` tiene tipo en la clase `Num`".

Clases

Una **clase** es un grupo de tipos con una característica en común.

Clases predefinidas en el preludio:

- `Num` es la clase de tipos cuyos elementos se pueden sumar, multiplicar, restar y dividir (tipos numéricos);
- `Ord` es la clase de tipos cuyos elementos se pueden ordenar;
- `Eq` es la clase cuyos elementos se pueden comparar (en inglés: "equality types").

Ejemplos de funciones sobrecargadas

- Otros ejemplos de operadores sobrecargados:

```
Main> :type (<)
(<) :: Ord a => a -> a -> Bool
Main> :type (==)
(==) :: Eq a => a -> a -> Bool
```

- Ejemplo de función definida sobrecargada:

```
cubo x = x * x * x
```

  cuyo tipo es

```
Main> :type cubo
cubo :: Num a => a -> a
```

Bibliografía

1. H. C. Cunningham (2007) *Notes on Functional Programming with Haskell*.
2. J. Fokker (1996) *Programación funcional*.
3. B.C. Ruiz, F. Gutiérrez, P. Guerrero y J. Gallardo (2004). *Razonando con Haskell (Un curso sobre programación funcional)*.
4. S. Thompson (1999) *Haskell: The Craft of Functional Programming*.
5. E.P. Wentworth (1994) *Introduction to Funcional Programming*.

Capítulo 2

Números y funciones

Programación declarativa (2007–08)

Tema 2: Números y funciones

José A. Alonso Jiménez

Índice

1. Operadores

1.1. Operadores como funciones y viceversa

Operadores como funciones

- Ejemplo:

```
2+3     ⇝ 5
(+) 2 3 ⇝ 5
```

- Regla: un operador entre paréntesis se comporta como la función correspondiente.

Funciones como operadores

- Ejemplo:

```
max 2 3   ⇝ 3
2 `max` 3 ⇝ 3
```

- Regla: una función entre comillas inversas se comporta como el operador correspondiente.

1.2. Precedencias

Ejemplos de precedencias

- Ejemplos:

```
2*3+4*5 ⇝ 26
2*3<7   ⇝ True
```

`*` tiene mayor precedencia que `+`
`<` tiene mayor precedencia que `*`

- Pueden usarse paréntesis para saltarse las precedencia. Por ejemplo,

```
2*3+4*5   ⇝ 26
2*(3+4)*5 ⇝ 70
```

Precedencia de los operadores del preludio

nivel 9	`.`, `!!`
nivel 8	`^`
nivel 7	`*`, `/`, `` `quot` ``, `` `rem` ``, `` `div` ``, `` `mod` ``
nivel 6	`+`, `-`
nivel 5	`:`, `++`
nivel 4	`==`, `/=`, `<`, `<=`, `>=`, `>`, `` `elem` ``, `` `notElem` ``
nivel 3	`&&`
nivel 2	`||`

Precedencia de la llamada a funciones

- La llamada a funciones (el operador invisible entre `f` y `x` en `f x`) tiene la máxima precedencia. Por ejemplo,

```
cuadrado 3 + 4   ⇝ 13
cuadrado (3 + 4) ⇝ 49
```

- En la definición de funciones por análisis de patrones la llamada a función tiene la precedencia más alta. Por ejemplo,

```
fac 0     = 1
fac (n+1) = (n+1) * fac n
```

  los paréntesis en la segunda ecuación son necesarios.

1.3. Asociatividad

Operadores

- asocian por la izquierda:
  `+`, `-`, `*`, `/`, `` `quot` ``, `` `rem` ``, `` `div` ``, `` `mod` ``, `&&`, `||`, `!!`
- asocian por la derecha:
  `^`, `:`, `++`, `.`
- no asocian:
  `==`, `/=`, `<`, `<=`, `>=`, `>`, `` `elem` ``, `` `notElem` ``

1.4. Definición de operadores

Definición de operadores

- Ejemplo de declaración de operadores del preludio:

Prelude

```
infixr 8  ^
infixl 6  +, -
infix  4  ==, /=, <, <=, >=, >, `elem`, `notElem`
```

- Ejemplo de definición de operador:
  `x ~= y` se verifica si $|x - y| < 0{,}0001$. Por ejemplo,

```
3.00001 ~= 3.00002 ⇝ True
3.1 ~= 3.2         ⇝ False
```

```
infix 4 ~=
(~=)   :: Float -> Float -> Bool
x ~= y  = abs(x-y) < 0.0001
```

2. Currificación

2.1. Instanciación parcial

Ejemplo de instanciación parcial

Definición de `siguiente` mediante instanciación parcial de `suma`:

- `suma x y` es la suma de `x` e `y`:

```
suma :: Int -> Int -> Int
suma x y = x+y
```

- `siguiente x` es el siguiente de `x`. Por ejemplo,

```
siguiente 3   ⇝ 4
```

```
siguiente :: Int -> Int
siguiente = suma 1
```

Instancias parciales

- Ejemplo de uso de una instancia parcial como parámetro:

```
map (suma 5) [1,2,3] ⇝ [6,7,8]
```

- Tipos de instancias parciales:

```
Main> :type suma
suma :: Int -> Int -> Int
Main> :type suma 1
suma 1 :: Int -> Int
Main> :type suma 1 3
suma 1 3 :: Int
```

Regla: -> asocia por la derecha.

- Estrategia de currificación: describir las funciones de más de un parámetro por funciones de un parámetro que devuelven otra función.

2.2. Reducción de paréntesis

Ejemplos de reducción de paréntesis

- Se ha elegido la asociatividad de -> y la aplicación de función de tal manera que no se ve la currificación: la aplicación de función asocia por la izquierda y -> asocia por la derecha. Por ejemplo,

```
sumaCuatro :: Int -> Int -> Int -> Int -> Int
sumaCuatro a b c d  = a+b+c+d
```

entonces

```
sumaCuatro 2 3 4 5 ⇝ 14
```

- La regla es: si no están escritos los paréntesis, entonces están escritos implícitamente de tal manera que funciona la currificación.

Ejemplos en los que se necesitan paréntesis

- en declaraciones de tipo:

Prelude
```
map :: (a -> b) -> [a] -> [b]
```

- en expresiones:

```
cuadrado (3 + 4)
```

2.3. Secciones de operadores

Secciones de operadores

Si $\oplus$ es un operador, entonces

- $(\oplus x)$ es la función definida por $(\oplus x)y = y \oplus x$.
- $(x\oplus)$ es la función definida por $(x\oplus)y = x \oplus y$.

Ejemplos de definiciones mediante secciones:

- `succ x` es el siguiente de `x`. Por ejemplo, `succ 3` $\leadsto$`4`

Prelude

```
succ = (+1)
```

- `doble x` es el doble de `x`. Por ejemplo, `doble 3` $\leadsto$`6`

```
doble = (2*)
```

- `mitad x` es la mitad de `x`. Por ejemplo, `mitad 5` $\leadsto$`2.5`

```
mitad = (/2)
```

- `inverso x` es el inverso de `x`. Por ejemplo, `inverso 2` $\leadsto$`0.5`

```
inverso = (1/)
```

- `cuadrado x` es el cuadrado de `x`. Por ejemplo, `cuadrado 3` $\leadsto$`9`

```
cuadrado = (^2)
```

- `dosElevadoA x` es 2^x. Por ejemplo, `dosElevadoA 3` $\leadsto$`8`

```
dosElevadoA = (2^)
```

- `esPositivo` se verifica si `x` es positivo. Por ejemplo,

```
esPositivo 3    ⇝ True
esPositivo (-3) ⇝ False
```

```
esPositivo = (>0)
```

Secciones como parámetros

Ejemplos de uso de secciones como parámetros:

```
Main> map (2*) [1,2,3]
[2,4,6]
Main> map (2/) [1,2,4,8]
[2.0,1.0,0.5,0.25]
Main> map (/2) [1,2,4,8]
[0.5,1.0,2.0,4.0]
Main> map (2^) [1,2,4,8]
[2,4,16,256]
Main> map (^2) [1,2,4,8]
[1,4,16,64]
```

3. Funciones como parámetros

3.1. Funciones sobre listas

Funciones de orden superior

Las **funciones de orden superior** son las que tienen funciones como parámetros.

- `map f l` es la lista obtenida aplicando `f` a cada elemento de `l`. Por ejemplo,

  ```
  map (2*) [1,2,3] ⇝ [2,4,6]
  ```

- `filter p l` es la lista de los elementos de `l` que cumplen la propiedad `p`. Por ejemplo,

  ```
  filter even [1,3,5,4,2,6,1] ⇝ [4,2,6]
  filter (>3) [1,3,5,4,2,6,1] ⇝ [5,4,6]
  ```

3.2. Iteración

La función de iteración `until`

- `until p f x` aplica la `f` a `x` el menor número posible de veces, hasta alcanzar un valor que satisface el predicado `p`. Por ejemplo,

  ```
  until (>1000) (2*) 1 ⇝ 1024
  ```

Prelude

```
until :: (a -> Bool) -> (a -> a) -> a -> a
until p f x  = if p x
               then x
               else until p f (f x)
```

3.3. Composición

Composición de funciones

- `f . g` es la composición de las funciones `f` y `g`; es decir, la función que aplica `x` en `f(g(x))`. Por ejemplo,

```
(cuadrado . succ) 2 ⇝ 9
(succ . cuadrado) 2 ⇝ 5
```

Prelude

```
(.) :: (b -> c) -> (a -> b) -> (a -> c)
(f . g) x  = f (g x)
```

- Ejemplo de definición mediante composición:

```
impar = not . even
```

- Ejemplo de uso de composición como parámetro:

```
Main> filter (not . even) [1,3,5,4,2,6,1]
[1,3,5,1]
```

3.4. Intercambio de argumentos

Intercambio de argumentos

- `flip f` intercambia el orden de los argumentos de `f`. Por ejemplo,

```
(-) 5 2      ⇝ 3
flip (-) 5 2 ⇝ -3
(/) 5 2      ⇝ 2.5
flip (/) 5 2 ⇝ 0.4
```

Prelude

```
flip :: (a -> b -> c) -> b -> a -> c
flip f x y = f y x
```

3.5. Funciones anónimas

Funciones anónimas

La expresión

```
\x1 ... xn -> cuerpo
```

representa una función anónima. Por ejemplo,

```
Main> map (\x -> 2*x+1) [1..5]
[3,5,7,9,11]
Main> filter (\x -> 2*x > 7) [1..5]
[4,5]
Main> filter (\x -> odd x) [1..5]
[1,3,5]
Main> filter (\x -> 2*x > 7 && odd x) [1..5]
[5]
```

4. Problemas de cálculo numérico

4.1. Cálculo con números enteros

Cociente y resto

- `div x y` es el cociente entero de `x` entre `y`. Por ejemplo,

  ```
  7 `div` 2 ⇝ 3
  ```

- `rem x y` es el resto de dividir `x` por `y`. Por ejemplo,

  ```
  7 `rem` 2 ⇝ 1
  ```

- Aplicaciones de las funciones cociente y resto:

  - Calcular horas: Si son las 9 ahora, entonces 33 horas más tarde serán las `(9+33) `rem` 24` = 20.
  - Calcular días: Si se codifican los días con 0=domingo, 1=lunes, . . . , 6=sábado y hoy es el día 3 (miércoles), entonces dentro de 40 días será `(3+40) `rem` 7` = 1 (lunes).
  - Determinar si un número es divisible: Un número es divisible por n si el resto de la división por n es igual a cero.
  - Determinar las cifras de un número:
    La última cifra de un número `x` es `x `rem` 10`.
    La penúltima cifra es `(x `div` 10) `rem` 10`.
    La antepenúltima cifra es `(x `div` 100) `rem` 10`, etc.

Diseño ascendente: Cálculo de una lista de primos

- `divisible x y` se verifica si `x` es divisible por `y`. Por ejemplo,

```
divisible 9 3 ⇝ True
divisible 9 2 ⇝ False
```

```
divisible :: Int -> Int -> Bool
divisible x y = x `rem` y == 0
```

- `divisores x` es la lista de los divisores de `x`. Por ejemplo,

```
divisores 12 ⇝ [1,2,3,4,6,12]
```

```
divisores :: Int -> [Int]
divisores x = filter (divisible x) [1..x]
```

- `primo x` se verifica si `x` es primo. Por ejemplo,

```
primo 5 ⇝ True
primo 6 ⇝ False
```

```
primo :: Int -> Bool
primo x = divisores x == [1,x]
```

- `primos x` es la lista de los números primos menores o iguales que `x`. Por ejemplo,

```
primos 40 ⇝ [2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37]
```

```
primos :: Int -> [Int]
primos x = filter primo [1..x]
```

Diseño descendente: Cálculo del día de la semana

- `dia d m a` es el día de la semana correspondiente al día `d` del mes `m` del año `a`. Por ejemplo,

```
día 31 12 2007 ⇝ "lunes"
```

```
día d m a = díaSemana ((númeroDeDías d m a) `mod` 7)
```

- `númeroDía d m a` es el número de días trancurridos desde el 1 de enero del año 0 hasta el día `d` del mes `m` del año `a`. Por ejemplo,

```
númeroDeDías 31 12 2007 ⇝ 733041
```

```
númeroDeDías d m a =   (a-1)*365
                     + númeroDeBisiestos a
                     + sum (take (m-1) (meses a))
                     + d
```

- `númeroDeBisiestos a` es el número de años bisiestos antes del año `a`.

```
númeroDeBisiestos a =
    length (filter bisiesto [1..a-1])
```

- `bisiesto a` se verifica si el año `a` es bisiesto. La definición de año bisiesto es
  - un año divisible por 4 es un año bisiesto (por ejemplo 1972);
  - excepción: si es divisible por 100, entonces no es un año bisiesto
  - excepción de la excepción: si es divisible por 400, entonces es un año bisiesto (por ejemplo 2000).

```
bisiesto a =
    divisible a 4
    && (not(divisible a 100) || divisible a 400)
```

- `meses a` es la lista con el número de días del los meses del año `a`. Por ejemplo,

```
meses 2000 ⇝ [31,29,31,30,31,30,31,31,30,31,30,31]
```

```
meses a = [31,feb,31,30,31,30,31,31,30,31,30,31]
    where feb | bisiesto a = 29
              | otherwise  = 28
```

- `take n l` es la lista de los `n` primeros elementos de `l`. Por ejemplo,

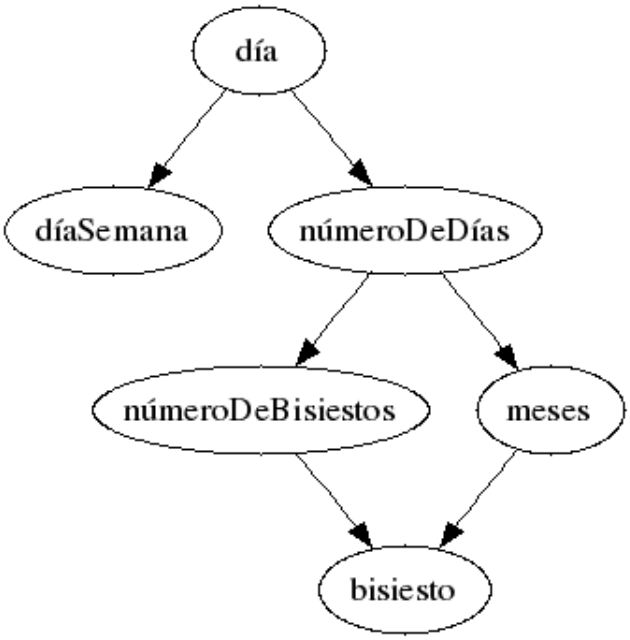
```
take 2 [3,5,4,7]  ⇝ [3,5]
take 12 [3,5,4,7] ⇝ [3,5,4,7]
```

- `díaSemana n` es el `n`–ésimo día de la semana comenzando con 0 el domingo. Por ejemplo,

```
díaSemana 2 ⇝ "martes"
```

```
díaSemana 0 = "domingo"
díaSemana 1 = "lunes"
díaSemana 2 = "martes"
díaSemana 3 = "miércoles"
díaSemana 4 = "jueves"
díaSemana 5 = "viernes"
díaSemana 6 = "sábado"
```

- Grafo de funciones



4.2. Diferenciación numérica

Diferenciación numérica

- `derivada a f x` es el valor de la derivada de la función `f` en el punto `x` con aproximación `a`. Por ejemplo,

```
derivada 0.001 sin pi ⇝ -0.9999273
derivada 0.001 cos pi ⇝ 0.0004768371
```

```
derivada :: Float -> (Float -> Float) -> Float -> Float
derivada a f x  = (f(x+a)-f(x))/a
```

- Tipos de derivadas:

```
derivadaBurda = derivada 0.01
derivadaFina  = derivada 0.0001
derivadaSuper = derivada 0.000001
```

Por ejemplo,

```
derivadaFina cos pi ⇝ 0.0
```

- `derivadaFinaDelSeno x` es el valor de la derivada fina del seno en `x`. Por ejemplo,

```
derivadaFinaDelSeno pi ⇝ -0.9989738
```

```
derivadaFinaDelSeno = derivadaFina sin
```

4.3. Cálculo de la raíz cuadrada

Cálculo iterativo de la raíz cuadrada

- Propiedad: si y es una aproximación de $\sqrt{x}$, entonces $\frac{1}{2}(y + \frac{x}{y})$ es una aproximación mejor.
- Propiedad: $\sqrt{x}$ es el límite de la sucesión x_n definida por
$$\begin{cases} x_0 & = 1 \\ x_{n+1} & = \frac{1}{2}(y + \frac{x}{x_n}) \end{cases}$$
- Programa: `raiz x` es la raíz cuadrada de `x` calculada usando la propiedad anterior. Por ejemplo,

```
raiz 9 ⇝ 3.00000000139698
```

```
raíz x = until aceptable mejorar 1
         where mejorar y   = 0.5*(y+x/y)
               aceptable y = abs(y*y-x) < 0.00001
```

4.4. Ceros de una función

Método de Newton para calcular los ceros

- Propiedad: si b es una aproximación para el punto cero de f, entonces $b - \frac{f(b)}{f'(b)}$ es una mejor aproximación.

- Propiedad: el límite de la sucesión x_n definida por
$$\begin{cases} x_0 & = 1 \\ x_{n+1} & = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases}$$
es un cero de f.

- Programa: `puntoCero f` es un cero de la función `f` calculado usando la propiedad anterior. Por ejemplo,

```
puntoCero cos ⇝ 1.570796
```

```
puntoCero f = until aceptable mejorar 1
    where mejorar b   = b - f b / derivadaFina f b
          aceptable b = abs (f b) < 0.00001
```

4.5. Funciones inversas

Funciones inversas

- Definición de raices mediante `puntoCero`:

```
raíz_cuadrada a = puntoCero f
    where f x = x*x-a

raíz_cúbica a = puntoCero f
    where f x = x*x*x-a
```

- Definición de funciones inversas mediante `puntoCero`:

```
arco_seno a = puntoCero f
    where f x = sin x - a

arco_coseno a = puntoCero f
    where f x = cos x - a
```

- Patrón de función inversa:

```
inversa g a = puntoCero f
    where f x = g x - a
```

- Redefiniciones con el patrón:

```
arco_seno_1   = inversa sin
arco_coseno_1 = inversa cos
logaritmo     = inversa exp
```

Por ejemplo,

```
logaritmo (exp 1) ⇝ 1.0
```

Bibliografía

1. H. C. Cunningham (2007) *Notes on Functional Programming with Haskell*.
2. J. Fokker (1996) *Programación funcional*.
3. B.C. Ruiz, F. Gutiérrez, P. Guerrero y J. Gallardo (2004). *Razonando con Haskell (Un curso sobre programación funcional)*.
4. S. Thompson (1999) *Haskell: The Craft of Functional Programming*.
5. E.P. Wentworth (1994) *Introduction to Funcional Programming*.

Capítulo 3

Estructuras de datos

Programación declarativa (2007–08)

Tema 3: Estructuras de datos

José A. Alonso Jiménez

Índice

1. Listas

1.1. Construcción de listas

Listas

- Las listas se usan para agrupar varios elementos.
- Los elementos de una lista tienen que ser del mismo tipo.
- El tipo de una lista se indica escribiendo el tipo de sus elementos entre corchetes.
- Maneras de construir listas:
  - enumeración
  - con el operador (:)
  - intervalos numéricos
  - por comprensión

Construcción de listas por enumeración

- Ejemplos de listas por enumeración:

```
[1,2,3]           :: [Int]
[True,False,True] :: [Bool]
[sin, cos, tan]   :: [Float -> Float]
[[1,2,3],[1,4]]   :: [[Int]]
```

- Ejemplos de listas con expresiones:

```
[1+2, 3*4, length [1,2,4,5]]    :: [Int]
[3<4, 2+3==4+1, (2<3) && (2>3)] :: [Bool]
[map (1+), filter (2<)]         :: [[Int] -> [Int]]
```

- Ejemplos de listas unitarias:

```
[3] :: [Int]
[[True, 3<2]] :: [[Bool]]
```

La lista vacía es polimorfa:

```
:set +t
tail [3]    ⇝ [] :: [Integer]
tail [True] ⇝ [] :: [Bool]

:t length   ⇝ length :: [a] -> Int
```

```
length []   ⇝ 0 :: Int
:t sum      ⇝ sum :: Num a => [a] -> a
sum []      ⇝ 0 :: Integer
:t and      ⇝ and :: [Bool] -> Bool
and []      ⇝ True :: Bool
```

Construcción de listas con el operador :

- `x:l` es la lista obtenida añadiendo el elemento `x` al principio de la lista `l`.
- El tipo de `(:)` es `a -> [a] -> [a]`
- El operador `(:)` asocia por la derecha.
- Ejemplos:

```
1:2:3:[] ⇝ [1,2,3]
1:[2,3]  ⇝ [1,2,3]
```

Construcción de listas mediante intervalos numéricos

- Ejemplos de construcción de listas mediante intervalos numéricos:

```
[3..7]     ⇝ [3,4,5,6,7]
[1,3..10]  ⇝ [1,3,5,7,9]
[7..3]     ⇝ []
[7,6..3]   ⇝ [7,6,5,4,3]
[2.5..6.5] ⇝ [2.5,3.5,4.5,5.5,6.5]
[2.5..6.3] ⇝ [2.5,3.5,4.5,5.5,6.5]
[2.5..6.7] ⇝ [2.5,3.5,4.5,5.5,6.5]
```

- `[n..m]` es la lista de los números desde `n` a `m` de 1 en 1.
- `[n,p..m]` es la lista de los números desde `n` a `m` de `d` en `d` donde `d = p-n`.

Construcción de listas por comprensión

- Ejemplos de lista intensional con un generador:

```
[x*x | x <- [1,3,7] ] ⇝ [1,9,49]
[2*x | x <- [1..10] ] ⇝ [2,4,6,8,10,12,14,16,18,20]
```

- Ejemplos de lista intensional con dos generadores:

```
Main> [[x,y] | x <- [1,2], y <- [3,4]]
[[1,3],[1,4],[2,3],[2,4]]
```

- Ejemplos de lista intensional con patrones:

```
[x+y | [x,y] <- [[1,2],[3,4],[5,6]]] ⇝ [3,7,11]
```

- Ejemplos de lista intensional con restricciones:

```
[x | (x:y) <- [[7,2,3],[1,3,4],[9,6]], x>sum y] ⇝ [7,9]
```

Ejemplos de definiciones con listas por comprensión

- `todosPares xs` se verifica si todos los elementos de la lista `xs` son pares. Por ejemplo,

```
todosPares [2,4,6]   ⇝ True
todosPares [2,4,6,7] ⇝ False
```

```
todosPares :: [Int] -> Bool
todosPares xs = (xs == [x | x<-xs, even x])
```

- `triangulares n` es la lista de las lista de números consecutivos desde `[1]` hasta `[1,2,...,n]`. Por ejemplo,

```
triangulares 4 ⇝ [[1],[1,2],[1,2,3],[1,2,3,4]]
```

```
triangulares :: Int -> [[Int]]
triangulares n = [[1..x] | x <- [1..n]]
```

1.2. Funciones sobre listas

Funciones sobre listas

- Patrón para definiciones sobre listas:
  - Base: `[]`
  - Paso: `x:xs`
- Funciones sobre listas del preludio definidas anteriormente:
  - `head l` es la cabeza de la lista `l`
  - `tail l` es el resto de la lista `l`
  - `sum l` es la suma de los elementos de `l`
  - `length l` es el número de elementos de `l`
  - `map f l` es la lista obtenida aplicando `f` a cada elemento de `l`
  - `filter p l` es la lista de los elementos de `l` que cumplen la propiedad `p`

Comparación y ordenación lexicográfica de listas

- Se pueden comparar y ordenar listas (con operadores como == y <) con la condición de que se puedan o comparar y ordenar sus elementos.
- Definición de la igualdad de listas:

Prelude
```
[]     == []     =  True
(x:xs) == (y:ys) =  x==y && xs==ys
_      == _      =  False
```

Concatenación de listas

- `l1 ++ l2` es la concatenación de `l1` y `l2`. Por ejemplo,

```
[2,3] ++ [3,2,4,1] ⇝ [2,3,3,2,4,1]
```

Prelude
```
(++) :: [a] -> [a] -> [a]
[]     ++ ys = ys
(x:xs) ++ ys = x : (xs ++ ys)
```

- `concat l` es la concatenación de las lista de `l`. Por ejemplo,

```
concat [[1,2,3],[4,5],[],[1,2]] ⇝ [1,2,3,4,5,1,2]
```

Prelude
```
concat :: [[a]] -> [a]
concat []     = []
concat (x:xs) = x ++ concat xs
```

Propiedades de la concatenación de listas

- Longitud de la concatenación:

```
prop_length_append :: [Int] -> [Int] -> Bool
prop_length_append xs ys =
    length(xs++ys) == (length xs) + (length ys)
```

```
Main> quickCheck prop_length_append
OK, passed 100 tests.
```

- Longitud de la concatenación general:

```
prop_length_concat :: [[Int]] -> Bool
prop_length_concat xss =
    length(concat xss) == sum (map length xss)
```

```
Main> quickCheck prop_length_concat
OK, passed 100 tests.
```

Selección de partes de una lista

- `head l` es la cabeza de la lista `l`. Por ejemplo,

```
head [3,5,2] ⇝ 3
```

Prelude

```
head :: [a] -> a
head (x:_) = x
```

- `tail l` es el resto de la lista `l`. Por ejemplo,

```
tail [3,5,2]    ⇝ [5,2]
```

Prelude

```
tail :: [a] -> [a]
tail (_:xs) = xs
```

- Conjetura:

```
prop_head_tail_1 :: [Int] -> Bool
prop_head_tail_1 xs =
    (head xs) : (tail xs) == xs
```

- Comprobación de la conjetura:

```
quickCheck prop_head_tail_1
Falsifiable, after 2 tests:
[]
```

- Comprobación del contraejemplo:

```
Main> (head []) : (tail []) == []
False
Main> head []
Program error: pattern match failure: head []
```

- Propiedad:

```
prop_head_tail :: [Int] -> Property
prop_head_tail xs =
    not (null xs) ==> (head xs) : (tail xs) == xs
```

- Comprobación de la propiedad:

```
Main> quickCheck prop_head_tail
OK, passed 100 tests.
```

- `last l` es el último elemento de la lista `l`. Por ejemplo,

```
last [1,2,3] ⇝ 3
```

Prelude

```
last :: [a] -> a
last [x]    = x
last (_:xs) = last xs
```

- `init l` es la lista `l` sin el último elemento. Por ejemplo,

```
init [1,2,3] ⇝ [1,2]
init [4]     ⇝ []
```

Prelude

```
init :: [a] -> [a]
init [x]    = []
init (x:xs) = x : init xs
```

- Propiedad:

```
prop_init_last :: [Int] -> Property
prop_init_last xs =
    not (null xs) ==>
    (init xs) ++ [last xs] == xs
```

- Comprobación:

```
Main> quickCheck prop_init_last
OK, passed 100 tests.
```

- `take n l` es la lista de los `n` primeros elementos de `l`. Por ejemplo,

```
take 2 [3,5,4,7]  ⇝ [3,5]
take 12 [3,5,4,7] ⇝ [3,5,4,7]
```

Prelude

```
take :: Int -> [a] -> [a]
take n _   | n <= 0  = []
take _ []            = []
take n (x:xs)        = x : take (n-1) xs
```

- Propiedad:

```
prop_take :: Int -> Int -> [Int] -> Property
prop_take n m xs =
    n >= 0 && m >= 0 ==>
    take n (take m xs) == take (min n m) xs
```

- Comprobación:

```
Main> quickCheck prop_take
OK, passed 100 tests.
```

- `drop n l` es la lista obtenida eliminando los primeros `n` elementos de la lista `l`. Por ejemplo,

```
drop 2 [3..10] ⇝ [5,6,7,8,9,10]
drop 12 [3..10] ⇝ []
```

Prelude

```
drop :: Int -> [a] -> [a]
drop n xs | n <= 0  = xs
drop _ []           = []
drop n (_:xs)       = drop (n-1) xs
```

- Propiedad de `drop`:

```
prop_drop :: Int -> Int -> [Int] -> Property
prop_drop n m xs =
    n >= 0 && m >= 0 ==>
    drop n (drop m xs) == drop (n+m) xs
```

- Propiedad de `take` y `drop`:

```
prop_take_drop :: Int -> [Int] -> Bool
prop_take_drop n xs =
    (take n xs) ++ (drop n xs) == xs
```

- `l !! n` es elemento `n`–ésimo de `l`, empezando a numerar con el 0. Por ejemplo,

```
[1,3,2,4,9,7] !! 3 ⇝ 4
```

Prelude

```
infixl 9  !!

(!!) :: [a] -> Int -> a
(x:_)  !! 0 = x
(_:xs) !! n = xs !! (n-1)
```

Inversa de una lista

- `reverse l` es la inversa de `l`. Por ejemplo,

```
reverse [1,4,2,5] ⇝ [5,2,4,1]
```

Prelude

```
reverse :: [a] -> [a]
reverse []     = []
reverse (x:xs) = reverse xs ++ [x]
```

- Propiedades:

```
prop_reverse :: [Int] -> [Int] -> Bool
prop_reverse xs ys =
    reverse(xs ++ ys) == (reverse ys) ++ (reverse xs)
    && reverse(reverse xs) == xs
```

Longitud de una lista

- `length l` es el número de elementos de `l`. Por ejemplo,

```
length [1,3,6] ⇝ 3
```

Prelude

```
length :: [a] -> Int
length []     = 0
length (_:xs) = 1 + length xs
```

Test de pertenencia a una lista

- `elem e l` se verifica si `e` es un elemento de `l`. Por ejemplo,

```
elem 2 [1,2,3] ⇝ True
elem 4 [1,2,3] ⇝ False
```

- Definición recursiva

```
elem_1 :: Eq a => a -> [a] -> Bool
elem_1 _ []     = False
elem_1 x (y:ys) = (x==y) || elem_1 x ys
```

- Definición con `or` y lista por comprensión:

```
elem_2 :: Eq a => a -> [a] -> Bool
elem_2 x ys = or [x==y | y <- ys]
```

- `notElem e l` se verifica si `e` es un elemento de `l`. Por ejemplo,

```
notElem 2 [1,2,3] ⇝ False
notElem 4 [1,2,3] ⇝ True
```

- Definición recursiva

```
notElem_1 :: Eq a => a -> [a] -> Bool
notElem_1 _ []     = True
notElem_1 x (y:ys) = (x/=y) && notElem_1 x ys
```

- Definición con `or` y lista por comprensión:

```
notElem_2 :: Eq a => a -> [a] -> Bool
notElem_2 x ys = and [x/=y | y <- ys]
```

- Equivalencia de las definiciones:

```
prop_equivalencia_notElem :: Int -> [Int] -> Bool
prop_equivalencia_notElem x ys =
    notElem_1 x ys == notElem x ys &&
    notElem_2 x ys == notElem x ys

prop_equivalencia_elem :: Int -> [Int] -> Bool
prop_equivalencia_elem x ys =
    elem_1 x ys == elem x ys &&
    elem_2 x ys == elem x ys
```

- Propiedad de `elem` y `notElem`:

```
prop_elem_notElem :: Int -> [Int] -> Bool
prop_elem_notElem x ys =
    (elem x ys || notElem x ys) &&
    not ((elem x ys) && (notElem x ys))
```

1.3. Funciones de orden superior sobre listas

Funciones de orden superior sobre listas: `map`

- `map f l` es la lista obtenida aplicando `f` a cada elemento de `l`. Por ejemplo,

```
map (2*) [1,2,3] ⇝ [2,4,6]
```

- Definición por comprensión:

Prelude
```
map :: (a -> b) -> [a] -> [b]
map f xs = [ f x | x <- xs ]
```

- Definición recursiva:

```
map' :: (a -> b) -> [a] -> [b]
map' f []     = []
map' f (x:xs) = f x : map' f xs
```

- `filter p l` es la lista de los elementos de `l` que cumplen la propiedad `p`. Por ejemplo,

```
filter even [1,3,5,4,2,6,1] ⇝ [4,2,6]
filter (>3) [1,3,5,4,2,6,1] ⇝ [5,4,6]
```

- Definición por comprensión:

Prelude
```
filter :: (a -> Bool) -> [a] -> [a]
filter p xs = [ x | x <- xs, p x ]
```

- Definición por recursión:

```
filter' :: (a -> Bool) -> [a] -> [a]
filter' p []                 = []
filter' p (x:xs) | p x       = x : filter' p xs
                 | otherwise = filter' p xs
```

Ejemplo de abstración de patrones

- Ejemplos de definiciones con el mismo patrón:
  - `sum l` es la suma de los elementos de `l`. Por ejemplo,

```
sum [3,4,5,6] ⇝ 18
```

Prelude

```
sum []     = 0
sum (x:xs) = x + sum xs
```

  - `product l` es el producto de los elementos de `l`. Por ejemplo,

```
product [2,3,5] ⇝ 30
```

Prelude

```
product []     = 1
product (x:xs) = x * product xs
```

- Ejemplos de definiciones con el mismo patrón:
  - `and l` se verifica si todos los elementos de `l` son verdaderos. Por ejemplo,

```
and [1<2, 2<3, 1 /= 0] ⇝ True
and [1<2, 2<3, 1 == 0] ⇝ False
```

Prelude

```
and []     = True
and (x:xs) = x && and xs
```

  - `or l` se verifica si algún elemento de `l` es verdadero. Por ejemplo,

```
or [2>3, 5<9] ⇝ True
or [2>3, 9<5] ⇝ False
```

Prelude

```
or []     = False
or (x:xs) = x || or xs
```

- Patrón:
  `foldr op e l` pliega por la derecha la lista `l` colocando el operador `op` entre sus elementos y el elemento `e` al final. Es decir,

```
foldr f e [x1,x2,x3]     ⇝ x1 f (x2 f (x3 f e))
foldr f e [x1,x2,...,xn] ⇝ x1 f (x2 f (... f (xn f e)))
```

  Por ejemplo,

```
foldr (+) 3 [2,3,5] ⇝ 13
foldr (-) 3 [2,3,5] ⇝ 1
```

Prelude
```
foldr :: (a -> b -> b) -> b -> [a] -> b
foldr f e []      = e
foldr f e (x:xs)  = f x (foldr f e xs)
```

- Redefiniciones con el patrón:

```
sum_1     = foldr (+) 0
product_1 = foldr (*) 1
and_1     = foldr (&&) True
or_1      = foldr (||) False
```

- Definición del factorial mediante plegados:
`fact n` es el factorial de `n`. Por ejemplo,

```
fact 5 ⇝ 120
```

```
fact n = foldr (*) 1 [1..n]
```

- Plegado por la izquierda:
`foldl op e l` pliega por la izquierda la lista `l` colocando el operador `op` entre sus elementos y el elemento `e` al principio. Es decir,

```
foldl f e [x1,x2,x3]     ⇝ (((e f x1) f x2) f x3
foldl f e [x1,x2,...,xn] ⇝ (...((e f x1) f x2) ... f xn
```

Por ejemplo,

```
foldl (+) 3 [2,3,5] ⇝ 13
foldl (-) 3 [2,3,5] ⇝ -7
```

Prelude
```
foldl :: (a -> b -> a) -> a -> [b] -> a
foldl f z []      = z
foldl f z (x:xs)  = foldl f (f z x) xs
```

Plegado acumulativo: `scanr`

- `scanr op e l` pliega por la derecha la lista `l` colocando el operador `op` entre sus elementos y el elemento `e` al final y escribe los resultados acumulados. Es decir,

```
scanr op e [x1,x2,x3] ⇝ [x1 op (x2 op (x3 op e)),
                         x2 op (x3 op e),
                         x3 op e,
                         e]
```

Por ejemplo,

```
scanr (+) 3 [2,3,5] ⇝[13,11,8,3]
```

Prelude

```
scanr :: (a -> b -> b) -> b -> [a] -> [b]
scanr f q0 []     = [q0]
scanr f q0 (x:xs) = f x q : (q:qs)
                    where (q:qs) = scanr f q0 xs
```

- `scanl` es análogo a `scanr` pero empezando por la izquierda. Por ejemplo,

  ```
  scanl (+) 3 [2,3,5] ⇝ [3,5,8,13]
  ```

- `factoriales n` es la lista de los factoriales desde el factorial de `0` hasta el factorial de `n`. Por ejemplo,

  ```
  factoriales 5 ⇝ [1,1,2,6,24,120]
  ```

```
factoriales :: Int -> [Int]
factoriales n = scanl (*) 1 [1..n]
```

Segmentos iniciales: `takeWhile`

- `takeWhile p l` es la lista de los elementos iniciales de `l` que verifican el predicado `p`. Por ejemplo,

  ```
  takeWhile even [2,4,6,7,8,9] ⇝ [2,4,6]
  ```

Prelude

```
takeWhile :: (a -> Bool) -> [a] -> [a]
takeWhile p []       = []
takeWhile p (x:xs)
         | p x       = x : takeWhile p xs
         | otherwise = []
```

Segmentos finales: `dropWhile`

- `dropWhile p l` es la lista `l` sin los elementos iniciales que verifican el predicado `p`. Por ejemplo,

```
dropWhile even [2,4,6,7,8,9] ⇝ [7,8,9]
```

Prelude

```
dropWhile :: (a -> Bool) -> [a] -> [a]
dropWhile p []       = []
dropWhile p (x:xs)
          | p x      = dropWhile p xs
          | otherwise = x:xs
```

1.4. Ordenación de listas

Ordenación por inserción

- `inserta e l` inserta el elemento `e` en la lista `l` delante del primer elemento de `l` mayor o igual que `e`. Por ejemplo,

```
inserta 5 [2,4,7,3,6,8,10] ⇝ [2,4,5,7,3,6,8,10]
```

```
inserta          :: Ord a => a -> [a] -> [a]
inserta e []      = [e]
inserta e (x:xs)
    | e<=x        = e:x:xs
    | otherwise   = x : inserta e xs
```

- `ordena_por_inserción l` es la lista `l` ordenada mediante inserción, Por ejemplo,

```
ordena_por_inserción [2,4,3,6,3] ⇝ [2,3,3,4,6]
```

- Definición recursiva:

```
ordena_por_inserción :: Ord a => [a] -> [a]
ordena_por_inserción []     = []
ordena_por_inserción (x:xs) =
    inserta x (ordena_por_inserción xs)
```

- Definición por plegado por la derecha:

```
ordena_por_inserción_1 :: Ord a => [a] -> [a]
ordena_por_inserción_1  = foldr inserta []
```

- Definición por plegado por la izquierda:

```
ordena_por_inserción_2 :: Ord a => [a] -> [a]
ordena_por_inserción_2  = foldl (flip inserta) []
```

- La última es la más eficiente:

```
ordena_por_inserción   [100,99..1] (51959 reductions, 68132 cells)
ordena_por_inserción_1 [100,99..1] (51960 reductions, 68034 cells)
ordena_por_inserción_2 [100,99..1] ( 3451 reductions,  5172 cells)
```

- `mínimo l` es el menor elemento de la lista `l`. Por ejemplo,

```
mínimo [3,2,5] ⇝ 2
```

```
mínimo l = head (ordena_por_inserción l)
```

  La complejidad de `mínimo` es lineal:

```
mínimo [10,9..1]                    (      300 red)
mínimo [100,99..1]                  (     2550 red)
mínimo [1000,999..1]                (    25050 red)
mínimo [10000,9999..1]              (   250050 red)
```

  aunque la complejidad de `ordena_por_inserción` es cuadrática

```
ordena_por_inserción [10,9..1]       (      750 red)
ordena_por_inserción [100,99..1]     (    51960 red)
ordena_por_inserción [1000,999..1]   (  5019060 red)
ordena_por_inserción [10000,9999..1] (500190060 red)
```

- `lista_ordenada l` se verifica si la lista `l` está ordenada de menor a mayor. Por ejemplo,

```
lista_ordenada [1,3,3,5] ⇝ True
lista_ordenada [1,3,5,3] ⇝ False
```

```
lista_ordenada :: Ord a => [a] -> Bool
lista_ordenada []       = True
lista_ordenada [_]      = True
lista_ordenada (x:y:xs) = x<=y && lista_ordenada (y:xs)
```

- El valor de `ordena_por_inserción` es una lista ordenada

```
prop_ordena_por_inserción_ordenada :: [Int] -> Bool
prop_ordena_por_inserción_ordenada xs =
    lista_ordenada (ordena_por_inserción xs)
```

Ordenación por mezcla

- `mezcla l1 l2` es la lista ordenada obtenida al mezclar las listas ordenadas `l1` y `l2`. Por ejemplo,

```
mezcla [1,3,5] [2,9] ⇝ [1,2,3,5,9]
```

```
mezcla :: Ord a => [a] -> [a] -> [a]
mezcla [] ys         = ys
mezcla xs []         = xs
mezcla (x:xs) (y:ys)
    | x <= y         = x : mezcla xs (y:ys)
    | otherwise      = y : mezcla (x:xs) ys
```

- `ordena_por_m l` es la lista `l` ordenada mediante mezclas, Por ejemplo,

```
ordena_por_m [2,4,3,6,3] ⇝ [2,3,3,4,6]
```

```
ordena_por_m :: Ord a => [a] -> [a]
ordena_por_m []  = []
ordena_por_m [x] = [x]
ordena_por_m xs  =
    mezcla (ordena_por_m ys) (ordena_por_m zs)
    where medio = (length xs) `div` 2
          ys    = take medio xs
          zs    = drop medio xs
```

- El valor de `ordena_por_m` es una lista ordenada

```
prop_ordena_por_mezcla_ordenada :: [Int] -> Bool
prop_ordena_por_mezcla_ordenada xs =
    lista_ordenada (ordena_por_m xs)
```

Ordenación rápida ("quicksort")

`ordena R xs` es la lista `xs` ordenada mediante el procedimiento de ordenación rápida. Por ejemplo,

```
ordenaR [5,2,7,7,5,19,3,8,6] ⇝ [2,3,5,5,6,7,7,8,19]
```

```
ordenaR :: Ord a => [a] -> [a]
ordenaR []     = []
ordenaR (x:xs) = ordenaR menores ++ [x] ++ ordenaR mayores
                 where menores = [e | e<-xs, e<x]
                       mayores = [e | e<-xs, e>=x]
```

2. Listas especiales

2.1. Cadenas

Cadenas

- Las cadenas son listas cuyos elementos son caracteres.
- Las cadenas se anotan entre comillas.
- Ejemplos de cadenas: `"lunes"`, `"Juan Luis"`
- A las cadenas se le pueden aplicar las funciones sobre listas. Por ejemplo,

```
length "martes"  ⇝ 6
"mar" ++ "tes"   ⇝ "martes"
"hola" < "mundo" ⇝ True
```

- El tipo de las cadenas es `String`.

2.2. Caracteres

Caracteres

- Los caracteres pueden ser letras, cifras y signos de puntuación.
- Los caracteres se anotas entre apóstrofos.
- Ejemplos de caracteres: `'a'`, `'+'`
- El tipo de los caracteres es `Char`.
- Una lista de caracteres es una cadena. Por ejemplo,

```
['h','o','l','a'] ⇝ "hola"
head "hola"       ⇝ 'h'
```

2.3. Funciones de cadenas y caracteres

Funciones de transformación entre cadenas y enteros

- `ord c` es el código ASCII del carácter `c`.
- `chr n` es el carácter de código ASCII el entero `n`.
- Ejemplos:

```
:load Hugs.Char
ord 'A' ⇝ 65
chr 65  ⇝ 'A'
```

- Para usar las funciones sobre caracteres en programas hay que importar el módulo `Char` escribiendo al principio del fichero

```
import Hugs.Char
```

Funciones reconocedoras predefinidas

- Funciones:

`isSpace x`	`x` es un espacio
`isUpper x`	`x` está en mayúscula
`isLower x`	`x` está en minúscula
`isAlpha x`	`x` es un carácter alfabético
`isDigit x`	`x` es un dígito
`isAlphaNum x`	`x` es un carácter alfanumérico

- Ejemplos de definición:

Prelude
```
isDigit c  =  c >= '0' && c <= '9'
```

Funciones sobre caracteres

- `dígitoDeCarácter c` es el dígito correspondiente al carácter numérico `c`. Por ejemplo,

```
dígitoDeCarácter '3' ⇝ 3
```

```
dígitoDeCarácter :: Char -> Int
dígitoDeCarácter c = ord c - ord '0'
```

Definición alternativa

```
dígitoDeCarácter' :: Char -> Int
dígitoDeCarácter' c
    | isDigit c = ord c - ord '0'
```

- `carácterDeDígito n` es el carácter correspondiente al dígito `n`. Por ejemplo,

```
carácterDeDígito 3 ⇝ '3'
```

```
carácterDeDígito   :: Int -> Char
carácterDeDígito n  = chr (n + ord '0')
```

Convesiones entre minúsculas y mayúsculas:

- `toUpper c` es el carácter `c` en mayúscula.
- `toLower c` es el carácter `c` en minúcula.
- Ejemplos:

```
toUpper 'a'           ↝ 'A'
toLower 'A'           ↝ 'a'
map toUpper "sevilla" ↝ "SEVILLA"
map toLower "SEVILLA" ↝ "sevilla"
```

Funciones del preludio específicas para cadenas

- `words c` es la lista de palabras de la cadena `c`. Por ejemplo,

```
Main> words "esto es una cadena"
["esto","es","una","cadena"]
```

- `lines c` es la lista de líneas de la cadena `c`. Por ejemplo,

```
Main> lines "primera linea\ny segunda"
["primera linea","y segunda"]
Main> words "primera linea\ny segunda"
["primera","linea","y","segunda"]
```

- `unwords` es la inversa de `words`. Por ejemplo,

```
Main> unwords ["esto","es","una","cadena"]
"esto es una cadena"
```

- `unlines` es la inversa de `lines`. Por ejemplo,

```
Main> unlines ["primera linea","y segunda"]
"primera linea\ny segunda\n"
```

2.4. Listas infinitas y evaluación perezosa

Listas infinitas

- `desde n` es la lista de los números enteros a partir de `n`. Por ejemplo,

```
desde 5 ↝ [5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,{Interrupted!}
```

se interrumpe con `Control-C`.

```
desde :: Int -> [Int]
desde n = n : desde (n+1)
```

Definición alternativa

```
desde' :: Int -> [Int]
desde' n = [n..]
```

Cálculos con listas infinitas

- Calcular la lista de los 10 primeros sucesores de 7:

```
Main> tail (take 11 (desde 7))
[8,9,10,11,12,13,14,15,16,17]
Main> tail (take 11 [7..])
[8,9,10,11,12,13,14,15,16,17]
```

- Calcular las potencias de 2 menores que 1000:

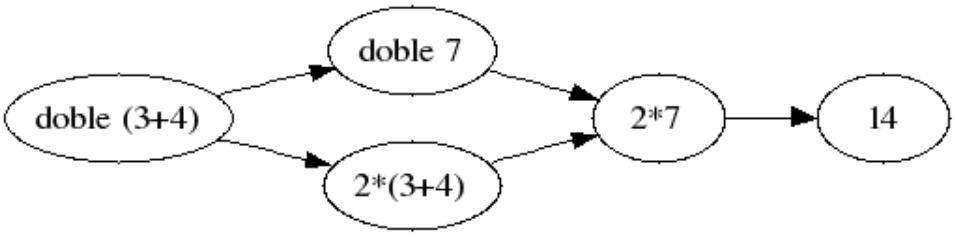
```
Main> takeWhile (<1000) (map (2^) (desde 1))
[2,4,8,16,32,64,128,256,512]
Main> takeWhile (<1000) (map (2^) [1..])
[2,4,8,16,32,64,128,256,512]
```

Evaluación perezosa

Se considera la siguiente definición

```
doble :: Int -> Int
doble x = 2*x
```

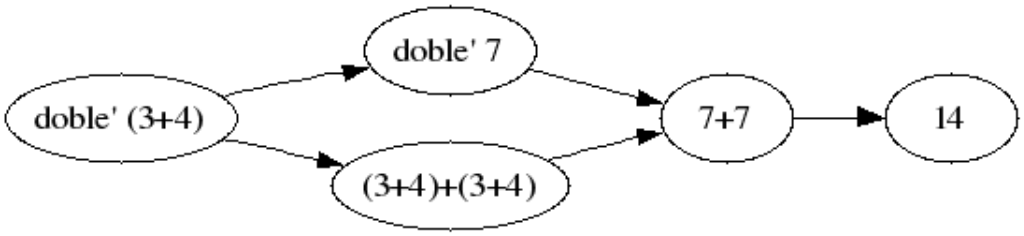
Entonces, las posibles evaluaciones de `doble (3+4)` son



Se considera la siguiente definición

```
doble' :: Int -> Int
doble' x = x+x
```

Entonces, las posibles evaluaciones de `doble' (3+4)` son



Notar que en la rama superior, `3+4` sólo se evalúa una vez.

Métodos de evaluación

- evaluación perezosa (en inglés "lazy evaluation"): se calcula una expresión parcial si realmente se necesita el valor para calcular el resultado.
- evaluación voraz (en inglés "eager evaluation"): se calcula el valor de los parámetros y se aplica la función a sus valores.
- Haskell usa evaluación perezosa.
- LISP, Scheme y ML usan evaluación voraz.

Ejemplo de ventaja de la evaluación perezosa

En el tema anterior, se definió `primo` mediante

```
primo x = divisores x == [1,x]
```

Al aplicar la definición sólo se calculan los dos primeros primos. Por ejemplo,

```
ED> :set +s
ED> primo 30
False
(108 reductions, 177 cells)
ED> primo 30000
False
(108 reductions, 177 cells)
```

Explicación del comportamiento perezoso de `==` y `&&`

- La regla recursiva de la definición de `==` es

  ```
  (x:xs) == (y:ys) =  x==y && xs==ys
  ```

  Si `x==y` es falsa, entonces también lo es `(x:xs) == (y:ys)`.

- La definición de `&&` es

  Prelude
  ```
  False && x   = False
  True  && x   = x
  ```

  Si el primer parámetro es falso, entonces la conjunción es falsa.

Cálculos infinitos

Las funciones que necesitan todos los elementos de una lista, no pueden aplicarse a listas infinitas. Por ejemplo,

```
Main> length (desde 1)
ERROR - Garbage collection fails to reclaim sufficient space

Main> head (desde 1)
1

Main> (desde 1) ++ [3]
[1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,,...Interrupted!

Main> last (desde 1)
ERROR - Garbage collection fails to reclaim sufficient space
```

Funciones sobre listas infinitas definidas en el preludio

- `[n..]` es equivalente a `desde n`.
- `repeat x` es una lista infinita con el único elemento `x`. Por ejemplo,

  ```
  Main> repeat 'a'
  "aaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaa{Interrupted!}
  ```

  ```
  repeat' :: a -> [a]
  repeat' x = x : repeat' x
  ```

  Una definición alternativa es

Prelude
```
repeat :: a -> [a]
repeat x  = xs where xs = x:xs
```

- `replicate n x` es una lista con `n` copias del elemento `x`. Por ejemplo,

```
Main> replicate 10 3
[3,3,3,3,3,3,3,3,3,3]
```

Prelude
```
replicate :: Int -> a -> [a]
replicate n x = take n (repeat x)
```

- `iterate f x` es la lista cuyo primer elemento es `x` y los siguientes elementos se calculan aplicando la función `f` al elemento anterior. Por ejemplo,

```
Main> iterate (+1) 3
[3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,{Interrupted!}
Main> iterate (*2) 1
[1,2,4,8,16,32,64,{Interrupted!}
Main> iterate (`div` 10) 1972
[1972,197,19,1,0,0,0,0,0,0,{Interrupted!}
```

Prelude
```
iterate :: (a -> a) -> a -> [a]
iterate f x = x : iterate f (f x)
```

Presentación de un número como cadena

- `deEnteroACadena n` es la cadena correspondiente al número entero `n`. Por ejemplo, `deEnteroACadena 1972` ⇝ `"1972"`

```
deEnteroACadena :: Int -> String
deEnteroACadena = map carácterDeDígito
                  . reverse
                  . map (`rem` 10)
                  . takeWhile (/= 0)
                  . iterate (`div` 10)
```

Ejemplo de cálculo

```
iterate (`div` 10) 1972                    ⇝ [1972,197,19,1,0,0,0,...
(takeWhile (/= 0) . iterate (`div` 10)) 1972 ⇝ [1972,197,19,1]
map (`rem` 10) [1972,197,19,1]             ⇝ [2,7,9,1]
reverse [2,7,9,1]                          ⇝ [1,9,7,2]
map carácterDeDígito [1,9,7,2]             ⇝ "1972"
```

- La función `deEnteroACadena` es un caso particular de `show`. Por ejemplo,

```
show 1972 ⇝ "1972"
```

Cálculo perezoso de la lista de los números primos

- `primos_por_criba` es la lista de los números primos mediante la criba de Erastótenes.

```
Main> primos_por_criba
[2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,{Interrupted!}
Main> take 10 primos_por_criba
[2,3,5,7,11,13,17,19,23,29]
```

```
primos_por_criba :: [Int]
primos_por_criba = map head (iterate eliminar [2..])
    where eliminar (x:xs) = filter (no_multiplo x) xs
          no_multiplo x y = y `mod` x /= 0
```

- Para ver el cálculo, consideramos la siguiente variación

```
primos_por_criba_aux =
    map (take 10) (iterate eliminar [2..])
    where eliminar (x:xs) = filter (no_multiplo x) xs
          no_multiplo x y = y `mod` x /= 0
```

Entonces,

```
Main> take 5 primos_por_criba_aux
[[ 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,10,11],
 [ 3, 5, 7, 9,11,13,15,17,19,21],
 [ 5, 7,11,13,17,19,23,25,29,31],
 [ 7,11,13,17,19,23,29,31,37,41],
 [11,13,17,19,23,29,31,37,41,43]]
```

- Definición con lista por comprensión:

```
primos_por_criba' :: [Int]
primos_por_criba' = criba [2..]
    where criba (p:xs) = p : criba [n | n<-xs,
                                        n `mod` p /= 0]
```

3. Tuplas

3.1. Uso de tuplas

Tuplas

- Una tupla consiste en un número fijo de valores, que están agrupados como una entidad.
- Ejemplos de uso de tuplas en modelizaciones:

```
punto      (3.5,4.2)               :: (Float, Float)
teléfono   ("Ana Pi", 954213465)   :: (String, Int)
precio     ("periódico", 1.9)      :: (String, Float)
vacía      ()                      :: ()
```

- Los valores pueden ser de diferentes tipos.
- Las tuplas se anotan con paréntesis.
- Clases de tuplas:
  - Un par es una tupla con dos elementos.
  - Una terna es una tupla con tres elementos.
  - La tupla vacía es la tupla sin elementos.

Funciones del preludio sobre tuplas

- `fst p` es la primera componente del par `p`. Por ejemplo,

```
fst (3,2) ⇝ 3
```

Prelude

```
fst :: (a,b) -> a
fst (x,_) = x
```

- `snd p` es la segunda componente del par `p`. Por ejemplo,

```
snd (3,2) ⇝ 2
```

Prelude

```
snd :: (a,b) -> b
snd (_,y) = y
```

Definición de funciones sobre tuplas

- `fst3 t` es la primera componente de la terna `t`.
- `snd3 t` es la segund componente de la terna `t`.
- `thd3 t` es la tercera componente de la terna `t`.
- Ejemplos:

```
fst3 (3,2,5) ⇝ 3
snd3 (3,2,5) ⇝ 2
thd3 (3,2,5) ⇝ 5
```

```
fst3 :: (a,b,c) -> a
fst3 (x,_,_) = x
snd3 :: (a,b,c) -> b
snd3 (_,y,_) = y
thd3 :: (a,b,c) -> c
thd3 (_,_,z) = z
```

- `variable p` es la cadena correspondiente al par `p` formado por un carácter y un número. Por ejemplo,

```
variable ('x',3) ⇝ "x3"
```

```
variable (c,n) = [c] ++ show n
```

```
Main> :type variable
variable :: Show a => (Char,a) -> [Char]
```

- `distanciaL p` es la distancia del punto `p`, representado mediante listas, al origen. Por ejemplo,

```
distanciaL [3.0,4.0] ⇝ 5.0
```

```
distanciaL :: [Float] -> Float
distanciaL [x,y] = sqrt (x*x+y*y)
```

- `distanciaT p` es la distancia del punto `p`, representado mediante tuplas, al origen. Por ejemplo,

```
distanciaT (3.0,4.0) ⇝ 5.0
```

```
distanciaT :: (Float, Float) -> Float
distanciaT (x,y) = sqrt (x*x+y*y)
```

Ejemplo de uso de tupla para devolver varios resultados

- `splitAt n l` es el par formado por la lista de los `n` primeros elementos de la lista `l` y la lista `l` sin los `n` primeros elementos. Por ejemplo,

```
splitAt 3 [5,6,7,8,9,2,3] ⇝ ([5,6,7],[8,9,2,3])
splitAt 4 "sacacorcho"    ⇝ ("saca","corcho")
```

Prelude

```
splitAt :: Int -> [a] -> ([a], [a])
splitAt n xs | n <= 0  = ([],xs)
splitAt _ []           = ([],[])
splitAt n (x:xs)       = (x:xs',xs'')
    where (xs',xs'') = splitAt (n-1) xs
```

- Definición alternativa

```
splitAt_alt :: Int -> [a] -> ([a], [a])
splitAt_alt n xs  = (take n xs, drop n xs)
```

- La definición alternativa es un poco menos eficiente, Por ejemplo,

```
Main> :s +s
Main> splitAt_alt 3 [5,6,7,8,9,2,3]
([5,6,7],[8,9,2,3])
(228 reductions, 330 cells)
Main> splitAt 3 [5,6,7,8,9,2,3]
([5,6,7],[8,9,2,3])
(176 reductions, 283 cells)
```

Ejemplo de uso de tupla para aumentar la eficiencia

- `incmin l` es la lista obtenida añadiendo a cada elemento de `l` el menor elemento de `l`. Por ejemplo,

```
incmin [3,1,4,1,5,9,2,6] ⇝ [4,2,5,2,6,10,3,7]
```

```
incmin :: [Int] -> [Int]
incmin l = map (+e) l
           where e               = mínimo l
                 mínimo [x]      = x
                 mínimo (x:y:xs) = min x (mínimo (y:xs))
```

- Con la definición anterior se recorre la lista dos veces: una para calcular el mínimo y otra para sumarlo.
- Con la siguiente definición la lista se recorre sólo una vez.

```
incmin' :: [Int] -> [Int]
incmin' [] = []
incmin' l = nuevalista
    where (minv, nuevalista) = un_paso l
          un_paso [x]        = (x, [x+minv])
          un_paso (x:xs)     = (min x y, (x+minv):ys)
                               where (y,ys) = un_paso xs
```

3.2. Listas y tuplas

Listas de asociación

- Una lista de asociación es una lista de pares. Los primeros elementos son las claves y los segundos son los valores.
- `buscar z l` es el valor del primer elemento de la lista de asociación `l` cuya clave es `z`. Por ejemplo,

```
buscar 'b' [('a',1),('b',2),('c',3),('b',4)] ⇝ 2
```

```
buscar :: Eq a => a -> [(a,b)] -> b
buscar z ((x,y):r)
 | x == z    = y
 | otherwise = buscar z r
```

Funciones de agrupamiento

- `zip x y` es el producto cartesiano de `x` e `y`. Por ejemplo,

```
zip [1,2,3] "abc" ⇝ [(1,'a'),(2,'b'),(3,'c')]
zip [1,2] "abc"   ⇝ [(1,'a'),(2,'b')]
```

- `zipWith f x y` es la lista obtenida aplicando la función `f` a los elementos correspondientes de las listas `x` e `y`. Por ejemplo,

```
zipWith (+) [1,2,3] [4,5,6] ⇝ [5,7,9]
zipWith (*) [1,2,3] [4,5,6] ⇝ [4,10,18]
```

Prelude
```
zipWith :: (a->b->c) -> [a]->[b]->[c]
zipWith f (a:as) (b:bs) = f a b : zipWith f as bs
zipWith _ _      _      = []

zip :: [a] -> [b] -> [(a,b)]
zip = zipWith  (\a b -> (a,b))
```

- Definición alternativa de `zip` sin función anónima:

```
zip_alt_1 = zipWith emparejar
    where emparejar a b = (a,b)
```

- Definición recursiva de `zip`:

```
zip_alt_2 (a:as) (b:bs) = (a,b) : zip_alt_2 as bs
zip_alt_2 _      _      = []
```

Definiciones con `zip`: Posiciones

- `posiciones xs` es la lista de los pares formados por los elementos de `xs` junto con su posición. Por ejemplo,

  `posiciones [3,5,2,5]` $\leadsto$ `[(3,1),(5,2),(2,3),(5,4)]`

```
posiciones :: [a] -> [(a,Int)]
posiciones xs = zip xs [1..length xs]
```

- `posición x ys` es la posición del elemento `x` en la lista `ys`. Por ejemplo,

  `posición 5 [1,5,3]` $\leadsto$ `2`

```
posición :: Eq a => a -> [a] -> Int
posición x xs = buscar x (posiciones xs)
```

Definiciones con `zip`: Fibonacci

- `fibs` es la sucesión de los números de Fibonacci. Por ejemplo,

  `take 10 fibs` $\leadsto$ `[1,1,2,3,5,8,13,21,34,55]`

```
fibs = 1 : 1 : [a+b | (a,b) <- zip fibs (tail fibs)]
```

3.3. Tuplas y currificación

Formas cartesiana y currificada

- Una función está en forma cartesiana si su argumento es una tupla. Por ejemplo,

```
suma_cartesiana :: (Int,Int) -> Int
suma_cartesiana (x,y)  = x+y
```

- En cambio, la función

```
suma_currificada :: Int -> Int -> Int
suma_currificada x y  = x+y
```

  está en forma currificada.

- `curry f` es la versión currificada de la función `f`. Por ejemplo,

```
curry suma_cartesiana 2 3 ⇝ 5
```

Prelude

```
curry :: ((a,b) -> c) -> (a -> b -> c)
curry f x y = f (x,y)
```

- `uncurry f` es la versión cartesiana de la función `f`. Por ejemplo,

```
uncurry suma_currificada (2,3) ⇝ 5
```

Prelude

```
uncurry     :: (a -> b -> c) -> ((a,b) -> c)
uncurry f p  = f (fst p) (snd p)
```

4. Tipos de datos definidos

4.1. Definiciones de tipos

Definiciones de tipos con `type`

- Un punto es un par de números reales. Por ejemplo,

```
(3.0,4.0) :: Punto
```

```
type Punto = (Float, Float)
```

- `distancia_al_origen p` es la distancia del punto `p` al origen. Por ejemplo,

  ```
  distancia_al_origen (3,4) ⇝ 5.0
  ```

  ```
  distancia_al_origen :: Punto -> Float
  distancia_al_origen (x,y) = sqrt (x*x+y*y)
  ```

- `distancia p1 p2` es la distancia entre los puntos `p1` y `p2`. Por ejemplo,

  ```
  distancia (2,4) (5,8) ⇝ 5.0
  ```

  ```
  distancia :: Punto -> Punto -> Float
  distancia (x,y) (x',y') = sqrt((x-x')^2+(y-y')^2)
  ```

- Un camino es una lista de puntos. Por ejemplo,

  ```
  [(1,2),(4,6),(7,10)] :: Camino
  ```

  ```
  type Camino = [Punto]
  ```

- `longitud_camino c` es la longitud del camino `c`. Por ejemplo,

  ```
  longitud_camino [(1,2),(4,6),(7,10)] ⇝ 10.0
  ```

- Definición recursiva:

  ```
  longitud_camino :: Camino -> Float
  longitud_camino [_] = 0
  longitud_camino (p:q:xs) =
      (distancia p q) + (longitud_camino (q:xs))
  ```

- Definición no recursiva:

  ```
  longitud_camino' :: Camino -> Float
  longitud_camino' xs =
      sum [distancia p q |
           (p,q) <- zip (init xs) (tail xs)]
  ```

  Evaluación paso a paso:

  ```
  longitud_camino [(1,2),(4,6),(7,10)]
  = sum [distancia p q | (p,q) <- zip (init [(1,2),(4,6),(7,10)])
                                      (tail [(1,2),(4,6),(7,10)])]
  = sum [distancia p q | (p,q) <- zip [(1,2),(4,6)] [(4,6),(7,10)]]
  = sum [distancia p q | (p,q) <- [((1,2),(4,6)),((4,6),(7,10))]]
  = sum [5.0,5.0]
  = 10
  ```

4.2. Números racionales

Números racionales

- En esta sección se presentan los números racionales como una aplicación de tuplas y definición de tipos.
- Un número racional es un par de enteros

```
type Racional = (Int, Int)
```

- Ejemplos de números racionales:

```
qCero   = (0,1)
qUno    = (1,1)
qDos    = (2,1)
qTres   = (3,1)
qMedio  = (1,2)
qTercio = (1,3)
qCuarto = (1,4)
```

- `simplificar x` es el número racional `x` simplificado. Por ejemplo,

```
simplificar (12,24)   ⇝ (1,2)
simplificar (12,-24)  ⇝ (-1,2)
simplificar (-12,-24) ⇝ (1,2)
simplificar (-12,24)  ⇝ (-1,2)
```

```
simplificar (n,d) =
    (((signum d)*n) `div` m, (abs d) `div` m)
    where m = gcd n d
```

- `gcd x y` es el máximo común divisor de `x` e `y`. Por ejemplo,

```
gcd 6 15 ⇝ 3
```

Prelude

```
gcd 0 0  = error "Prelude.gcd: gcd 0 0 is undefined"
gcd x y  = gcd' (abs x) (abs y)
           where gcd' x 0 = x
                 gcd' x y = gcd' y (x `rem` y)
```

- Definición alternativa

```
gcd_alt x y = last (filter (divisible y') (divisores x'))
              where x'             = abs x
                    y'             = abs y
                    divisores x    = filter (divisible x) [1..x]
                    divisible x y  = x `rem` y == 0
```

- Operaciones con números racionales. Por ejemplo,

```
qMul (1,2) (2,3) ⇝ (1,3)
qDiv (1,2) (1,4) ⇝ (2,1)
qSum (1,2) (3,4) ⇝ (5,4)
qRes (1,2) (3,4) ⇝ (-1,4)
```

```
qMul, qDiv, qSum, qRes :: Racional -> Racional -> Racional
qMul (x1,y1) (x2,y2) = simplificar (x1*x2, y1*y2)
qDiv (x1,y1) (x2,y2) = simplificar (x1*y2, y1*x2)
qSum (x1,y1) (x2,y2) = simplificar (x1*y2+y1*x2, y1*y2)
qRes (x1,y1) (x2,y2) = simplificar (x1*y2-y1*x2, y1*y2)
```

- `escribeRacional x` es la cadena correspodiente al número racional `x`. Por ejemplo,

```
escribeRacional (10,12)            ⇝ "5/6"
escribeRacional (12,12)            ⇝ "1"
escribeRacional (qMul (1,2) (2,3)) ⇝ "1/3"
```

```
escribeRacional :: Racional -> String
escribeRacional (x,y)
    | y' == 1   = show x'
    | otherwise = show x' ++ "/" ++ show y'
    where (x',y') = simplificar (x,y)
```

4.3. Tipo de dato definido: Árboles

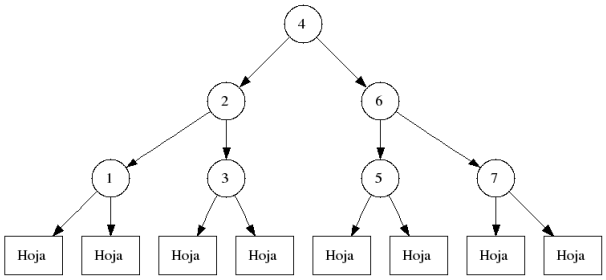
Tipo de dato definido: Árboles

- Un árbol de tipo `a` es una hoja de tipo `a` o es un nodo de tipo `a` con dos hijos que son árboles de tipo `a`.

```
data Árbol a = Hoja
             | Nodo a (Árbol a) (Árbol a)
               deriving Show
```

  - El nombre del tipo de datos es `Árbol`
  - Las funciones constructoras son `Hoja` y `Nodo`

- El nombre del tipo de dato y de sus funciones constructoras tienen que empezar por mayúscula.
- Ejemplo de árbol: El árbol de la figura



se representa por

```
ejÁrbol_1 = Nodo 4 (Nodo 2 (Nodo 1 Hoja Hoja)
                           (Nodo 3 Hoja Hoja))
                   (Nodo 6 (Nodo 5 Hoja Hoja)
                           (Nodo 7 Hoja Hoja))
```

Definición de funciones sobre árboles

- Las funciones sobre árboles se pueden definir mediante análisis de patrones con las funciones constructoras.
- `tamaño a` es el tamaño del árbol `a`; es decir, el número de nodos internos. Por ejemplo,

```
tamaño ejÁrbol_1 ⇝ 7
```

```
tamaño :: Árbol a -> Int
tamaño Hoja           = 0
tamaño (Nodo x a1 a2) = 1 + tamaño a1 + tamaño a2
```

Otras formas de árboles

- Árboles cuyos elementos no están en los nodos (como en `Árbol`), sino que están solamente en las hojas:

```
data Árbol2 a = Nodo2 (Árbol2 a) (Árbol2 a)
              | Fin2 a
```

- Árboles con información del tipo `a` en los nodos, e información del tipo `b` en las hojas:

```
data Árbol3 a b = Nodo3 a (Árbol3 a b) (Árbol3 a b)
                | Fin3 b
```

- Árboles que se dividen en tres en los nodos, y no en dos:

```
data Árbol4 a = Nodo4 a (Árbol4 a) (Árbol4 a) (Árbol4 a)
              | Fin4
```

- Árboles cuyo número de ramas bifurcadas de un nodo son variables:

```
data Árbol5 a = Nodo5 a [Árbol5 a]
```

- Árboles cuyos nodos solamente tienen una rama bifurcada:

```
data Árbol6 a = Nodo6 a (Árbol6 a)
              | Fin6
```

- Árboles con diferentes tipos de nodos:

```
data Árbol7 a b = Nodo7a Int a (Árbol7 a b) (Árbol7 a b)
                | Nodo7b Char (Árbol7 a b)
                | Fin7a b
                | Fin7b Int
```

4.4. Árboles de búsqueda

Búsqueda en listas

- Búsqueda en lista: `elem e l` se verifica si `e` es un elemento de `l`.
- Búsqueda en lista ordenada: `elem_ord e l` se verifica si `e` es un elemento de la lista ordenada `l`. Por ejemplo,

```
elem_ord 3 [1,3,5] ⇝ True
elem_ord 2 [1,3,5] ⇝ False
```

```
elem_ord :: Ord a => a -> [a] -> Bool
elem_ord _ []                   = False
elem_ord e (x:xs) | x < e       = elem_ord e xs
                  | x == e      = True
                  | otherwise   = False
```

Árbol de búsqueda

- Un árbol de búsqueda es un árbol binario en el que que todos los valores en el subárbol izquierdo son menores que el valor en el nodo mismo, y que todos los valores en el subárbol derecho son mayores. Por ejemplo, el `ejÁrbol_1` es un árbol de búsqueda.
- `elemÁrbol e x` se verifica si `e` es un elemento del árbol de búqueda `x`. Por ejemplo,

```
elemÁrbol 5 ejÁrbol_1 ⇝ True
elemÁrbol 9 ejÁrbol_1 ⇝ False
```

```
elemÁrbol :: Ord a => a -> Árbol a -> Bool
elemÁrbol e Hoja                    = False
elemÁrbol e (Nodo x izq der) | e==x = True
                             | e<x  = elemÁrbol e izq
                             | e>x  = elemÁrbol e der
```

Construcción de un árbol de búsqueda

- `insertaÁrbol e ab` inserta el elemento `e` en el árbol de búsqueda `ab`. Por ejemplo,

```
Main> insertaÁrbol 3 ejÁrbol_1
Nodo 4 (Nodo 2 (Nodo 1 Hoja Hoja)
               (Nodo 3 (Nodo 3 Hoja Hoja) Hoja))
       (Nodo 6 (Nodo 5 Hoja Hoja) (Nodo 7 Hoja Hoja))
```

```
insertaÁrbol :: Ord a => a -> Árbol a -> Árbol a
insertaÁrbol e Hoja = Nodo e Hoja Hoja
insertaÁrbol e (Nodo x izq der)
    | e <= x = Nodo x (insertaÁrbol e izq) der
    | e > x  = Nodo x izq (insertaÁrbol e der)
```

- `listaÁrbol l` es el árbol de búsqueda obtenido a partir de la lista `l`. Por ejemplo,

```
Main> listaÁrbol [3,2,4,1]
Nodo 1
     Hoja
     (Nodo 4
           (Nodo 2
                 Hoja
                 (Nodo 3 Hoja Hoja))
           Hoja)
```

```
listaÁrbol :: Ord a => [a] -> Árbol a
listaÁrbol = foldr insertaÁrbol Hoja
```

Ordenación mediante árboles de búsqueda

- `aplana ab` es la lista obtenida aplanando el árbol `ab`. Por ejemplo,

```
aplana (listaÁrbol [3,2,4,1]) ⇝ [1,2,3,4]
```

```
aplana :: Árbol a -> [a]
aplana Hoja             = []
aplana (Nodo x izq der) =
    aplana izq ++ [x] ++ aplana der
```

- `ordenada_por_árbol l` es la lista `l` ordenada mediante árbol de búsqueda. Por ejemplo,

```
ordenada_por_árbol [1,4,3,7,2] ⇝ [1,2,3,4,7]
```

```
ordenada_por_árbol :: Ord a => [a] -> [a]
ordenada_por_árbol = aplana . listaÁrbol
```

4.5. Usos especiales de definiciones de datos

Tipos finitos

- Un tipo finito es un tipo que contiene exactamente tantos elementos como funciones constructoras.
- Ejemplo de tipo finito:

```
data Dirección = Norte | Sur | Este | Oeste
```

- `mueve d p` es el punto obtenido moviendo el punto `p` una unidad en la dirección `d`. Por ejemplo,

```
mueve Sur (mueve Este (4,7)) ⇝ (5,6)
```

```
mueve :: Dirección -> (Int,Int) -> (Int,Int)
mueve Norte (x,y) = (x,y+1)
mueve Sur   (x,y) = (x,y-1)
mueve Este  (x,y) = (x+1,y)
mueve Oeste (x,y) = (x-1,y)
```

Unión de tipos

- Un entero–o–carácter es un objeto de la forma `Ent x`, donde `x` es un entero, o `Car y`, donde `y` es un carácter.

```
data Ent_o_Car = Ent Int | Car Char deriving Show
```

```
Main> :set +t
Main> Ent 3
Ent 3 :: Ent_o_Car
Main> Car 'd'
Car 'd' :: Ent_o_Car
Main> [Ent 3, Car 'd', Car 'e', Ent 7]
[Ent 3,Car 'd',Car 'e',Ent 7] :: [Ent_o_Car]
Main> :type Ent
Ent :: Int -> Ent_o_Car
Main> :type Car
Car :: Char -> Ent_o_Car
```

Tipos abstractos

- Un tipo abstracto consiste en una definición de datos y una serie de funciones que se pueden aplicar al tipo definido.
- Los racionales como tipo abstracto:

```
data Ratio =  Rac Int Int
```

- Los racionales se escriben en forma simplificada:

```
instance Show Ratio where
    show (Rac x 1) = show x
    show (Rac x y) = show x' ++ "/" ++ show y'
                     where (Rac x' y') = reduce (Rac x y)
```

- Ejemplos de números racionales:

```
rCero   = Rac 0 1
rUno    = Rac 1 1
rDos    = Rac 2 1
rTres   = Rac 3 1
rMedio  = Rac 1 2
rTercio = Rac 1 3
rCuarto = Rac 1 4
```

```
Main> :set +t
Main> rDos
2 :: Ratio
Main> rTercio
1/3 :: Ratio
```

- `reduce x` es el número racional `x` simplificado. Por ejemplo,

```
reduce (Rac  12  24) ⇝  1/2
reduce (Rac  12 -24) ⇝ -1/2
reduce (Rac -12 -24) ⇝  1/2
reduce (Rac -12  24) ⇝ -1/2
```

```
reduce :: Ratio -> Ratio
reduce (Rac n d) =
    Rac (((signum d)*n) `div` m) ((abs d) `div` m)
    where m = gcd n d
```

- Operaciones con números racionales. Por ejemplo,

```
rMul (Rac 1 2) (Rac 2 3) ⇝  1/3
rDiv (Rac 1 2) (Rac 1 4) ⇝  2
rSum (Rac 1 2) (Rac 3 4) ⇝  5/4
rRes (Rac 1 2) (Rac 3 4) ⇝ -1/4
```

```
rMul, rDiv, rSum, rRes :: Ratio -> Ratio -> Ratio
rMul (Rac a b) (Rac c d) = reduce (Rac (a*c) (b*d))
rDiv (Rac a b) (Rac c d) = reduce (Rac (a*d) (b*c))
rSum (Rac a b) (Rac c d) = reduce (Rac (a*d+b*c) (b*d))
rRes (Rac a b) (Rac c d) = reduce (Rac (a*d-b*c) (b*d))
```

Bibliografía

1. H. C. Cunningham (2007) *Notes on Functional Programming with Haskell*.
2. J. Fokker (1996) *Programación funcional*.
3. B.C. Ruiz, F. Gutiérrez, P. Guerrero y J. Gallardo (2004). *Razonando con Haskell (Un curso sobre programación funcional)*.
4. S. Thompson (1999) *Haskell: The Craft of Functional Programming*.
5. E.P. Wentworth (1994) *Introduction to Funcional Programming*.

Capítulo 4

Aplicaciones de programación funcional

Programación declarativa (2007–08)

Tema 4: Aplicaciones de programación funcional

José A. Alonso Jiménez

Índice

1. Funciones combinatorias

1.1. Segmentos y sublistas

Segmentos iniciales

- `iniciales l` es la lista de los segmentos iniciales de la lista `l`. Por ejemplo,

```
iniciales [2,3,4]   ⇝ [[],[2],[2,3],[2,3,4]]
iniciales [1,2,3,4] ⇝ [[],[1],[1,2],[1,2,3],[1,2,3,4]]
```

```
iniciales :: [a] -> [[a]]
iniciales []     = [[]]
iniciales (x:xs) = [] : [x:ys | ys <- iniciales xs]
```

Segmentos finales

- `finales l` es la lista de los segmentos finales de la lista `l`. Por ejemplo,

```
finales [2,3,4]   ⇝ [[2,3,4],[3,4],[4],[]]
finales [1,2,3,4] ⇝ [[1,2,3,4],[2,3,4],[3,4],[4],[]]
```

```
finales :: [a] -> [[a]]
finales []     = [[]]
finales (x:xs) = (x:xs) : finales xs
```

Segmentos

- `segmentos l` es la lista de los segmentos de la lista `l`. Por ejemplo,

```
Main> segmentos [2,3,4]
[[],[4],[3],[3,4],[2],[2,3],[2,3,4]]
Main> segmentos [1,2,3,4]
[[],[4],[3],[3,4],[2],[2,3],[2,3,4],[1],[1,2],[1,2,3],[1,2,3,4]]
```

```
segmentos :: [a] -> [[a]]
segmentos []     = [[]]
segmentos (x:xs) =
    segmentos xs ++ [x:ys | ys <- iniciales xs]
```

Sublistas

- `sublistas l` es la lista de las sublistas de la lista `l`. Por ejemplo,

```
Main> sublistas [2,3,4]
[[2,3,4],[2,3],[2,4],[2],[3,4],[3],[4],[]]
Main> sublistas [1,2,3,4]
[[1,2,3,4],[1,2,3],[1,2,4],[1,2],[1,3,4],[1,3],[1,4],[1],
 [2,3,4],    [2,3],  [2,4],  [2],  [3,4],  [3],  [4], []]
```

```
sublistas :: [a] -> [[a]]
sublistas []     = [[]]
sublistas (x:xs) = [x:ys | ys <- sub] ++ sub
                   where sub = sublistas xs
```

1.2. Permutaciones y combinaciones

Permutaciones

- `permutaciones l` es la lista de las permutaciones de la lista `l`. Por ejemplo,

```
Main> permutaciones [2,3]
[[2,3],[3,2]]
Main> permutaciones [1,2,3]
[[1,2,3],[1,3,2],[2,1,3],[2,3,1],[3,1,2],[3,2,1]]
```

- Definición recursiva:

```
permutaciones :: Eq a => [a] -> [[a]]
permutaciones [] = [[]]
permutaciones xs =
    [a:p | a <- xs, p <- permutaciones(xs \\ [a])]
```

- `xs \\ ys` es la lista de los elementos de `xs` que no pertenecen a `ys`. Para usarla, hay que importarla: `import Data.List ((\\))`

- Definición alternativa:

```
permutaciones' :: [a] -> [[a]]
permutaciones' []     = [[]]
permutaciones' (x:xs) = [zs | ys <- permutaciones' xs,
                              zs <- intercala x ys]
```

donde `intercala x l` es la lista de las listas obtenidas intercalando `x` entre los elementos de la lista `l`. Por ejemplo,

```
intercala 1 [2,3] ⇝ [[1,2,3],[2,1,3],[2,3,1]]
```

```
intercala :: a -> [a] -> [[a]]
intercala e []     = [[e]]
intercala e (x:xs) =
    (e:x:xs) : [(x:ys) | ys <- (intercala e xs)]
```

- La segunda definición es más eficiente. En efecto,

```
Main> :set +s
Main> permutaciones [1,2,3]
[[1,2,3],[1,3,2],[2,1,3],[2,3,1],[3,1,2],[3,2,1]]
(429 reductions, 812 cells)
Main> permutaciones' [1,2,3]
[[1,2,3],[2,1,3],[2,3,1],[1,3,2],[3,1,2],[3,2,1]]
(267 reductions, 485 cells)
```

Combinaciones

- `combinaciones n l` es la lista de las combinaciones `n`–arias de la lista `l`. Por ejemplo,

```
combinaciones 2 [1,2,3,4] ⇝ [[1,2],[1,3],[1,4],[2,3],[2,4],[3,4]]
```

- Definición mediante `sublistas`:

```
combinaciones :: Int -> [a] -> [[a]]
combinaciones n xs =
    [ys | ys <- sublistas xs, length ys == n]
```

- Definición directa:

```
combinaciones' :: Int -> [a] -> [[a]]
combinaciones' 0 _          = [[]]
combinaciones' _ []         = []
combinaciones' (n+1) (x:xs) =
    [x:ys | ys <- combinaciones' n xs] ++
    combinaciones' (n+1) xs
```

- Comparación de eficiencia:

```
Main> combinaciones 1 [1..10]
[[1],[2],[3],[4],[5],[6],[7],[8],[9],[10]]
(42363 reductions, 52805 cells)
Main> combinaciones' 1 [1..10]
[[1],[2],[3],[4],[5],[6],[7],[8],[9],[10]]
(775 reductions, 1143 cells)
```

1.3. El patrón alias `@`

El patrón alias `@`

- Definición de `finales` con patrones:

```
finales_1 []     = [[]]
finales_1 (x:xs) = (x:xs) : finales_1 xs
```

- Definición de `finales` con selectores:

```
finales_2 [] = [[]]
finales_2 xs = xs : finales_2 (tail xs)
```

- Definición de `finales` con alias::

```
finales_3 []       = [[]]
finales_3 l@(x:xs) = l : finales_3 xs
```

- El patrón `l@(x:xs)` se lee "`l` como `x:xs`".

Definición con alias

- `dropWhile p l` es la lista `l` sin los elementos iniciales que verifican el predicado `p`. Por ejemplo,

```
dropWhile even [2,4,6,7,8,9] ⇝ [7,8,9]
```

Prelude

```
dropWhile :: (a -> Bool) -> [a] -> [a]
dropWhile p []        = []
dropWhile p ys@(x:xs)
    | p x             = dropWhile p xs
    | otherwise       = ys
```

2. Rompecabezas lógicos

2.1. El problema de las reinas

El problema de las N reinas

- Enunciado: Colocar N reinas en un tablero rectangular de dimensiones N por N de forma que no se encuentren más de una en la misma línea: horizontal, vertical o diagonal.
- El problema se representa en el módulo `Reinas`. Importa la diferencia de conjuntos `(\\)` del módulo `List`:

```
module Reinas where
import Data.List ((\\))
```

- El tablero se representa por una lista de números que indican las filas donde se han colocado las reinas. Por ejemplo, `[3,5]` indica que se han colocado las reinas `(1,3)` y `(2,5)`.

```
type Tablero = [Int]
```

- `reinas n` es la lista de soluciones del problema de las N reinas. Por ejemplo, `reinas 4` ⇝`[[3,1,4,2],[2,4,1,3]]`. La primera solución `[3,1,4,2]` se interpreta como [1ex]

	R		
			R
R			
		R	

[1ex]

```
reinas :: Int -> [Tablero]
reinas n = aux n
    where aux 0     = [[]]
          aux (m+1) = [r:rs | rs <- aux m,
                              r <- ([1..n] \\ rs),
                              noAtaca r rs 1]
```

- `noAtaca r rs d` se verifica si la reina `r` no ataca a niguna de las de la lista `rs` donde la primera de la lista está a una distancia horizontal `d`.

```
noAtaca :: Int -> Tablero -> Int -> Bool
noAtaca _ [] _ = True
noAtaca r (a:rs) distH = abs(r-a) /= distH &&
                         noAtaca r rs (distH+1)
```

- Esta solución está basada en [**?**] p. 95.

2.2. Números de Hamming

Números de Hamming

- Enunciado: Los números de Hamming forman una sucesión estrictamente creciente de números que cumplen las siguientes condiciones:
  1. El número 1 está en la sucesión.
  2. Si x está en la sucesión, entonces $2x$, $3x$ y $5x$ también están.
  3. Ningún otro número está en la sucesión.
- `hamming` es la sucesión de Hamming. Por ejemplo,

```
take 12 hamming ⇝ [1,2,3,4,5,6,8,9,10,12,15,16]
```

```
hamming :: [Int]
hamming = 1 : mezcla3 [2*i | i <- hamming]
                      [3*i | i <- hamming]
                      [5*i | i <- hamming]
```

- `mezcla3 xs ys zs` es la lista obtenida mezclando las listas ordenadas `xs`, `ys` y `zs` y eliminando los elementos duplicados. Por ejemplo,

```
Main> mezcla3 [2,4,6,8,10] [3,6,9,12] [5,10]
[2,3,4,5,6,8,9,10,12]
```

```
mezcla3 :: [Int] -> [Int] -> [Int] -> [Int]
mezcla3 xs ys zs = mezcla2 xs (mezcla2 ys zs)
```

- `mezcla2 xs ys zs` es la lista obtenida mezclando las listas ordenadas `xs` e `ys` y eliminando los elementos duplicados. Por ejemplo,

```
Main> mezcla2 [2,4,6,8,10,12] [3,6,9,12]
[2,3,4,6,8,9,10,12]
```

```
mezcla2 :: [Int] -> [Int] -> [Int]
mezcla2 p@(x:xs) q@(y:ys) | x < y     = x:mezcla2 xs q
                          | x > y     = y:mezcla2 p  ys
                          | otherwise = x:mezcla2 xs ys
mezcla2 []       ys                   = ys
mezcla2 xs       []                   = xs
```

3. Búsqueda en grafos

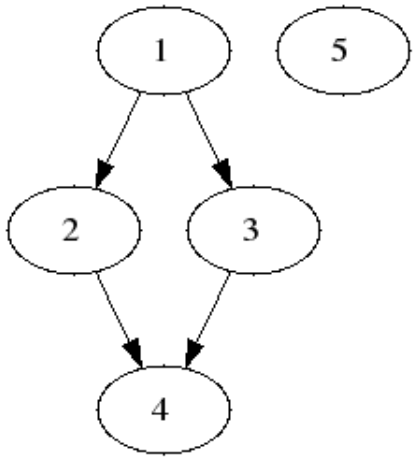
3.1. Búsqueda en profundidad grafos

Representación de grafos

- Un grafo de tipo `v` es un tipo de datos compuesto por la lista de vértices y la función que asigna a cada vértice la lista de sus sucesores.

```
data Grafo v = G [v] (v -> [v])
```

- `ej_grafo` es la representación del grafo




```
ej_grafo = G [1..5] suc
    where suc 1 = [2,3]
          suc 2 = [4]
          suc 3 = [4]
          suc _ = []
```

Búsqueda de los caminos en un grafo

- `caminosDesde g o te vis` es la lista de los caminos en el grafo `g` desde el vértice origen `o` hasta vértices finales (i.e los que verifican el test de encontrado `te`) sin volver a pasar por los vértices visitados `vis`. Por ejemplo,

```
caminosDesde ej_grafo 1 (==4) [] ⇝ [[4,2,1],[4,3,1]]
```

```
caminosDesde :: Eq a => Grafo a -> a -> (a -> Bool) -> [a] -> [[a]]
caminosDesde g o te vis
```

```
    | te o      = [o:vis]
    | otherwise = concat [caminosDesde g o' te (o:vis)
                          | o' <- suc o,
                            notElem o' vis]
    where G _ suc = g
```

- `camino g u v` es un camino (i.e una lista de vértices tales que cada uno es un sucesor del anterior) en el grafo `g` desde el vértice `u` al `v`. Por ejemplo,

```
camino ej_grafo 1 4 ⇝ [4,2,1]
```

```
camino :: Eq a => Grafo a -> a -> a -> [a]
camino g u v = head (caminosDesde g u (== v) [])
```

1. H. C. Cunningham (2007) *Notes on Functional Programming with Haskell*.
2. J. Fokker (1996) *Programación funcional*.
3. B.C. Ruiz, F. Gutiérrez, P. Guerrero y J. Gallardo (2004). *Razonando con Haskell (Un curso sobre programación funcional)*.
4. S. Thompson (1999) *Haskell: The Craft of Functional Programming*.
5. E.P. Wentworth (1994) *Introduction to Funcional Programming*.

Capítulo 5

Razonamiento sobre programas

Programación declarativa (2007–08)

Tema 5: Razonamiento sobre programas

José A. Alonso Jiménez

Índice

1. Razonamiento ecuacional

1.1. Cálculo con `longitud`

Cálculo con `longitud`

- Programa:

```
longitud []     = 0                 -- longitud.1
longitud (_:xs) = 1 + longitud xs   -- longitud.2
```

- Propiedad: `longitud [2,3,1] = 3`
- Demostración:

```
  longitud [2,3,1]
= 1 + longitud [2,3]          [por longitud.2]
= 1 + (1 + longitud [3])      [por longitud.2]
= 1 + (1 + (1 + longitud []))  [por longitud.2]
= 1 + (1 + (1 + 0)            [por longitud.1]
= 3
```

1.2. Propiedad de `intercambia`

Propiedad de `intercambia`

- Programa:

```
intercambia :: (a,b) -> (b,a)
intercambia (x,y) = (y,x)       -- intercambia
```

- Propiedad:
  $(\forall x :: a)(\forall y :: b) intercambia(intercambia(x,y)) = (x,y)$.
- Demostración:

```
  intercambia (intercambia (x,y))
= intercambia (y,x)             [por intercambia]
= (x,y)                         [por intercambia]
```

2. Razonamiento por inducción sobre listas

2.1. Esquema de inducción sobre listas

Esquema de inducción sobre listas

Para demostrar que todas las listas finitas tienen una propiedad `P` basta probar:

1. Caso base `xs=[]`:
   `P([])`.

2. Caso inductivo `xs=(y:ys)`:
   Suponiendo `P(ys)` demostrar `P(y:ys)`.

2.2. Asociatividad de ++

Asociatividad de ++

- Programa:

Prelude
```
(++) :: [a] -> [a] -> [a]
[]     ++ ys = ys              -- ++.1
(x:xs) ++ ys = x : (xs ++ ys) -- ++.2
```

- Propiedad: $(\forall xs, ys, zs :: [a])$`xs++(ys++zs)=(xs++ys)++zs`

- Comprobación con QuickCheck:

```
prop_asociatividad_conc :: [Int] -> [Int] -> [Int] -> Bool
prop_asociatividad_conc xs ys zs =
    xs++(ys++zs)==(xs++ys)++zs
```

```
Main> quickCheck prop_asociatividad_conc
OK, passed 100 tests.
```

- Demostración por inducción en `xs`:

  - Caso base `xs=[]`: Reduciendo el lado izquierdo

    `xs++(ys++zs)`
    = `[]++(ys++zs)` [por hipótesis]
    = `ys++zs` [por `++.1`]

    y reduciendo el lado derecho

    `(xs++ys)++zs`
    `([]++ys)++zs` [por hipótesis]
    `ys++zs` [por `++.1`]

    Luego, `xs++(ys++zs)=(xs++ys)++zs`

- Demostración por inducción en `xs`:

- Caso inductivo `xs=a:as`: Suponiendo la hipótesis de inducción
  `as++(ys++zs)=(as++ys)++zs` hay que demostrar que
  `(a:as)++(ys++zs)=((a:as)++ys)++zs`

```
(a:as)++(ys++zs)
= a:(as++(ys++zs))        [por ++.2]
= a:((as++ys)++zs)        [por hip. de inducción]
= (a:(as++ys))++zs        [por ++.2]
= ((a:as)++ys)++zs        [por ++.2]
```

2.3. `[]` es la identidad para `++` por la derecha

`[]` es la identidad para `++` por la derecha

- Propiedad: $(\forall xs :: [a])$`xs++[]=xs`
- Comprobación con QuickCheck:

```
prop_identidad_concatenación :: [Int] -> Bool
prop_identidad_concatenación xs = xs++[] == xs
```

```
Main> quickCheck prop_identidad_concatenación
OK, passed 100 tests.
```

- Demostración por inducción en `xs`:
  - Caso base `xs=[]`:

```
= []++[]
= []              [por ++.1]
```

  - Caso inductivo `xs=(a:as)`: Suponiendo la hipótesis de inducción
    `as++[]=as` hay que demostrar que
    `(a:as)++[]=(a:as)`

```
(a:as)++[]
= a:(as++[])      [por ++.2]
= a:as            [por hip. de inducción]
```

2.4. Relación entre `length` y `++`

Relación entre `length` y `++`

- Programas:

```
length :: [a] -> Int
length []     = 0                  -- length.1
length (x:xs) = 1 + n_length xs    -- length.2

(++) :: [a] -> [a] -> [a]
[]     ++ ys = ys                  -- ++.1
(x:xs) ++ ys = x : (xs ++ ys)      -- ++.2
```

- Propiedad: $(\forall xs, ys :: [a])$`length(xs++ys)=(length xs)+(length ys)`
- Comprobación con QuickCheck:

```
prop_length_append :: [Int] -> [Int] -> Bool
prop_length_append xs ys = length(xs++ys)==(length xs)+(length ys)
```

```
Main> quickCheck prop_length_append
OK, passed 100 tests.
```

- Demostración por inducción en `xs`:
  - Caso base `xs=[]`:

    `length([]++ys)`
    `= length ys` [por `++.1`]
    `= 0+(length ys)` [por aritmética]
    `= (length [])+(length ys)` [por `length.1`]

- Demostración por inducción en `xs`:
  - Caso inductivo `xs=(a:as)`: Suponiendo la hipótesis de inducción
    `length(as++ys) = (length as)+(length ys)`
    hay que demostrar que
    `length((a:as)++ys) = (length (a:as))+(length ys)`

    `length((a:as)++ys)`
    `= length(a:(as++ys))` [por `++.2`]
    `= 1 + length(as++ys)` [por `length.2`]
    `= 1 + ((length as) + (length ys))` [por hip. de inducción]
    `= (1 + (length as)) + (length ys)` [por aritmética]
    `= (length (a:as)) + (length ys)` [por `length.2`]

2.5. Relación entre `take` y `drop`

Relación entre `take` y `drop`

- Programas:

```
take :: Int -> [a] -> [a]
take 0 _       = []                  -- take.1
take _ []      = []                  -- take.2
take n (x:xs)  = x : take (n-1) xs   -- take.3

drop :: Int -> [a] -> [a]
drop 0 xs      = xs                  -- drop.1
drop _ []      = []                  -- drop,2
drop n (_:xs)  = drop (n-1) xs       -- drop.3

(++) :: [a] -> [a] -> [a]
[]     ++ ys = ys                    -- ++.1
(x:xs) ++ ys = x : (xs ++ ys)        -- ++.2
```

- Propiedad: $(\forall n :: Nat, xs :: [a])$`take n xs ++ drop n xs = xs`
- Comprobación con QuickCheck:

```
prop_take_drop :: Int -> [Int] -> Property
prop_take_drop n xs =
    n >= 0 ==> take n xs ++ drop n xs == xs
```

```
Main> quickCheck prop_take_drop
OK, passed 100 tests.
```

- Demostración por inducción en `n`:
  - Caso base `n=0`:
    `take 0 xs ++ drop 0 xs`
    `= [] ++ xs` [por `take.1` y `drop.1`]
    `= xs` [por `++.1`]
  - Caso inductivo `n=m+1`: Suponiendo la hipótesis de inducción 1
    $(\forall xs :: [a])$`take m xs ++ drop m xs = xs`
    hay que demostrar que
    $(\forall xs :: [a])$`take (m+1) xs ++ drop (m+1) xs = xs`

Lo demostraremos por inducción en `xs`:

- Caso base `xs=[]`:
  ```
  take (m+1) [] ++ drop (m+1) []
  = [] ++ []                          [por take.2 y drop.2]
  = []                                [por ++.1]
  ```

- Caso inductivo `xs=(a:as)`: Suponiendo la hipótesis de inducción 2
  ```
  take (m+1) as ++ drop (m+1) as = as
  ```
  hay que demostrar que
  ```
  take (m+1) (a:as) ++ drop (m+1) (a:as) = (a:as)
  ```
  ```
  take (m+1) (a:as) ++ drop (m+1) (a:as)
  = (a:(take m as)) ++ (drop m as)        [por take.3 y drop.3]
  = (a:((take m as) ++ (drop m as))       [por ++.2]
  = a:as                                  [por hip. de ind. 1]
  ```

2.6. La concatenación de listas vacías es vacía

La concatenación de listas vacías es vacía

- Programas:

Prelude
```
null :: [a] -> Bool
null []           = True            -- null.1
null (_:_)        = False           -- null.2

(++) :: [a] -> [a] -> [a]
[]     ++ ys      = ys              -- (++).1
(x:xs) ++ ys      = x : (xs ++ ys)  -- (++).2
```

- Propiedad: $\forall(xs :: [a])$`null xs = null (xs ++ xs).`

- Demostración por inducción en `xs`:

  - Caso 1: `xs = []`: Reduciendo el lado izquierdo
    ```
    null xs
    = null []        [por hipótesis]
    = True           [por null.1]
    ```
    y reduciendo el lado derecho
    ```
    null (xs ++ xs)
    = null ([] ++ [])       [por hipótesis]
    = null []               [por (++).1]
    = True                  [por null.1]
    ```
    Luego, `null xs = null (xs ++ xs).`

- Demostración por inducción en `xs`:
  - Caso `xs = (y:ys)`: Reduciendo el lado izquierdo

    ```
    null xs
    = null (y:ys)        [por hipótesis]
    = False              [por null.2
    ```

    y reduciendo el lado derecho

    ```
    null (xs ++ xs)
    = null ((y:ys) ++ (y:ys))        [por hipótesis]
    = null (y:(ys ++ (y:ys))         [por (++).2]
    = False                          [por null.2
    ```

    Luego, `null xs = null (xs ++ xs)`.

2.7. Relación entre `sum` y `map`

Relación entre `sum` y `map`

- Programas:

Prelude

```
sum :: [Int] -> Int
sum []     = 0                 -- sum.1
sum (x:xs) = x + sum xs        -- sum.2

map :: (a -> b) -> [a] -> [b]
map f []     = []              -- map.1
map f (x:xs) = f x : map f xs  -- map.2
```

- Propiedad: $\forall xs$`:: [Int] . sum (map (2*) xs) = 2 * sum xs`
- Comprobación con QuickCheck:

```
prop_sum_map :: [Int] -> Bool
prop_sum_map xs = sum (map (2*) xs) == 2 * sum xs
```

- Demostración por inducción en `xs`:
  - Caso `[]`: Reduciendo el lado izquierdo

```
sum (map (2*) xs)
= sum (map (2*) [])        [por hipótesis]
= sum [])                  [por map.1]
= 0                        [por sum.1]
```

y reduciendo el lado derecho

```
2 * sum xs
= 2 * sum []       [por hipótesis]
= 2 * 0            [por sum.1]
= 0                [por aritmética]
```

Luego, `sum (map (2*) xs) = 2 * sum xs`

- Demostración por inducción en `xs`:
  - Caso `xs=(y:ys)`: Entonces,

```
sum (map (2*) xs)
= sum (map (2*) (y:ys))              [por hipótesis]
= sum (2*) y : (map (2*) ys)         [por map.2]
= (2*) y + (sum (map (2*) ys))       [por sum.2]
= (2*) y + (2 * sum ys)              [por hip. de inducción]
= (2 * y) + (2 * sum ys)             [por (2*)]
= 2 * (y + sum ys)                   [por aritmética]
= 2 * sum (y:ys)                     [por sum.2]
= 2 * sum xs                         [por hipótesis]
```

3. Equivalencia de funciones

Equivalencia de funciones

- Programas:

```
inversa1. inversa2 :: [a] -> [a]
inversa1 []     = []                                    -- inversa1.1
inversa1 (x:xs) = inversa1 xs ++ [x]                    -- inversa1.2

inversa2 xs = inversa2Aux xs []                         -- inversa2.1
    where inversa2Aux []     ys = ys                    -- inversa2Aux.1
          inversa2Aux (x:xs) ys = inversa2Aux xs (x:ys)  -- inversa2Aux.2
```

- Propiedad: $(\forall xs :: [a])$`inversa1 xs = inversa2 xs`
- Comprobación con QuickCheck:

```
prop_equiv_inversa :: [Int] -> Bool
prop_equiv_inversa xs = inversa1 xs == inversa2 xs
```

- Demostración: Es consecuencia del siguiente lema:
  $(\forall xs, ys :: [a])$`inversa1 xs ++ ys = inversa2Aux xs ys`

  En efecto,

  ```
  inversa1 xs
  = inversa1 xs ++ []          [por identidad de ++]
  = inversa2Aux xs ++ []       [por el lema]
  = inversa2 xs                [por el inversa2.1]
  ```

- Demostración del lema: Por inducción en `xs`:

  - Caso base `xs=[]`:
    ```
    inversa1 [] ++ ys
    = [] ++ ys                 [por inversa1.1]
    = ys                       [por ++.1]
    = inversa2Aux [] ++ ys     [por inversa2Aux.1]
    ```

  - Caso inductivo `xs=(a:as)`: La hipótesis de inducción es
    $(\forall ys :: [a])$`inversa1 as ++ ys = inversa2Aux as ys`

    Por tanto,

    ```
    inversa1 (a:as) ++ ys
    = (inversa1 as ++ [a]) ++ ys       [por inversa1.2]
    = (inversa1 as) ++ ([a] ++ ys)     [por asociativa de ++]
    = (inversa1 as) ++ (a:ys)          [por ley unitaria]
    = (inversa2Aux as (a:ys)           [por hip. de inducción]
    = (inversa2Aux (a:as) ys           [por inversa2Aux.2]
    ```

Bibliografía

1. H. C. Cunningham (2007) *Notes on Functional Programming with Haskell*.
2. J. Fokker (1996) *Programación funcional*.
3. B.C. Ruiz, F. Gutiérrez, P. Guerrero y J. Gallardo (2004). *Razonando con Haskell (Un curso sobre programación funcional)*.
4. S. Thompson (1999) *Haskell: The Craft of Functional Programming*.
5. E.P. Wentworth (1994) *Introduction to Funcional Programming*.

Parte II

Programación lógica

Capítulo 6

Introducción a Prolog

Programación declarativa (2007–08)

Tema 6: Introducción a Prolog

José A. Alonso Jiménez

Índice

1. Introducción a la programación lógica

1.1. Objetivos de la programación lógica

Objetivos de la programación lógica

- Lógica como sistema de especificación y lenguaje de programación.
- Principios:
  - Programas = Teorías.
  - Ejecución = Búsqueda de pruebas.
  - Programación = Modelización.
- Prolog = Programming in Logic.
- Relaciones con otros campos:
  - Inteligencia artificial.
  - Sistemas basados en el conocimiento.

    - Procesamiento del lenguaje natural.
- Pensar declarativamente.

1.2. Declarativo vs. imperativo

Declarativo vs. imperativo

- Paradigmas:
    - Imperativo: Se describe *cómo* resolver el problema.
    - Declarativo: Se describe *qué* es el problema.
- Programas:
    - Imperativo: Una sucesión de instrucciones.
    - Declarativo: Un conjunto de sentencias.
- Lenguajes:
    - Imperativo: Pascal, C, Fortran.
    - Declarativo: Prolog, Lisp puro, ML, Haskell, DLV, Smodels.
- Ventajas;
    - Imperativo: Programas rápidos y especializados.
    - Declarativo: Programas generales, cortos y legibles.

1.3. Historia de la programación lógica

Historia de la programación lógica

- 1960: Demostración automática de teoremas.
- 1965: Resolución y unificación (Robinson).
- 1969: QA3, obtención de respuesta (Green).
- 1972: Implementación de Prolog (Colmerauer).
- 1974: Programación lógica (Kowalski).
- 1977: Prolog de Edimburgo (Warren).
- 1981: Proyecto japonés de Quinta Generación.
- 1986: Programación lógica con restricciones.
- 1995: Estándar ISO de Prolog.

2. Deducción Prolog

2.1. Deducción Prolog en lógica proposicional

Deducción Prolog en lógica proposicional

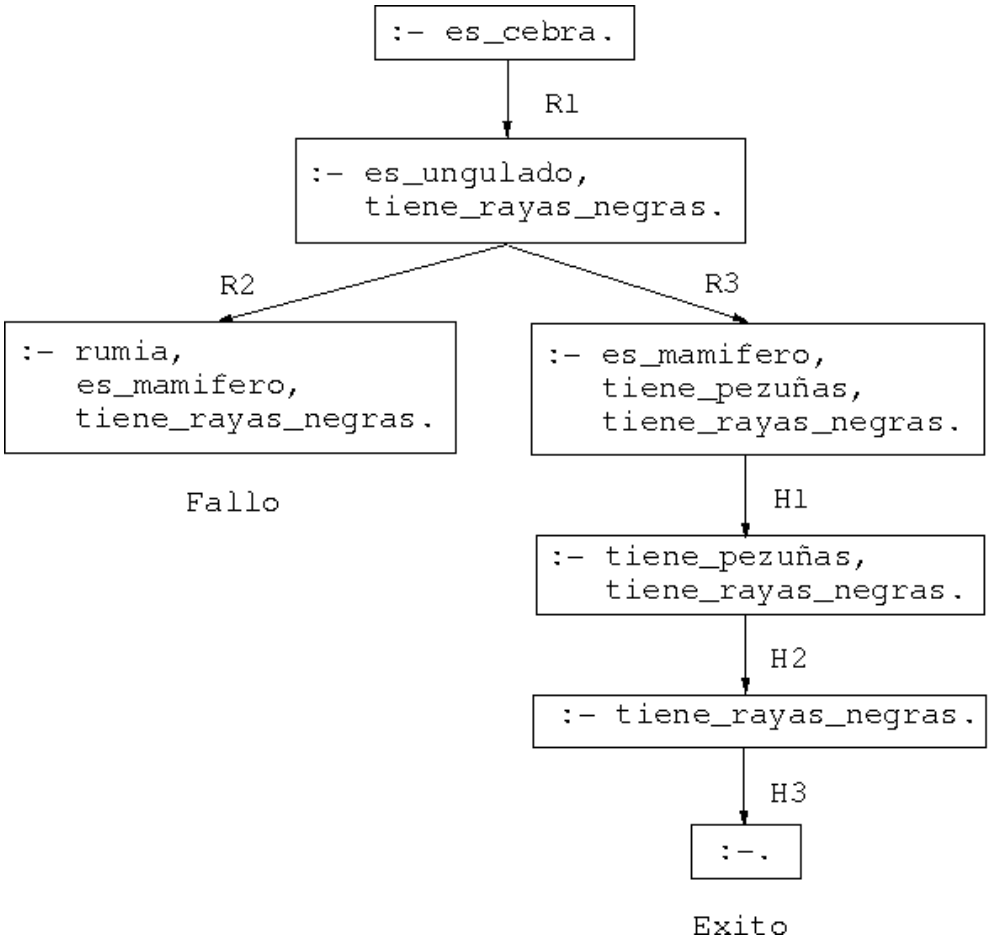
- Base de conocimiento y objetivo:
  - Base de conocimiento:
    - Regla 1: Si un animal es ungulado y tiene rayas negras, entonces es una cebra.
    - Regla 2: Si un animal rumia y es mamífero, entonces es ungulado.
    - Regla 3: Si un animal es mamífero y tiene pezuñas, entonces es ungulado.
    - Hecho 1: El animal es mamífero.
    - Hecho 2: El animal tiene pezuñas.
    - Hecho 3: El animal tiene rayas negras.
  - Objetivo: Demostrar a partir de la base de conocimientos que el animal es una cebra.
- Programa:

```
es_cebra    :- es_ungulado, tiene_rayas_negras. %R1
es_ungulado :- rumia, es_mamífero.              %R2
es_ungulado :- es_mamífero, tiene_pezuñas.      %R3
es_mamífero.                                    %H1
tiene_pezuñas.                                  %H2
tiene_rayas_negras.                             %H3
```

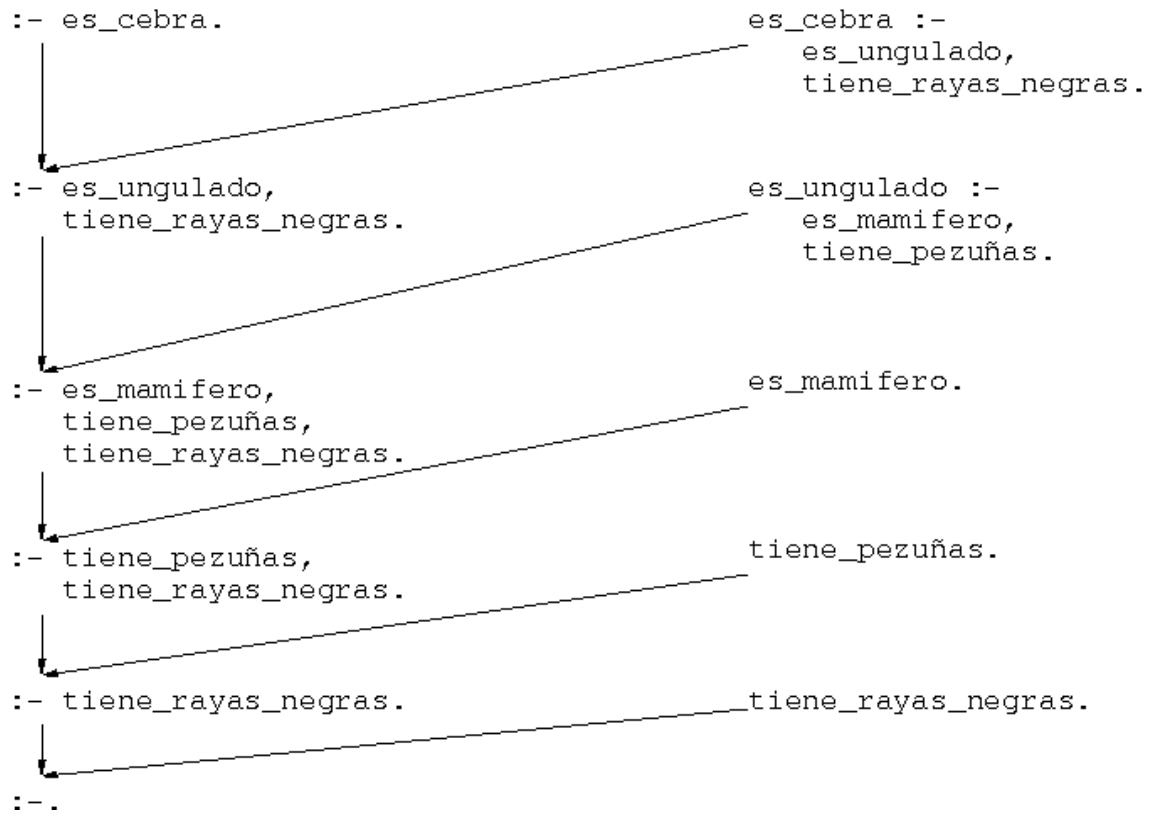
- Sesión:

```
> pl
Welcome to SWI-Prolog (Multi-threaded, Version 5.6.20)
Copyright (c) 1990-2006 University of Amsterdam.
?- [animales].
Yes
?- es_cebra.
Yes
```

- Árbol de deducción:



- Demostración por resolución SLD:



2.2. Deducción Prolog en lógica relacional

Deducción Prolog en lógica relacional

- Base de conocimiento:
  - Hechos 1-4: 6 y 12 son divisibles por 2 y por 3.
  - Hecho 5: 4 es divisible por 2.
  - Regla 1: Los números divisibles por 2 y por 3 son divisibles por 6.
- Programa:

```
divide(2,6).                              % Hecho 1
divide(2,4).                              % Hecho 2
divide(2,12).                             % Hecho 3
divide(3,6).                              % Hecho 4
divide(3,12).                             % Hecho 5
divide(6,X) :- divide(2,X), divide(3,X). % Regla 1
```

- Símbolos:

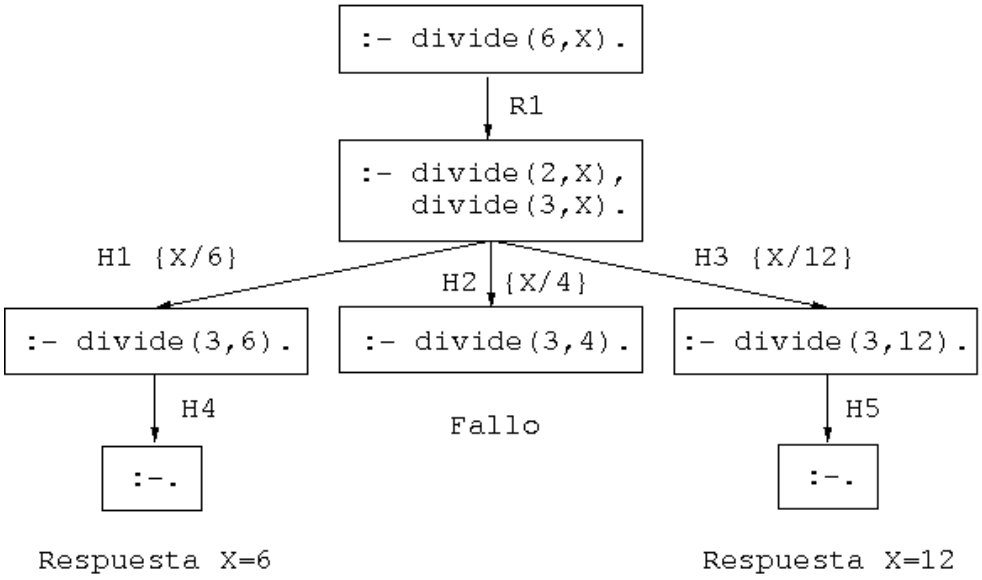
- Constantes: `2`, `3`, `4`, `6`, `12`
- Relación binaria: `divide`
- Variable: `X`

- Interpretaciones de la Regla 1:
  - `divide(6,X) :- divide(2,X), divide(3,X).`
  - Interpretación declarativa:
    $(\forall X)[divide(2, X) \wedge divide(3, X) \rightarrow divide(6, X)]$
  - Interpretación procedimental.

- Consulta: ¿Cuáles son los múltiplos de 6?

```
?- divide(6,X).
X = 6 ;
X = 12 ;
No
```

- Árbol de deducción:



- Comentarios:
  - Unificación.
  - Cálculo de respuestas.
  - Respuestas múltiples.

2.3. Deducción Prolog en lógica funcional

Deducción Prolog en lógica funcional

- Representación de los números naturales:
  `0, s(0), s(s(0)), ...`
- Definición de la suma:

```
0 + Y = Y
s(X) + Y = s(X+Y)
```

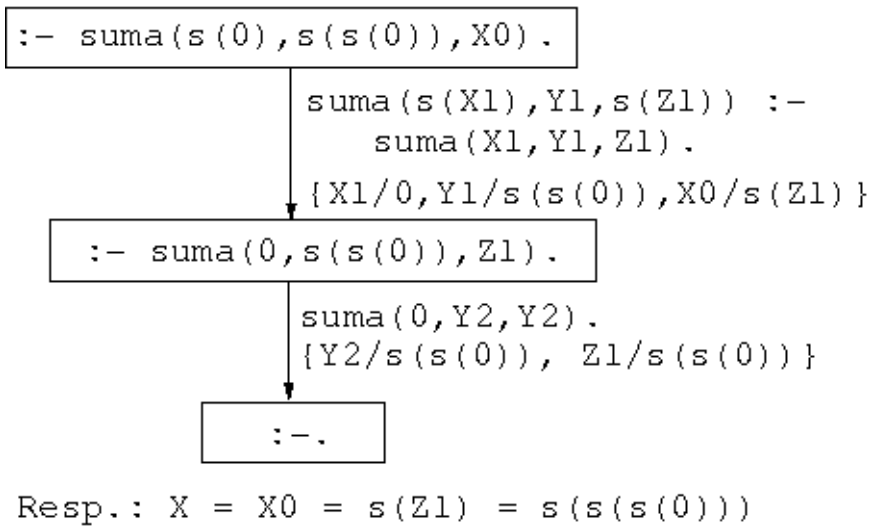
- Programa

```
suma(0,Y,Y).                          % R1
suma(s(X),Y,s(Z)) :- suma(X,Y,Z).     % R2
```

- Consulta: ¿Cuál es la suma de `s(0)` y `s(s(0))`?

```
?- suma(s(0),s(s(0)),X).
X = s(s(s(0)))
Yes
```

- Árbol de deducción:

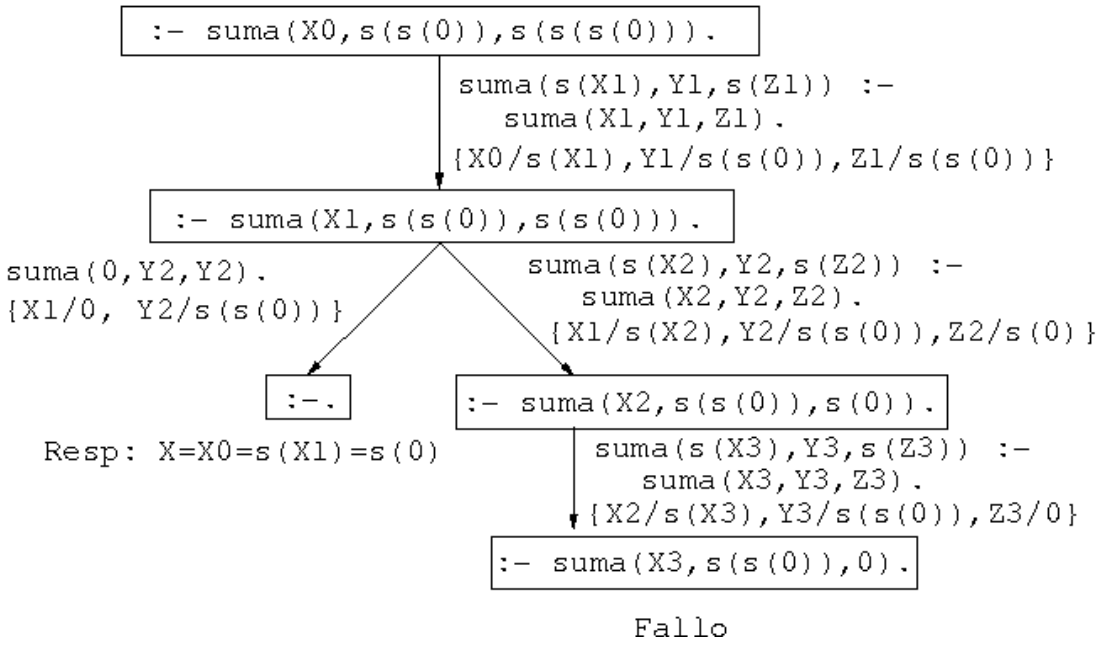


Resp.: X = X0 = s(Z1) = s(s(s(0)))

- Consulta:
  - ¿Cuál es la resta de `s(s(s(0)))` y `s(s(0))`?
  - Sesión:

```
?- suma(X,s(s(0)),s(s(s(0)))).
X = s(0) ;
No
```

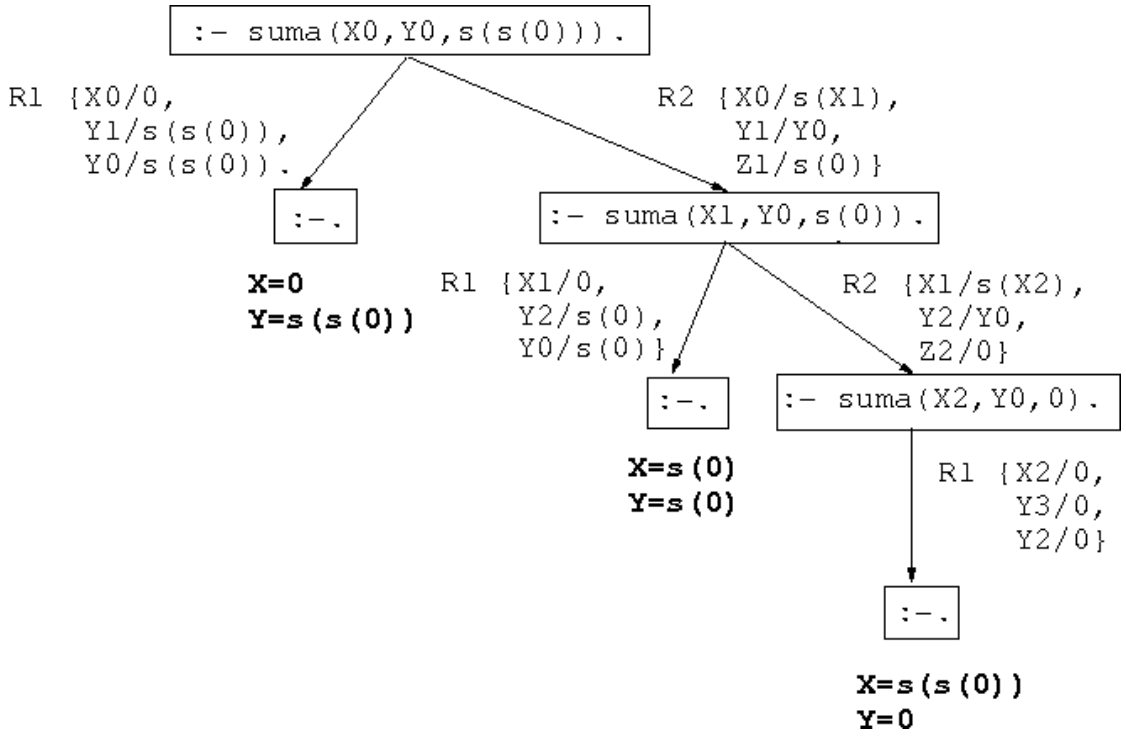
- Árbol de deducción:



- Consulta:
  - Pregunta: ¿Cuáles son las soluciones de la ecuación
    `X + Y = s(s(0))`?
  - Sesión:

```
?- suma(X,Y,s(s(0))).
X = 0          Y = s(s(0)) ;
X = s(0)       Y = s(0) ;
X = s(s(0))    Y = 0 ;
No
```

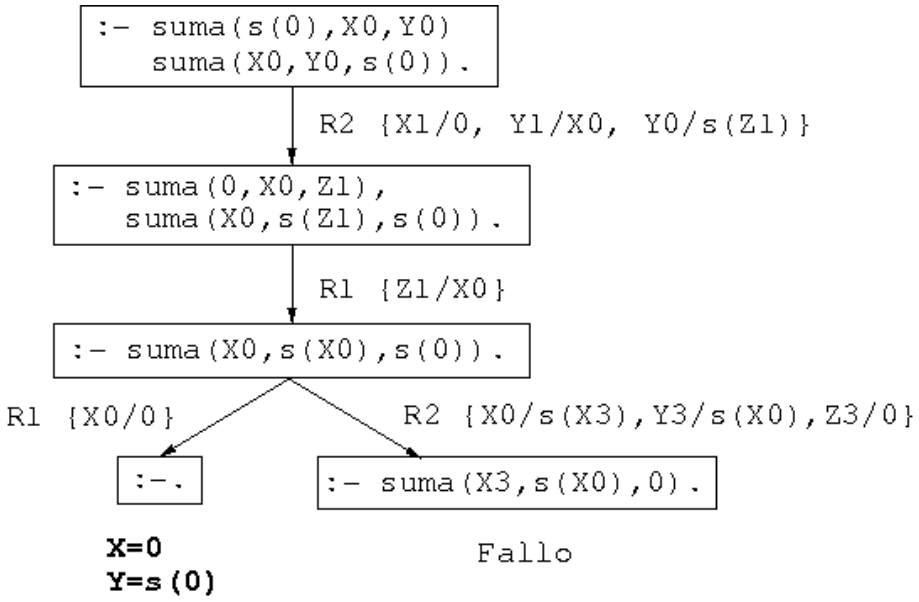
- Árbol de deducción:



- Consulta:
  - Pregunta: resolver el sistema de ecuaciones
    $1 + X = Y$
    $X + Y = 1$
  - Sesión:

```
?- suma(s(0),X,Y), suma(X,Y,s(0)).
X = 0
Y = s(0) ;
No
```

- Árbol de deducción:



Bibliografía

1. J.A. Alonso (2006) *Introducción a la programación lógica con Prolog.*
   - Cap. 0: "Introducción".
2. I. Bratko (1990) *Prolog Programming for Artificial Intelligence (2nd ed.)*
   - Cap. 1: "An overview of Prolog".
   - Cap. 2: "Syntax and meaning of Prolog programs".
3. W.F. Clocksin y C.S. Mellish (1994) *Programming in Prolog (Fourth Edition).*
   - Cap. 1: "Tutorial introduction".
   - Cap. 2: "A closer look".

Capítulo 7

Listas, operadores y aritmética

Programación declarativa (2007–08)

Tema 7: Listas, operadores y aritmética

José A. Alonso Jiménez

Índice

1. Listas

1.1. Construcción de listas

Construcción de listas

- Definición de listas:
  - La lista vacía `[]` es una lista.
  - Si `L` es una lista, entonces `.(a,L)` es una lista.
- Ejemplos:

```
?- .(X,Y) = [a].
X = a
Y = []
?- .(X,Y) = [a,b].
X = a
Y = [b]
?- .(X,.(Y,Z)) = [a,b].
X = a
Y = b
Z = []
```

Escritura abreviada

- Escritura abreviada:

```
[X|Y] = .(X,Y)
```

- Ejemplos con escritura abreviada:

```
?- [X|Y] = [a,b].
X = a
Y = [b]
?- [X|Y] = [a,b,c,d].
X = a
Y = [b, c, d]
?- [X,Y|Z] = [a,b,c,d].
X = a
Y = b
Z = [c, d]
```

1.2. Definición de relaciones sobre listas

1.2.1. Concatenación de listas

Definición de concatenación (`append`)

- *Especificación:* `conc(A,B,C)` se verifica si `C` es la lista obtenida escribiendo los elementos de la lista `B` a continuación de los elementos de la lista `A`. Por ejemplo,

```
?- conc([a,b],[b,d],C).
C =[a,b,b,d]
```

- *Definición 1:*

```
conc(A,B,C) :- A=[], C=B.
conc(A,B,C) :- A=[X|D], conc(D,B,E), C=[X|E].
```

- *Definición 2:*

```
conc([],B,B).
conc([X|D],B,[X|E]) :- conc(D,B,E).
```

Consultas con la relación de concatenación

- Analogía entre la definición de `conc` y la de `suma`,
- ¿Cuál es el resultado de concatenar las listas `[a,b]` y `[c,d,e]`?

```
?- conc([a,b],[c,d,e],L).
L = [a, b, c, d, e]
```

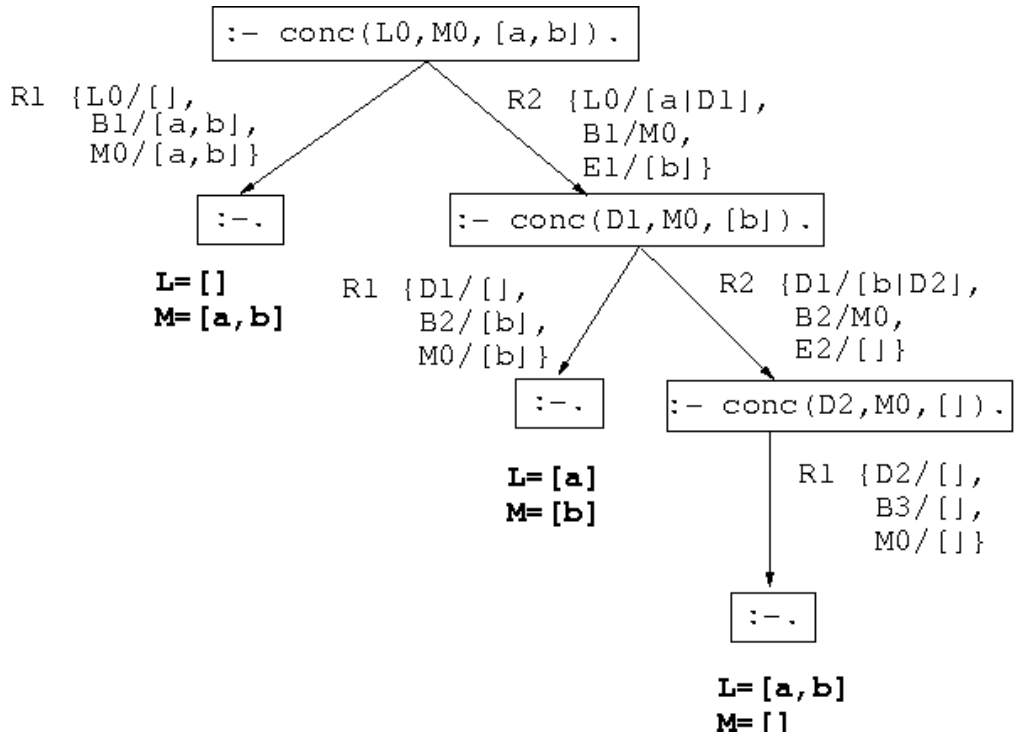
- ¿Qué lista hay que añadirle a la lista `[a,b]` para obtener `[a,b,c,d]`?

```
?- conc([a,b],L,[a,b,c,d]).
L = [c, d]
```

- ¿Qué dos listas hay que concatenar para obtener `[a,b]`?

```
?- conc(L,M,[a,b]).
L = []       M = [a, b] ;
L = [a]      M = [b] ;
L = [a, b]   M = [] ;
No
```

Árbol de deducción de `?- conc(L,M,[a,b]).`



1.2.2. Relación de pertenencia

Definición de la relación de pertenencia (`member`)

- *Especificación:* `pertenece(X,L)` se verifica si `X` es un elemento de la lista `L`.
- *Definición 1:*

```
pertenece(X,[X|L]).
pertenece(X,[Y|L]) :- pertenece(X,L).
```

- *Definición 2:*

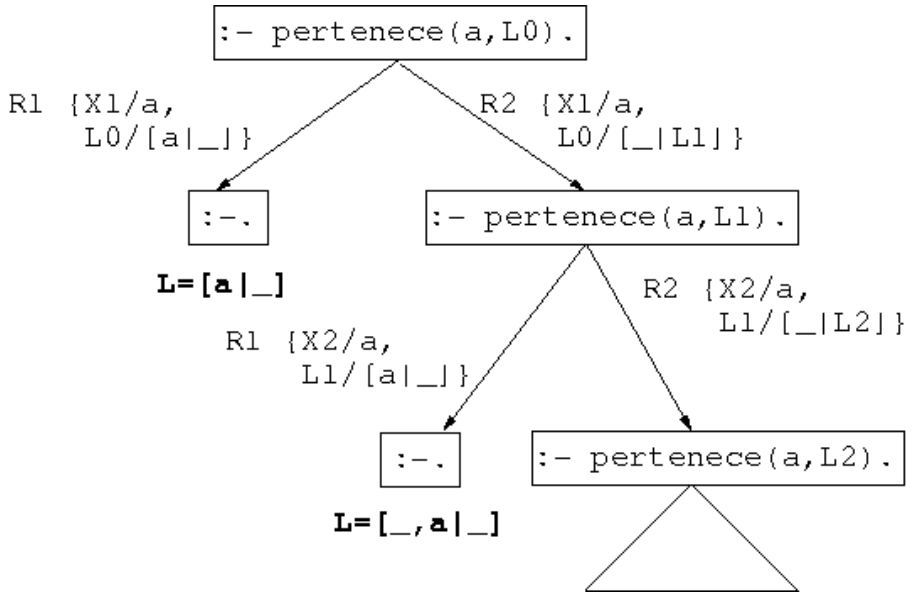
```
pertenece(X,[X|_]).
pertenece(X,[_|L]) :- pertenece(X,L).
```

Consultas con la relación de pertenencia

```
?- pertenece(b,[a,b,c]).
Yes
?- pertenece(d,[a,b,c]).
```

```
No
?- pertenece(X,[a,b,a]).
X = a ;
X = b ;
X = a ;
No
?- pertenece(a,L).
L = [a|_G233] ;
L = [_G232, a|_G236] ;
L = [_G232, _G235, a|_G239]
Yes
```

Árbol de deducción de `?- pertenece(a,L).`



2. Disyunciones

Disyunciones

- Definición de `pertenece` con disyunción

```
pertenece(X,[Y|L]) :- X=Y ; pertenece(X,L).
```

- Definición equivalente sin disyunción

```
pertenece(X,[Y|L]) :- X=Y.
pertenece(X,[Y|L]) :- pertenece(X,L).
```

3. Operadores

3.1. Operadores aritméticos

Ejemplos de operadores aritméticos

- Ejemplos de notación infija y prefija en expresiones aritméticas:

```
?- +(X,Y) = a+b.
X = a
Y = b
?- +(X,Y) = a+b+c.
X = a+b
Y = c
?- +(X,Y) = a+(b+c).
X = a
Y = b+c
?- a+b+c = (a+b)+c.
Yes
?- a+b+c = a+(b+c).
No
```

Ejemplos de asociatividad y precedencia

- Ejemplos de asociatividad:

```
?- X^Y = a^b^c.
X = a       Y = b^c
?- a^b^c = a^(b^c).
Yes
```

- Ejemplo de precedencia

```
?- X+Y = a+b*c.
X = a       Y = b*c
?- X*Y = a+b*c.
No
?- X*Y = (a+b)*c.
X = a+b     Y = c
?- a+b*c = (a+b)*c.
No
```

Operadores aritméticos predefinidos

Precedencia	Tipo	Operadores	
500	`yfx`	`+,-`	Infijo asocia por la izquierda
500	`fx`	`-`	Prefijo no asocia
400	`yfx`	`*, /`	Infijo asocia por la izquierda
200	`xfy`	`^`	Infijo asocia por la derecha

3.2. Definición de operadores

Definición de operadores

- Definición (`ejemplo_operadores.pl`)

```
:-op(800,xfx,estudian).
:-op(400,xfx,y).

juan y ana estudian lógica.
```

- Consultas

```
?- [ejemplo_operadores].
?- Quienes estudian lógica.
Quienes = juan y ana
?- juan y Otro estudian Algo.
Otro = ana
Algo = lógica
```

4. Aritmética

4.1. Evaluación de expresiones aritméticas

Evaluación de expresiones aritméticas

- Evaluación de expresiones aritmética con `is`.

```
?- X is 2+3^3.
X = 29
?- X is 2+3, Y is 2*X.
X = 5
Y = 10
```

- Relaciones aritméticas: `<`, `=<`, `>`, `>=`, `=:=` y `=/=`

```
?- 3 =< 5.
Yes
?- 3 > X.
% [WARNING: Arguments are not sufficiently instantiated]
?- 2+5 = 10-3.
No
?- 2+5 =:= 10-3.
Yes
```

4.2. Definición de relaciones aritméticas

Definición del factorial

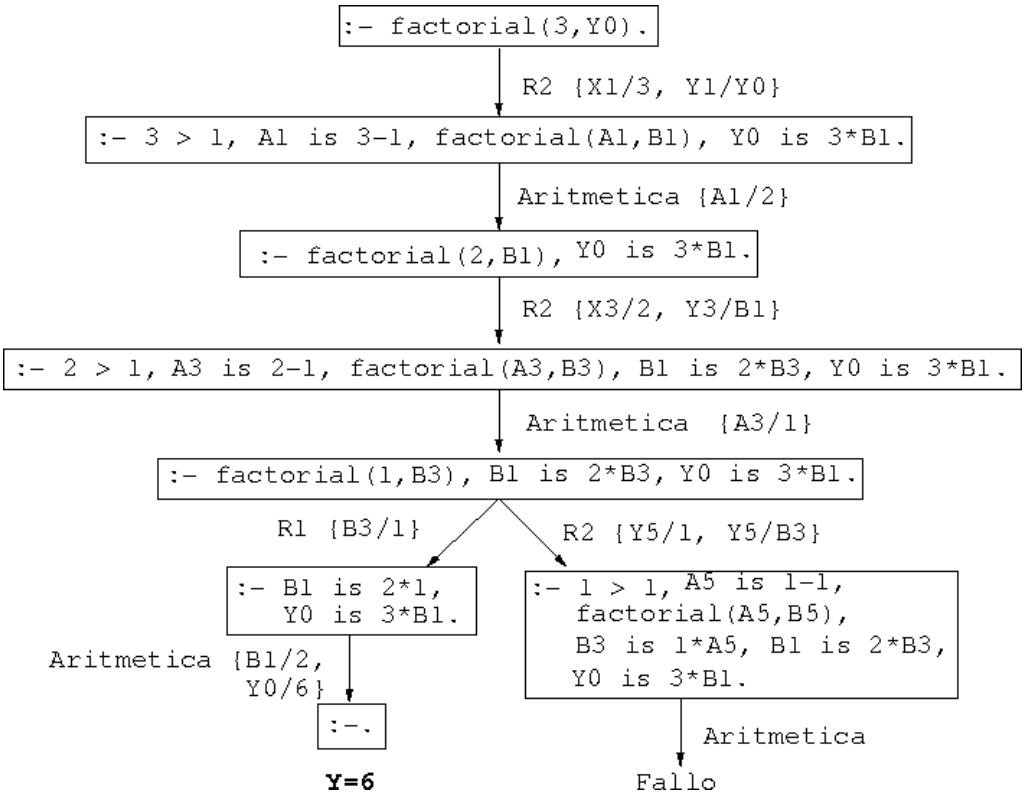
- `factorial(X,Y)` se verifica si `Y` es el factorial de `X`. Por ejemplo,

```
?- factorial(3,Y).
Y = 6 ;
No
```

- Definición:

```
factorial(1,1).
factorial(X,Y) :-
   X > 1,
   A is X - 1,
   factorial(A,B),
   Y is X * B.
```

Árbol de deducción de `?- factorial(3,Y).`



Bibliografía

Bibliografía

1. J.A. Alonso *Introducción a la programación lógica con Prolog.*

2. Bratko, I. *Prolog Programming for Artificial Intelligence (2nd ed.)* (Addison–Wesley, 1990)

3. Clocksin, W.F. y Mellish, C.S. *Programming in Prolog (Fourth Edition)* (Springer Verlag, 1994)

4. Covington, M.A.; Nute, D. y Vellino, A. *Prolog Programming in Depth* (Prentice Hall, 1997)

5. Sterling, L. y Shapiro, E. *L'art de Prolog* (Masson, 1990)

6. Van Le, T. *Techniques of Prolog Programming* (John Wiley, 1993)

Capítulo 8

Estructuras

Programación declarativa (2007–08)

Tema 8: Estructuras

José A. Alonso Jiménez

Índice

1. Segmentos horizontales y verticales

1.1. Representación de segmentos

Definición de segmentos verticales y horizontales

- Representación:
  `punto(X,Y)`
  `seg(P1,P2)`
- `horizontal(S)` se verifica si el segmento `S` es horizontal.
- `vertical(S)` se verifica si el segmento `S` es vertical. Por ejemplo,

```
vertical(seg(punto(1,2),punto(1,3)))   =>  Sí
vertical(seg(punto(1,2),punto(4,2)))   =>  No
horizontal(seg(punto(1,2),punto(1,3))) =>  No
horizontal(seg(punto(1,2),punto(4,2))) =>  Sí
```

- Programa: `ver_hor.pl`

```
horizontal(seg(punto(X,Y),punto(X1,Y))).
vertical(seg(punto(X,Y),punto(X,Y1))).
```

1.2. Consultas sobre segmentos

Consultas sobre segmentos verticales y horizontales

- ¿Es vertical el segmento que une los puntos `(1,1)` y `(1,2)`?

```
?- vertical(seg(punto(1,1),punto(1,2))).
Yes
```

- ¿Es vertical el segmento que une los puntos `(1,1)` y `(2,2)`?

```
?- vertical(seg(punto(1,1),punto(2,2))).
No
```

- ¿Hay algún `Y` tal que el segmento que une los puntos `(1,1)` y `(2,Y)` sea vertical?

```
?- vertical(seg(punto(1,1),punto(2,Y))).
No
```

- ¿Hay algún `X` tal que el segmento que une los puntos `(1,2)` y `(X,3)` sea vertical?

```
?- vertical(seg(punto(1,2),punto(X,3))).
X = 1 ;
No
```

- ¿Hay algún `Y` tal que el segmento que une los puntos `(1,1)` y `(2,Y)` sea horizontal?

```
?- horizontal(seg(punto(1,1),punto(2,Y))).
Y = 1 ;
No
```

- ¿Para qué puntos el segmento que comienza en `(2,3)` es vertical?

```
?- vertical(seg(punto(2,3),P)).
P = punto(2, _G459) ;
No
```

- ¿Hay algún segmento que sea horizontal y vertical?

```
?- vertical(S),horizontal(S).
S = seg(punto(_G444, _G445),
        punto(_G444, _G445)) ;
No
?- vertical(_),horizontal(_).
Yes
```

2. Base de datos familiar

2.1. Representación de la base de datos familiar

Descripción de la familia 1

- el padre es Tomás García Pérez, nacido el 7 de Mayo de 1950, trabaja de profesor y gana 75 euros diarios
- la madre es Ana López Ruiz, nacida el 10 de marzo de 1952, trabaja de médica y gana 100 euros diarios
- el hijo es Juan García López, nacido el 5 de Enero de 1970, estudiante
- la hija es María García López, nacida el 12 de Abril de 1972, estudiante

Representación de la familia 1

```
familia(persona([tomas,garcia,perez],
                fecha(7,mayo,1950),
                trabajo(profesor,75)),
        persona([ana,lopez,ruiz],
                fecha(10,marzo,1952),
                trabajo(medica,100)),
        [ persona([juan,garcia,lopez],
                  fecha(5,enero,1970),
                  estudiante),
          persona([maria,garcia,lopez],
                  fecha(12,abril,1972),
                  estudiante) ]).
```

Descripción de la familia 2

- el padre es José Pérez Ruiz, nacido el 6 de Marzo de 1953, trabaja de pintor y gana 150 euros/día
- la madre es Luisa Gálvez Pérez, nacida el 12 de Mayo de 1954, es médica y gana 100 euros/día
- un hijo es Juan Luis Pérez Pérez, nacido el 5 de Febrero de 1980, estudiante
- una hija es María José Pérez Pérez, nacida el 12 de Junio de 1982, estudiante
- otro hijo es José María Pérez Pérez, nacido el 12 de Julio de 1984, estudiante

Representación de la familia 2

```
familia(persona([jose,perez,ruiz],
                fecha(6,marzo,1953),
                trabajo(pintor,150)),
        persona([luisa,galvez,perez],
                fecha(12,mayo,1954),
                trabajo(medica,100)),
        [ persona([juan_luis,perez,perez],
                  fecha(5,febrero,1980), estudiante),
          persona([maria_jose,perez,perez],
                  fecha(12,junio,1982), estudiante),
          persona([jose_maria,perez,perez],
                  fecha(12,julio,1984), estudiante)]).
```

2.2. Consultas a la base de datos familiar

Consultas a la base de datos familiar

- ¿Existe alguna familia sin hijos?

```
?- familia(_,_,[]).
No
```

- ¿Existe alguna familia con tres hijos?

```
?- familia(_,_,[_,_,_]).
Yes
```

- ¿Existe alguna familia con cuatro hijos?

```
?- familia(_,_,[_,_,_,_]).
No
```

- Buscar los nombres de los padres de familia con tres hijos

```
?- familia(persona(NP,_,_),_,[_,_,_]).
NP = [jose, perez, ruiz] ;
No
```

2.3. Extensiones y consultas a la base de datos familiar

Hombres casados

- `casado(X)` se verifica si `X` es un hombre casado.

```
casado(X) :- familia(X,_,_).
```

- Consulta:

```
?- casado(X).
X = persona([tomas, garcia, perez],
            fecha(7, mayo, 1950),
            trabajo(profesor, 75)) ;
X = persona([jose, perez, ruiz],
            fecha(6, marzo, 1953),
            trabajo(pintor, 150)) ;
No
```

Mujeres casadas

- `casada(X)` se verifica si `X` es una mujer casada.

```
casada(X) :- familia(_,X,_).
```

- Consulta:

```
?- casada(X).
X = persona([ana, lopez, ruiz],
            fecha(10, marzo, 1952),
            trabajo(medica, 100)) ;
X = persona([luisa, galvez, perez],
            fecha(12, mayo, 1954),
            trabajo(medica, 100)) ;
No
```

Recuperación de la información

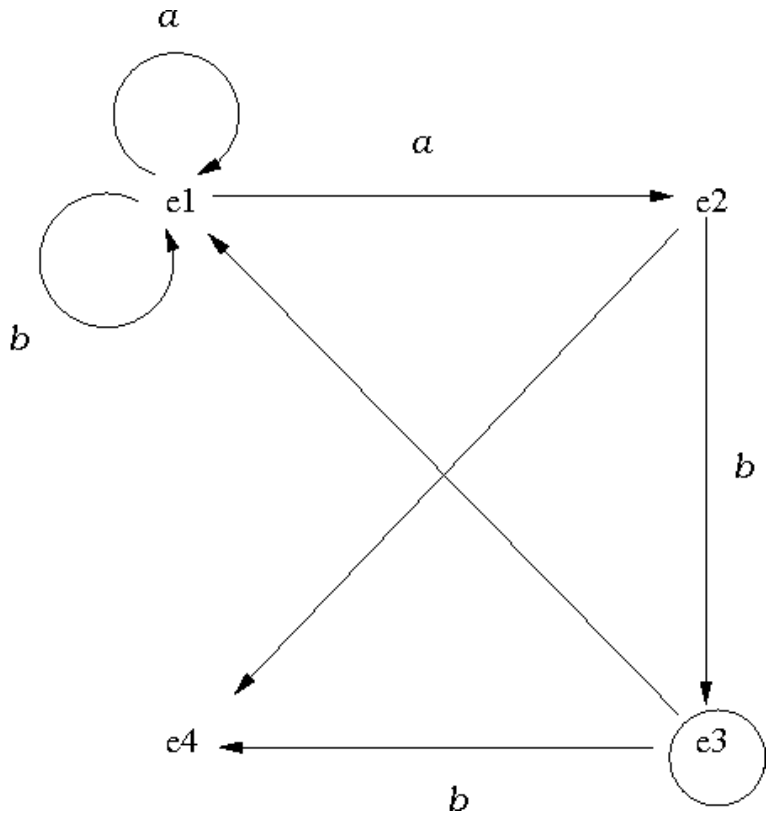
- Buscar los nombres de las mujeres casadas que trabajan.

```
?- casada(persona([N,_,_],_,trabajo(_,_))).
N = ana ;
N = luisa ;
No
```

3. Autómatas no deterministas

3.1. Representación de un autómata no determinista

Ejemplo de autómata no determinista (con estado final e3)



Representación de un autómata (`automata.pl`)

- `final(E)` se verifica si `E` es el estado final.

```
final(e3).
```

- `trans(E1,X,E2)` se verifica si se puede pasar del estado `E1` al estado `E2` usando la letra `X`.

```
trans(e1,a,e1).   trans(e1,a,e2).   trans(e1,b,e1).
trans(e2,b,e3).
trans(e3,b,e4).
```

- `nulo(E1,E2)` se verifica si se puede pasar del estado `E1` al estado `E2` mediante un movimiento nulo.

```
nulo(e2,e4).
nulo(e3,e1).
```

3.2. Simulación de los autómatas no deterministas

Simulación de los autómatas no deterministas

- `acepta(E,L)` se verifica si el autómata, a partir del estado `E` acepta la lista `L`. Por ejemplo,

```
acepta(e1,[a,a,a,b]) => Sí
acepta(e2,[a,a,a,b]) => No
```

```
acepta(E,[]) :-
   final(E).
acepta(E,[X|L]) :-
   trans(E,X,E1),
   acepta(E1,L).
acepta(E,L) :-
   nulo(E,E1),
   acepta(E1,L).
```

3.3. Consultas al autómata

Consultas al autómata

- Determinar si el autómata acepta la lista `[a,a,a,b]`

```
?- acepta(e1,[a,a,a,b]).
Yes
```

- Determinar los estados a partir de los cuales el autómata acepta la lista `[a,b]`

```
?- acepta(E,[a,b]).
E=e1 ;
E=e3 ;
No
```

- Determinar las palabras de longitud 3 aceptadas por el autómata a partir del estado `e1`

```
?- acepta(e1,[X,Y,Z]).
X = a   Y = a   Z = b ;
X = b   Y = a   Z = b ;
No
```

4. Problema de planificación

4.1. Representación del problema del mono

Representación del problema del mono

- Especificación: Un mono se encuentra en la puerta de una habitación. En el centro de la habitación hay un plátano colgado del techo. El mono está hambriento y desea coger el plátano, pero no lo alcanza desde el suelo. En la ventana de la habitación hay una silla que el mono puede usar. El mono puede realizar las siguientes acciones: pasear de un lugar a otro de la habitación, empujar la silla de un lugar a otro de la habitación (si está en el mismo lugar que la silla), subirse en la silla (si está en el mismo lugar que la silla) y coger el plátano (si está encima de la silla en el centro de la habitación).

- Representación: `estado(PM,AM,PS,MM)`
  `PM` posición del mono (puerta, centro o ventana)
  `AM` apoyo del mono (suelo o silla)
  `PS` posición de la silla (puerta, centro o ventana)
  `MM` mano del mono (con o sin) plátano

Acciones en el problema del mono

- `movimiento(E1,A,E2)` se verifica si `E2` es el estado que resulta de realizar la acción `A` en el estado `E1`.

```
movimiento(estado(centro,silla,centro,sin),
           coger,
           estado(centro,silla,centro,con)).
movimiento(estado(X,suelo,X,U),
           subir,
           estado(X,silla,X,U)).
movimiento(estado(X1,suelo,X1,U),
           empujar(X1,X2),
           estado(X2,suelo,X2,U)).
movimiento(estado(X,suelo,Z,U),
           pasear(X,Z),
           estado(Z,suelo,Z,U)).
```

4.2. Solución del problema del mono

Solución del problema del mono

- `solución(E,S)` se verifica si `S` es una sucesión de acciones que aplicadas al estado `E` permiten al mono coger el plátano. Por ejemplo,

```
?- solución(estado(puerta,suelo,ventana,sin),L).
L = [pasear(puerta, ventana),
     empujar(ventana, centro),
     subir,
     coger]
```

```
solución(estado(_,_,_,con),[]).
solución(E1,[A|L]) :-
   movimiento(E1,A,E2),
   solución(E2,L).
```

El grafo de deducción se muestra en la figura 1

Bibliografía

Bibliografía

1. I. Bratko *Prolog Programming for Artificial Intelligence (3 ed.)* (Addison–Wesley, 2001)
   - Cap. 2: "Syntax and meaning of Prolog programs"
   - Cap. 4: "Using Structures: Example Programs"
2. T. Van Le *Techniques of Prolog Programming* (John Wiley, 1993)
   - Cap. 2: "Declarative Prolog programming".
3. W.F. Clocksin y C.S. Mellish *Programming in Prolog (Fourth Edition)* (Springer Verlag, 1994)
   - Cap. 3: "Using Data Structures"

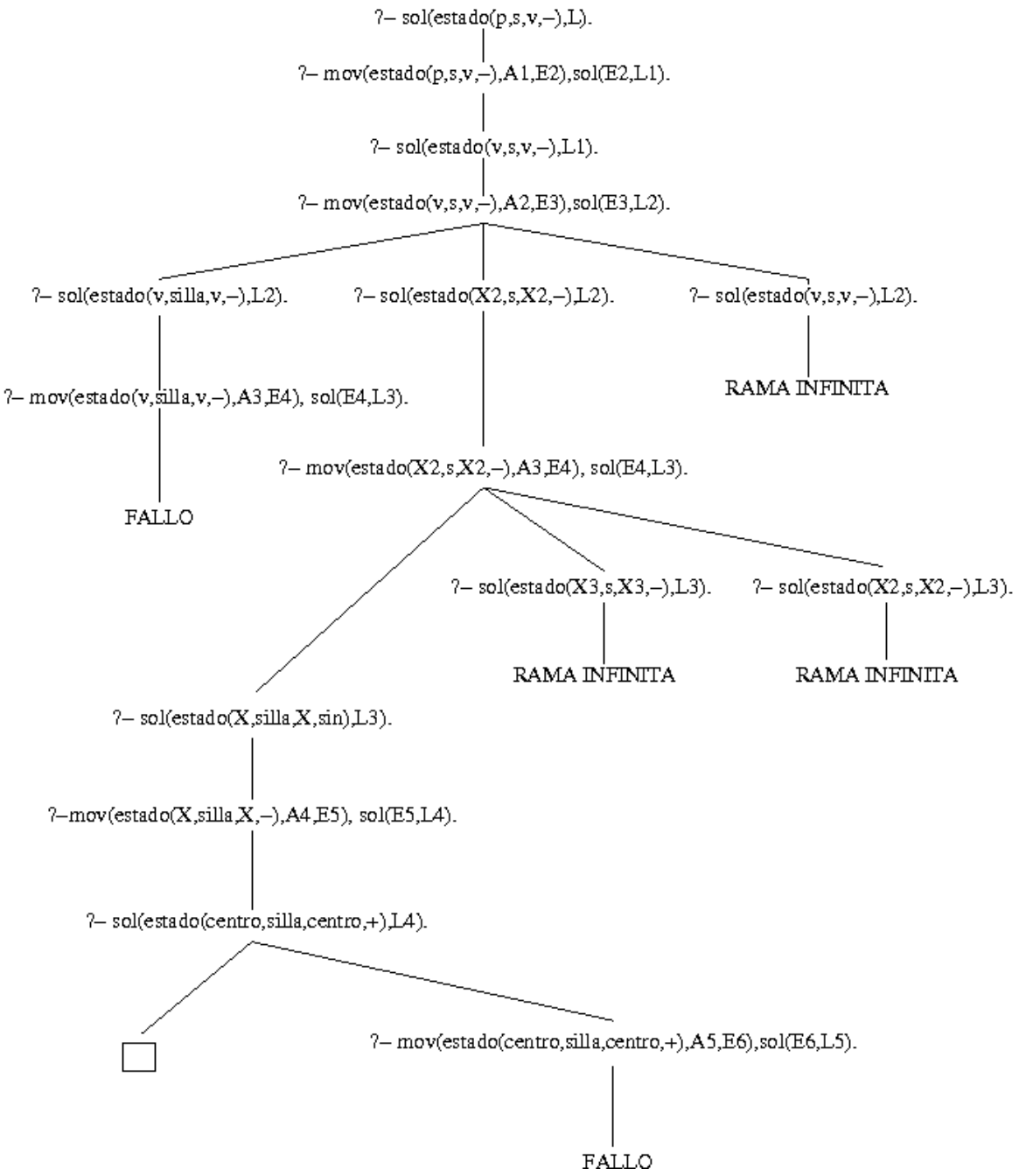


Figura 1: Grafo de deducción del problema del mono

Capítulo 9

Retroceso, corte y negación

Programación declarativa (2007–08)

Tema 9: Retroceso, corte y negación

José A. Alonso Jiménez

Índice

1. Control mediante corte

1.1. Control mediante corte

Ejemplo de `nota` sin corte

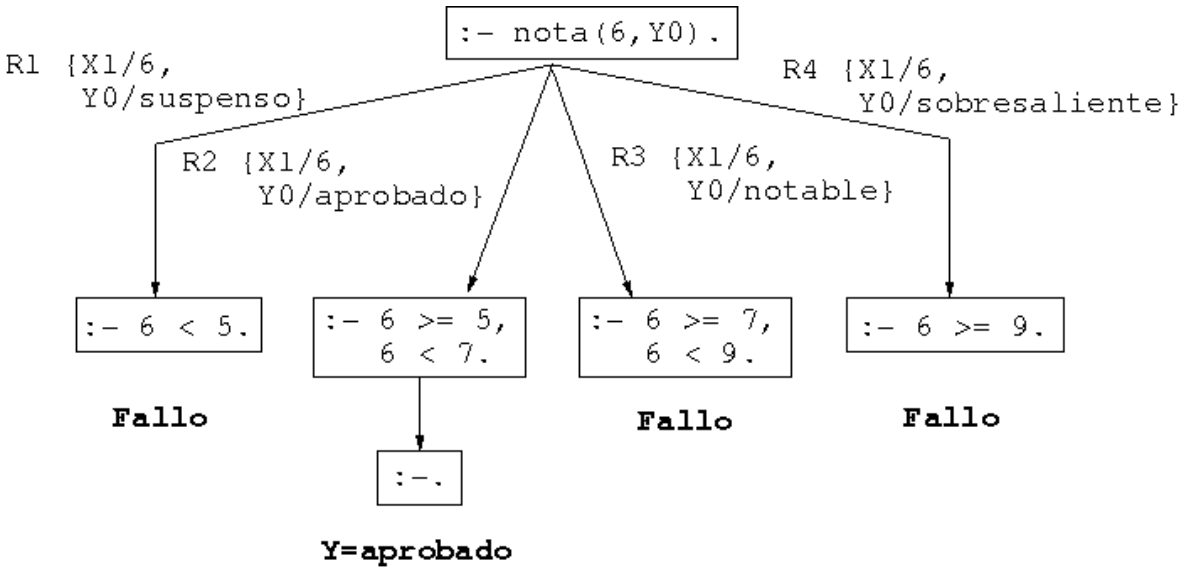
- `nota(X,Y)` se verifica si `Y` es la calificación correspondiente a la nota `X`; es decir, `Y` es `suspenso` si `X` es menor que `5`, `Y` es `aprobado` si `X` es mayor o igual que `5` pero menor que `7`, `Y` es `notable` si `X` es mayor que `7` pero menor que `9` e `Y` es sobresaliente si `X` es mayor que `9`. Por ejemplo,

```
?- nota(6,Y).
Y = aprobado;
No
```

```
nota(X,suspenso)      :- X < 5.
nota(X,aprobado)      :- X >= 5, X < 7.
nota(X,notable)       :- X >= 7, X < 9.
nota(X,sobresaliente) :- X >= 9.
```

Deducción en el ejemplo sin corte

- Árbol de deducción de `?- nota(6,Y).`

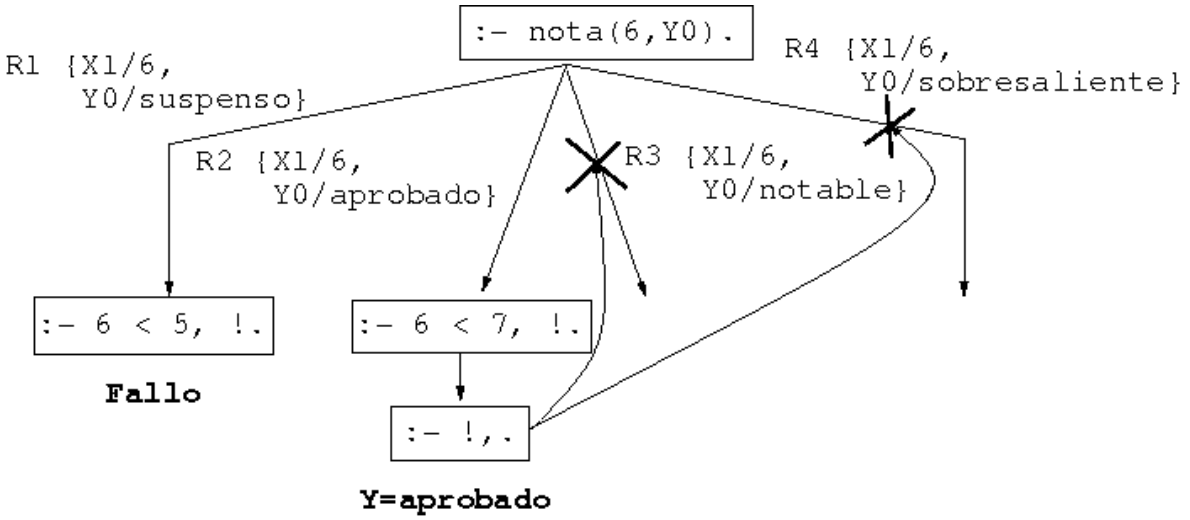


Ejemplo de `nota` con cortes

- Definición de `nota` con cortes

```
nota(X,suspenso)      :- X < 5, !.
nota(X,aprobado)      :- X < 7, !.
nota(X,notable)       :- X < 9, !.
nota(X,sobresaliente).
```

Deducción en el ejemplo con cortes



- ¿Un 6 es un sobresaliente?

```
?- nota(6,sobresaliente).
Yes
```

1.2. Ejemplos usando el corte

Uso de corte para respuesta única

- Diferencia entre `member` y `memberchk`

```
?- member(X,[a,b,a,c]), X=a.
X = a ;
X = a ;
No
?- memberchk(X,[a,b,a,c]), X=a.
X = a ;
No
```

- Definición de `member` y `memberchk`:

```
member(X,[X|_]).
member(X,[_|L]) :- member(X,L).

memberchk(X,[X|_]) :- !.
memberchk(X,[_|L]) :- memberchk(X,L).
```

2. Negación como fallo

2.1. Definición de la negación como fallo

Definición de la negación como fallo

- Definición de la negación como fallo `not`):

```
no(P) :- P, !, fail.          % No 1
no(P).                        % No 2
```

2.2. Programas con negación como fallo

Programa con negación

- Programa:

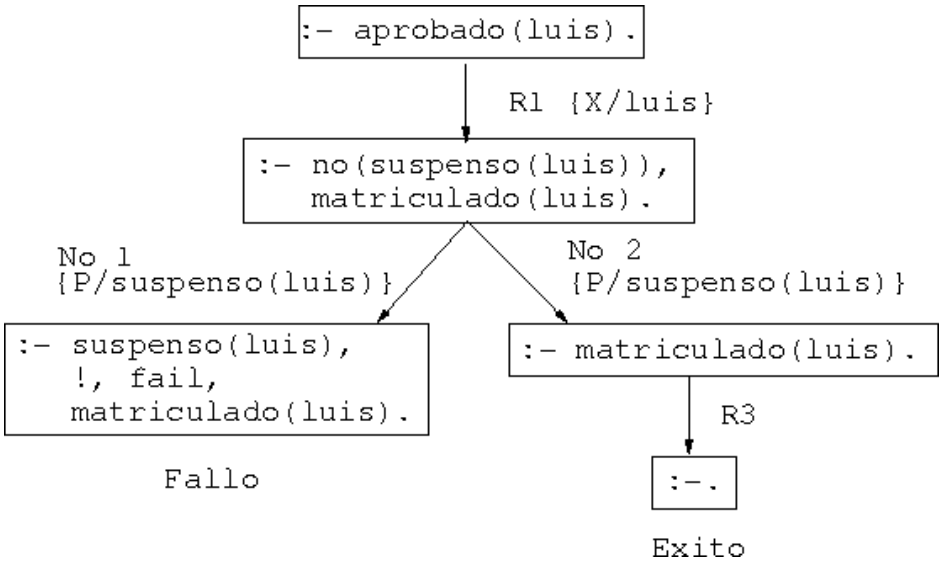
```
aprobado(X) :-                % R1
   no(suspenso(X)),
   matriculado(X).
matriculado(juan).            % R2
matriculado(luis).            % R3
suspenso(juan).               % R4
```

- Consultas:

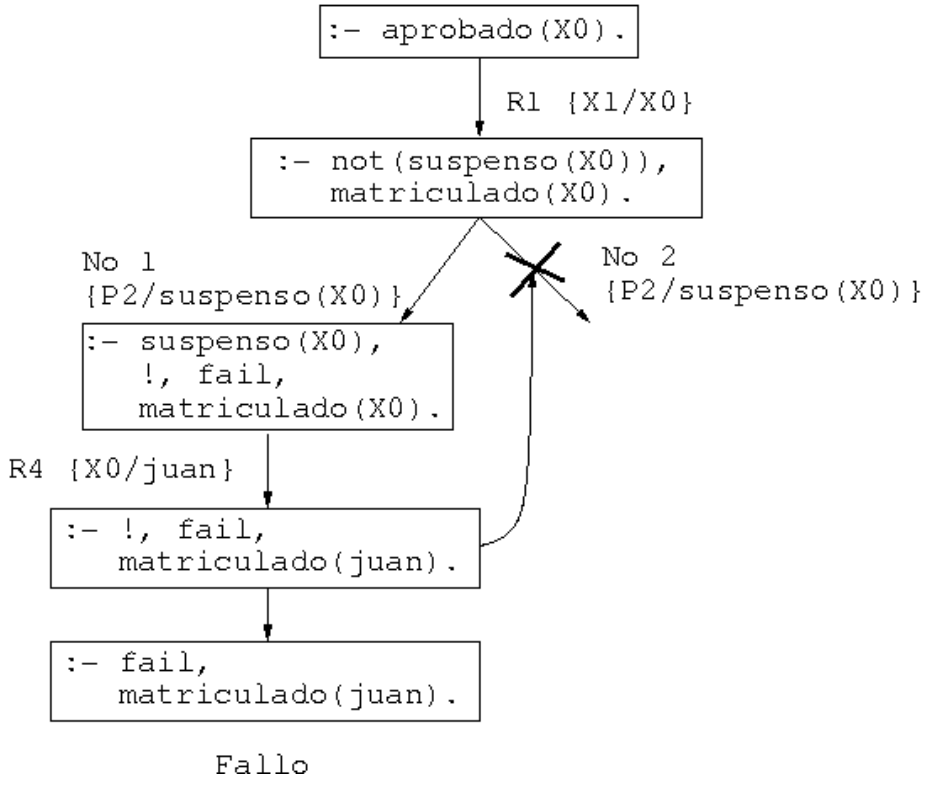
```
?- aprobado(luis).
Yes
```

```
?- aprobado(X).
No
```

Árbol de deducción de `?- aprobado(luis).`



Árbol de deducción de `?- aprobado(X).`



Modificación del orden de los literales

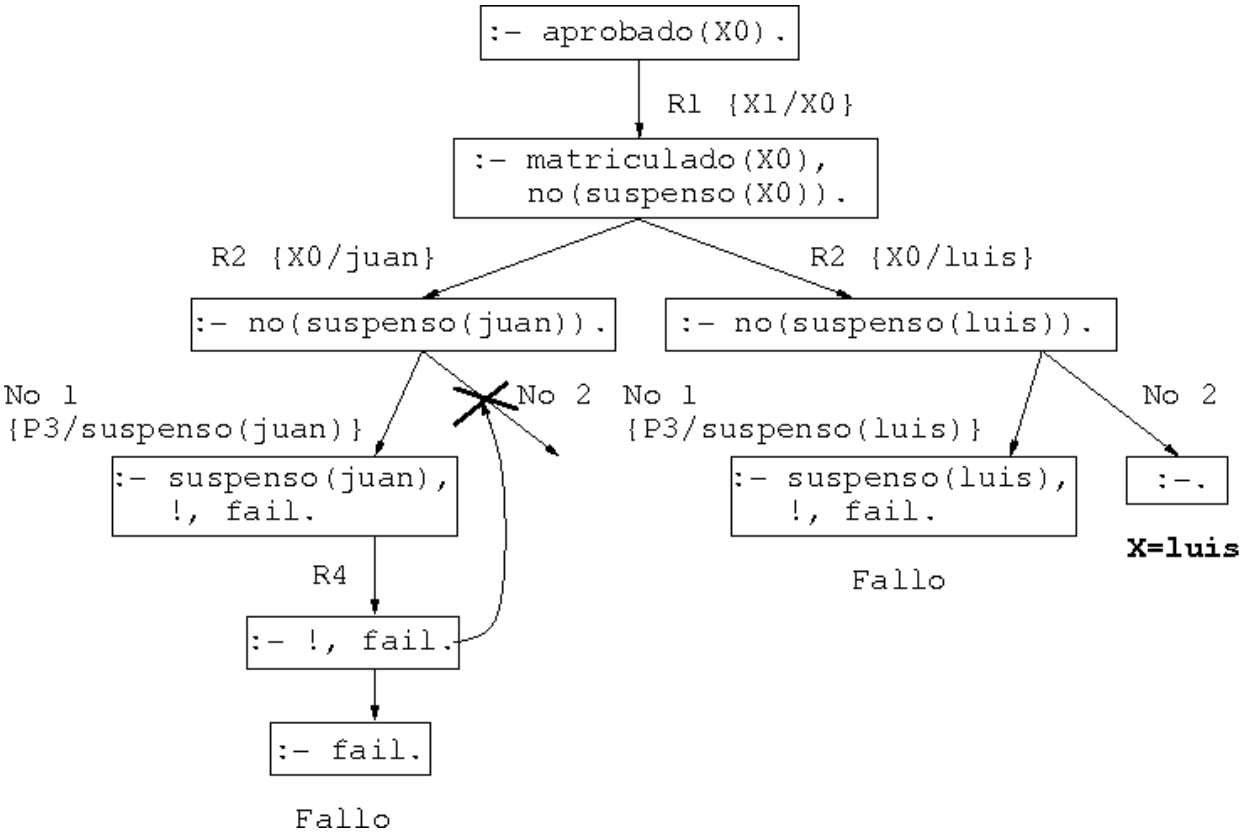
- Programa:

```
aprobado(X) :-          % R1
   matriculado(X),
   no(suspenso(X)).
matriculado(juan).      % R2
matriculado(luis).      % R3
suspenso(juan).         % R4
```

- Consulta:

```
?- aprobado(X).
X = luis
Yes
```

Árbol de deducción de `?- aprobado(X).`



Ejemplo de definición con `not` y con corte

- `borra(L1,X,L2)` se verifica si `L2` es la lista obtenida eliminando los elementos de `L1` unificables simultáneamente con `X`. Por ejemplo,

```
?- borra([a,b,a,c],a,L).
L = [b, c] ;
No
?- borra([a,Y,a,c],a,L).
Y = a
L = [c] ;
No
?- borra([a,Y,a,c],X,L).
Y = a
X = a
L = [c] ;
No
```

- Definición con `not`:

```
borra_1([],_,[]).
borra_1([X|L1],Y,L2) :-
   X=Y,
   borra_1(L1,Y,L2).
borra_1([X|L1],Y,[X|L2]) :-
   not(X=Y),
   borra_1(L1,Y,L2).
```

- Definición con corte:

```
borra_2([],_,[]).
borra_2([X|L1],Y,L2) :-
   X=Y, !,
   borra_2(L1,Y,L2).
borra_2([X|L1],Y,[X|L2]) :-
   % not(X=Y),
   borra_2(L1,Y,L2).
```

- Definición con corte y simplificada

```
borra_3([],_,[]).
borra_3([X|L1],X,L2) :-
   !,
   borra_3(L1,Y,L2).
borra_3([X|L1],Y,[X|L2]) :-
   % not(X=Y),
   borra_3(L1,Y,L2).
```

3. El condicional

Definición de `nota` con el condicional

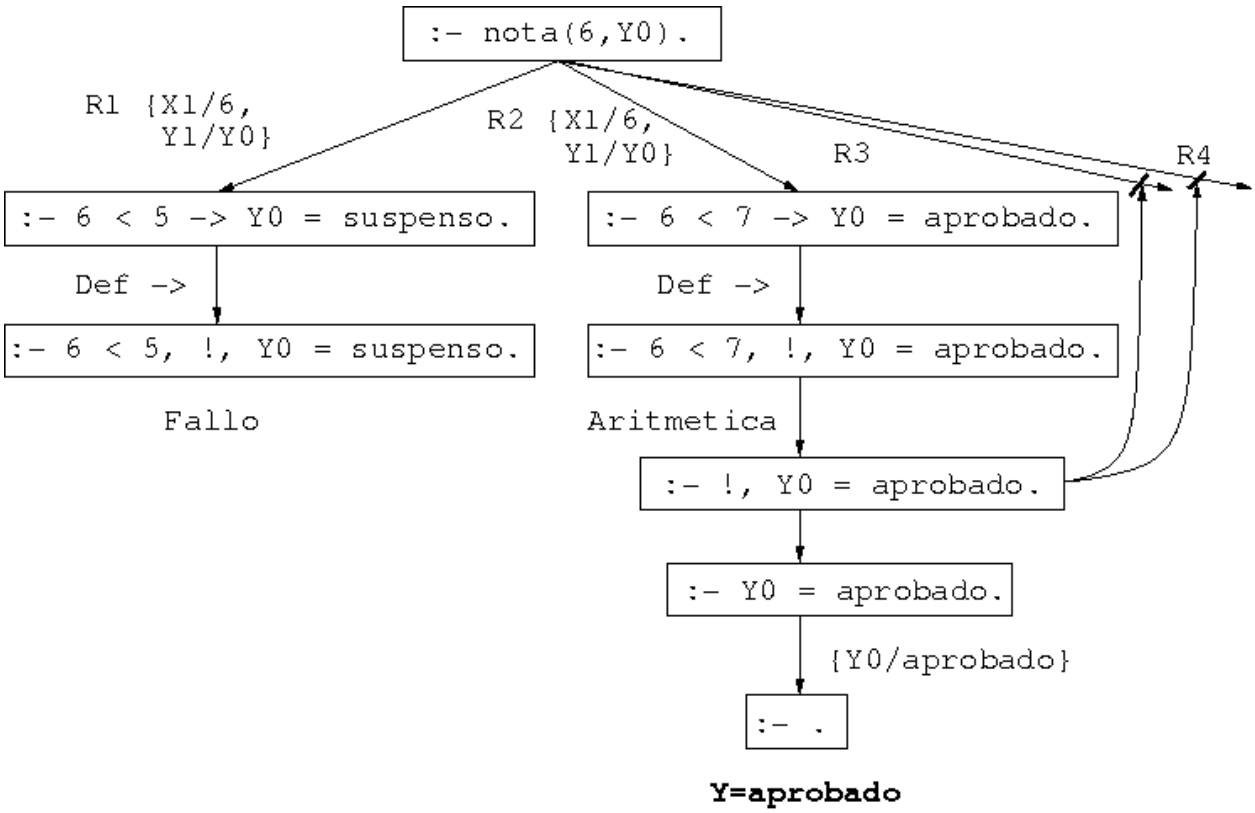
- Definición de `nota` con el condicional:

```
nota(X,Y) :-
   X < 5 -> Y = suspenso ;          % R1
   X < 7 -> Y = aprobado ;          % R2
   X < 9 -> Y = notable ;           % R3
   true  -> Y = sobresaliente.      % R4
```

- Definición del condicional y verdad:

```
P -> Q :- P, !, Q.                  % Def. ->
true.                               % Def. true
```

Árbol de deducción de `?- nota(6,Y).`



Bibliografía

Bibliografía

1. J.A. Alonso *Introducción a la programación lógica con Prolog.*
   - Cap. 7: "Control mediante corte"
   - Cap. 8: "Negación
2. I. Bratko *Prolog Programming for Artificial Intelligence (3 ed.)* (Addison–Wesley, 2001)
   - Cap. 5: "Controlling backtracking"
3. W.F. Clocksin y C.S. Mellish *Programming in Prolog (Fourth Edition)* (Springer Verlag, 1994)
   - Cap. 4: "Backtracking and the cut"
4. L. Sterling y E. Shapiro *The Art of Prolog (2nd Edition)* (The MIT Press, 1994)
   - Cap. 11: "Cuts and negation"

Capítulo 10

Programación lógica de segundo orden

Programación declarativa (2007–08)

Tema 10: Programación lógica de segundo orden

José A. Alonso Jiménez

Índice

1. Modificación de la base de conocimiento

1.1. Predicados de modificación de la base de conocimiento

Predicados `assert` **y** `retract`

- `assert(+Term)` inserta un hecho o una cláusula en la base de conocimientos. `Term` es insertado como última cláusula del predicado correspondiente.
- `retract(+Term)` elimina la primera cláusula de la base de conocimientos que unifica con `Term`.

```
?- hace_frio.
No
?- assert(hace_frio).
Yes
?- hace_frio.
Yes
?- retract(hace_frio).
Yes
?- hace_frio.
No
```

El predicado `listing`

- `listing(+Pred)` lista las cláusulas en cuya cabeza aparece el predicado `Pred`, Por ejemplo,

```
?- assert((gana(X,Y) :- rápido(X), lento(Y))).
?- listing(gana).
gana(A, B) :- rápido(A), lento(B).
?- assert(rápido(juan)),  assert(lento(jose)),
   assert(lento(luis)).
?- gana(X,Y).
X = juan  Y = jose ; X = juan  Y = luis ;
No
?- retract(lento(X)).
X = jose ; X = luis ;
No
?- gana(X,Y).
No
```

Los predicados `asserta` y `assertz`

- `asserta(+Term)` equivale a `assert/1`, pero `Term` es insertado como primera cláusula del predicado correspondiente.
- `assertz(+Term)` equivale a `assert/1`.

```
?- assert(p(a)),
   assertz(p(b)),
   asserta(p(c)).
Yes
?- p(X).
X = c ; X = a ; X = b ; No
?- listing(p).
p(c).
p(a).
p(b).
Yes
```

Los predicados `retractall` y `abolish`

- `retractall(+C)` elimina de la base de conocimientos todas las cláusulas cuya cabeza unifica con `C`.
- `abolish(+SimbPred/+Aridad)` elimina de la base de conocimientos todas las cláusulas que en su cabeza aparece el símbolo de predicado `SimbPred/Aridad`.

```
?- assert(p(a)), assert(p(b)).
?- retractall(p(_)).
?- p(a).
No
?- assert(p(a)), assert(p(b)).
?- abolish(p/1).
?- p(a).
% [WARNING: Undefined predicate: 'p/1']
No
```

1.2. Programa con modificación de la base de conocimiento

Programa con modificación de la base de conocimiento

- `crea_tabla` añade los hechos `producto(X,Y,Z)` donde `X` e `Y` son números de 0 a 9 y `Z` es el producto de `X` e `Y`. Por ejemplo,

```
?- crea_tabla.
Yes
?- listing(producto).
producto(0,0,0).
producto(0,1,0).
...
producto(9,8,72).
producto(9,9,81).
Yes
```

- Definición:

```
crea_tabla :-
   L = [0,1,2,3,4,5,6,7,8,9],
   member(X,L),
   member(Y,L),
   Z is X*Y,
   assert(producto(X,Y,Z)),
   fail.
crea_tabla.
```

- Calcular las descomposiciones de 6 en producto de dos números.

```
?- producto(A,B,6).
A=1 B=6 ;
A=2 B=3 ;
A=3 B=2 ;
A=6 B=1 ;
No
```

2. Todas las soluciones

2.1. Predicados de todas las soluciones

Lista de soluciones (`findall`)

- `findall(T,O,L)` se verifica si `L` es la lista de las instancias del término `T` que verifican el objetivo `O`.

```
?- assert(clase(a,voc)), assert(clase(b,con)),
   assert(clase(e,voc)), assert(clase(c,con)).
?- findall(X,clase(X,voc),L).
X = _G331   L = [a, e]
```

```
?- findall(_X,clase(_X,_Clase),L).
L = [a, b, e, c]
?- findall(X,clase(X,vocal),L).
X = _G355   L = []
?- findall(X,(member(X,[c,b,c]),member(X,[c,b,a])),L).
X = _G373   L = [c, b, c]
?- findall(X,(member(X,[c,b,c]),member(X,[1,2,3])),L).
X = _G373   L = []
```

Conjunto de soluciones (`setof`)

- `setof(T,O,L)` se verifica si `L` es la lista ordenada sin repeticiones de las instancias del término `T` que verifican el objetivo `O`.

```
?- setof(X,clase(X,Clase),L).
X = _G343   Clase = voc   L = [a, e] ;
X = _G343   Clase = con   L = [b, c] ;
No
?- setof(X,Y^clase(X,Y),L).
X = _G379   Y = _G380   L = [a, b, c, e]
?- setof(X,clase(X,vocal),L).
No
?- setof(X,(member(X,[c,b,c]),member(X,[c,b,a])),L).
X = _G361   L = [b, c]
?- setof(X,(member(X,[c,b,c]),member(X,[1,2,3])),L).
No
```

Multiconjunto de soluciones (`bagof`)

- `bagof(T,O,L)` se verifica si `L` es el multiconjunto de las instancias del término `T` que verifican el objetivo `O`.

```
?- bagof(X,clase(X,Clase),L).
X = _G343   Clase = voc   L = [a, e] ;
X = _G343   Clase = con   L = [b, c] ;
No
?- bagof(X,Y^clase(X,Y),L).
X = _G379   Y = _G380   L = [a, b, e, c]
?- bagof(X,clase(X,vocal),L).
No
?- bagof(X,(member(X,[c,b,c]),member(X,[c,b,a])),L).
X = _G361   L = [c, b, c]
?- bagof(X,(member(X,[c,b,c]),member(X,[1,2,3])),L).
No
```

2.2. Operaciones con conjuntos

Conjunto de todas las soluciones

- `setof0(T,O,L)` es como `setof` salvo en el caso en que ninguna instancia de `T` verifique `O`, en cuyo caso `L` es la lista vacía. Por ejemplo,

```
?- setof0(X,
          (member(X,[c,a,b]),member(X,[c,b,d])),
          L).
L = [b, c]
?- setof0(X,
          (member(X,[c,a,b]),member(X,[e,f])),
          L).
L = []
```

- Definición:

```
setof0(X,O,L) :- setof(X,O,L), !.
setof0(_,_,[]).
```

Intersección y unión

- `intersección(S,T,U)` se verifica si `U` es la intersección de `S` y `T`. Por ejemplo,

```
?- intersección([1,4,2],[2,3,4],U).
U = [2,4]
```

```
intersección(S,T,U) :-
   setof0(X, (member(X,S), member(X,T)), U).
```

- `unión(S,T,U)` se verifica si `U` es la unión de `S` y `T`. Por ejemplo,

```
?- unión([1,2,4],[2,3,4],U).
U = [1,2,3,4]
```

```
unión(S,T,U) :-
   setof(X, (member(X,S); member(X,T)), U).
```

Diferencia y conjunto potencia

- `diferencia(S,T,U)` se verifica si `U` es la diferencia de los conjuntos de `S` y `T`. Por ejemplo,

```
?- diferencia([5,1,2],[2,3,4],U).
U = [1,5]
```

```
diferencia(S,T,U) :-
   setof0(X,(member(X,S),not(member(X,T))),U).
```

- `partes(X,L)` se verifica si `L` es el conjunto de las partes de `X`. Por ejemplo,

```
?- partes([a,b,c],L).
L = [[],[a],[a,b],[a,b,c],[a,c],[b],[b,c],[c]]
```

```
partes(X,L) :-
   setof(Y,subconjunto(Y,X),L).
```

Cálculo de subconjuntos

- `subconjunto(-L1,+L2)` se verifica si `L1` es un subconjunto de `L2`. Por ejemplo,

```
?- subconjunto(L,[a,b]).
L = [a, b] ;
L = [a] ;
L = [b] ;
L = [] ;
No
```

```
subconjunto([],[]).
subconjunto([X|L1],[X|L2]) :-
   subconjunto(L1,L2).
subconjunto(L1,[_|L2]) :-
   subconjunto(L1,L2).
```

3. Transformación entre términos, átomos y listas

3.1. Transformación entre términos y listas

Relación de transformación entre términos y listas

- `?T =.. ?L` se verifica si `L` es una lista cuyo primer elemento es el functor del término `T` y los restantes elementos de `L` son los argumentos de `T`. Por ejemplo,

```
?- padre(juan,luis) =.. L.
L = [padre, juan, luis]
?- T =.. [padre, juan, luis].
T = padre(juan,luis)
```

Programa con transformación entre términos y listas

- `alarga(+F1,+N,-F2)` se verifica si `F1` y `F2` son figuras del mismo tipo y el tamaño de `F1` es el de `F2` multiplicado por `N`,

```
?- alarga(triángulo(3,4,5),2,F).
F = triángulo(6, 8, 10)
?- alarga(cuadrado(3),2,F).
F = cuadrado(6)
```

```
alarga(Figura1,Factor,Figura2) :-
   Figura1 =.. [Tipo|Arg1],
   multiplica_lista(Arg1,Factor,Arg2),
   Figura2 =.. [Tipo|Arg2].

multiplica_lista([],_,[]).
multiplica_lista([X1|L1],F,[X2|L2]) :-
   X2 is X1*F, multiplica_lista(L1,F,L2).
```

Las relaciones `functor` y `arg`

- `functor(T,F,A)` se verifica si `F` es el functor del término `T` y `A` es su aridad.
- `arg(N,T,A)` se verifica si `A` es el argumento del término `T` que ocupa el lugar `N`.

```
?- functor(g(b,c,d),F,A).
F = g
A = 3
?- functor(T,g,2).
T = g(_G237,_G238)
?- arg(2,g(b,c,d),X).
X = c
?- functor(T,g,3),arg(1,T,b),arg(2,T,c).
T = g(b, c, _G405)
```

3.2. Transformaciones entre átomos y listas

Relación de transformación entre átomos y listas: `name`

- `name(A,L)` se verifica si `L` es la lista de códigos ASCII de los caracteres del átomo `A`. Por ejemplo,

```
?- name(bandera,L).
L = [98, 97, 110, 100, 101, 114, 97]
?- name(A,[98, 97, 110, 100, 101, 114, 97]).
A = bandera
```

Programa con transformación entre átomos y listas

- `concatena_átomos(A1,A2,A3)` se verifica si `A3` es la concatenación de los átomos `A1` y `A2`. Por ejemplo,

```
?- concatena_átomos(pi,ojo,X).
X = piojo
```

```
concatena_átomos(A1,A2,A3) :-
   name(A1,L1),
   name(A2,L2),
   append(L1,L2,L3),
   name(A3,L3).
```

4. Procedimientos aplicativos

4.1. La relación `apply`

La relación `apply`

- `apply(T,L)` se verifica si es demostrable `T` después de aumentar el número de sus argumentos con los elementos de `L`; por ejemplo,

```
plus(2,3,X).                          =>  X=5
apply(plus,[2,3,X]).                  =>  X=5
apply(plus(2),[3,X]).                 =>  X=5
apply(plus(2,3),[X]).                 =>  X=5
apply(append([1,2]),[X,[1,2,3]]).     =>  X=[3]
```

```
n_apply(Término,Lista) :-
   Término =.. [Pred|Arg1],
   append(Arg1,Lista,Arg2),
   Átomo =.. [Pred|Arg2],
   Átomo.
```

4.2. La relación `maplist`

La relación `maplist`

- `maplist(P,L1,L2)` se verifica si se cumple el predicado `P` sobre los sucesivos pares de elementos de las listas `L1` y `L2`; por ejemplo,

```
?- succ(2,X).                  =>  3
?- succ(X,3).                  =>  2
?- maplist(succ,[2,4],[3,5]).  =>  Yes
?- maplist(succ,[0,4],[3,5]).  =>  No
?- maplist(succ,[2,4],Y).      =>  Y = [3,5]
?- maplist(succ,X,[3,5]).      =>  X = [2,4]
```

```
n_maplist(_,[],[]).
n_maplist(R,[X1|L1],[X2|L2]) :-
   apply(R,[X1,X2]),
   n_maplist(R,L1,L2).
```

5. Relaciones sobre términos

5.1. Predicados sobre tipos de término

Predicados sobre tipos de término

- `var(T)` se verifica si `T` es una variable.
- `atom(T)` se verifica si `T` es un átomo.
- `number(T)` se verifica si `T` es un número.
- `compound(T)` se verifica si `T` es un término compuesto.
- `atomic(T)` se verifica si `T` es una variable, átomo, cadena o número.

```
?- var(X1).              =>  Yes
?- atom(átomo).          =>  Yes
?- number(123).          =>  Yes
?- number(-25.14).       =>  Yes
?- compound(f(X,a)).     =>  Yes
?- compound([1,2]).      =>  Yes
?- atomic(átomo).        =>  Yes
?- atomic(123).          =>  Yes
```

Programa con predicados sobre tipos de término

- `suma_segura(X,Y,Z)` se verifica si `X` e `Y` son enteros y `Z` es la suma de `X` e `Y`. Por ejemplo,

```
?- suma_segura(2,3,X).
X = 5
Yes
?- suma_segura(7,a,X).
No
?- X is 7 + a.
% [WARNING: Arithmetic: ‘a’ is not a function]
```

```
suma_segura(X,Y,Z) :-
   number(X),
   number(Y),
   Z is X+Y.
```

5.2. Comparación y ordenación de términos

Relaciones de comparación de términos

- `T1 = T2` se verifica si `T1` y `T2` son unificables.
- `T1 == T2` se verifica si `T1` y `T2` son idénticos.
- `T1 \== T2` se verifica si `T1` y `T2` no son idénticos.

```
?- f(X) = f(Y).
X = _G164
Y = _G164
Yes
?- f(X) == f(Y).
No
```

```
?- f(X) == f(X).
X = _G170
Yes
```

Programa con comparación de términos

- `cuenta(A,L,N)` se verifique si `N` es el número de ocurrencias del átomo `A` en la lista `L`. Por ejemplo,

```
?- cuenta(a,[a,b,a,a],N).
N = 3
?- cuenta(a,[a,b,X,Y],N).
N = 1
```

```
cuenta(_,[],0).
cuenta(A,[B|L],N) :-
   A == B, !,
   cuenta(A,L,M),
   N is M+1.
cuenta(A,[B|L],N) :-
   % A \== B,
   cuenta(A,L,N).
```

Relaciones de ordenación de términos

- `T1 @< T2` se verifica si el término `T1` es anterior que `T2` en el orden de términos de Prolog.

```
?- ab @< ac.            =>  Yes
?- 21 @< 123.           =>  Yes
?- 12 @< a.             =>  Yes
?- g @< f(b).           =>  Yes
?- f(b) @< f(a,b).      =>  Yes
?- [a,1] @< [a,3].      =>  Yes
```

- `sort(+L1,-L2)` se verifica si `L2` es la lista obtenida ordenando de manera creciente los distintos elementos de `L1` y eliminando las repeticiones.

```
?- sort([c4,2,a5,2,c3,a5,2,a5],L).
L = [2, a5, c3, c4]
```

Bibliografía

Bibliografía

1. J.A. Alonso *Introducción a la programación lógica con Prolog.*
   - Cap. 10 "Predicados sobre tipos de término"
   - Cap. 11 "Comparación y ordenación de términos"g
   - Cap. 12 "Procesamiento de términos"
   - Cap. 13 "Procedimientos aplicativos"
   - Cap. 14 "Todas las soluciones"
2. I. Bratko *Prolog Programming for Artificial Intelligence (3 ed.)* (Addison–Wesley, 2001)
   - Cap. 7: "More Built–in Procedures"
3. T. Van Le *Techniques of Prolog Programming* (John Wiley, 1993)
   - Cap. 6: "Advanced programming techniques and data structures"
4. W.F. Clocksin y C.S. Mellish *Programming in Prolog (Fourth Edition)* (Springer Verlag, 1994)
   - Cap. 6: "Built–in Predicates"

Capítulo 11

Estilo y eficiencia en programación lógica

Programación declarativa (2007–08)

Tema 11: Estilo y eficiencia en programación lógica

José A. Alonso Jiménez

Índice

1. Principios generales de buena programación

1.1. Criterios para juzgar la bondad de un programa

Criterios para juzgar la bondad de un programa

- Corrección.
- Eficiencia.
- Facilidad de lectura.
- Modificabilidad: Modular y transparente.
- Robustez.
- Documentación.

1.2. Heurísticas para la programación (Ref. Polya)

Heurísticas para la programación (Ref. Polya)

1. Entender el problema.
2. Diseñar una solución.
3. Escribir el programa.
4. Revisar la solución

2. Métodos de mejora de la eficiencia

2.1. Orden de los literales

Orden de los literales y corrección

- Programas:

```
siguiente(a,1).
siguiente(1,b).

sucesor_1(X,Y) :-
   siguiente(X,Y).
sucesor_1(X,Y) :-
   siguiente(X,Z),
   sucesor_1(Z,Y).
```

```
?- sucesor_1(X,Y).

X = a Y = 1 ; X = 1 Y = b ; X = a Y = b ; No
?- findall(X-Y,sucesor_1(X,Y),L).

L = [a-1, 1-b, a-b]
```

- Programas:

```
siguiente(a,1).
siguiente(1,b).

sucesor_2(X,Y) :-
   siguiente(X,Y).
sucesor_2(X,Y) :-
   sucesor_2(Z,Y),
   siguiente(X,Z).
```

```
?- sucesor_2(X,Y).

X = a  Y = 1 ; X = 1  Y = b ; X = a  Y = b ;
ERROR: Out of local stack
```

Orden de los literales y eficiencia

- Orden de los literales y eficiencia

```
?- listing(número).
número(1). número(2). ... número(1000).

?- listing(múltiplo_de_100).
múltiplo_de_100(100). ... múltiplo_de_100(1000).

?- time((número(_N),múltiplo_de_100(_N))).
101 inferences in 0.00 seconds
Yes

?- time((múltiplo_de_100(_N),número(_N))).
2 inferences in 0.00 seconds
Yes
```

Combinaciones

- `combinación(+L1,+N,-L2)` se verifica si `L2` es una combinación `N`–aria de `L1`. Por ejemplo,

```
?- combinación([a,b,c],2,L).
L = [a, b] ;   L = [a, c] ;   L = [b, c] ;  No
```

```
combinación_1(L1,N,L2) :-
   subconjunto(L2,L1),
   length(L2,N).

combinación_2(L1,N,L2) :-
   length(L2,N),
   subconjunto(L2,L1).

combinación(L1,N,L2) :-
   combinación_2(L1,N,L2).
```

- `combinaciones(+L1,+N,-L2)` se verifica si `L2` es la lista de las combinaciones `N`–arias de `L1`. Por ejemplo,

```
?- combinaciones([a,b,c],2,L).
L = [[a, b], [a, c], [b, c]]
```

```
combinaciones_1(L1,N,L2) :-
   findall(L,combinación_1(L1,N,L),L2).

combinaciones_2(L1,N,L2) :-
   findall(L,combinación_2(L1,N,L),L2).

combinaciones(L1,N,L2) :-
   combinaciones_2(L1,N,L2).
```

Comparación de eficiencia de combinaciones

```
?- findall(_N,between(1,6,_N),_L1),
   time(combinaciones_1(_L1,2,_L2)),
   time(combinaciones_2(_L1,2,_L2)).
429 inferences in 0.00 seconds
 92 inferences in 0.00 seconds
?- findall(_N,between(1,12,_N),_L1),
```

```
   time(combinaciones_1(_L1,2,_L2)),
   time(combinaciones_2(_L1,2,_L2)).
28,551 inferences in 0.01 seconds
   457 inferences in 0.00 seconds
?- findall(_N,between(1,24,_N),_L1),
   time(combinaciones_1(_L1,2,_L2)),
   time(combinaciones_2(_L1,2,_L2)).
117,439,971 inferences in 57.59 seconds
      2,915 inferences in  0.00 seconds
```

Permutaciones

- `select(?X,?L1,?L2)` se verifica si `X` es un elemento de la lista `L1` y `L2` es la lista de los restantes elementos. Por ejemplo,

```
?- select(X,[a,b,c],L).
X = a   L = [b, c] ;
X = b   L = [a, c] ;
X = c   L = [a, b] ;
No

?- select(a,L,[b,c]).
L = [a, b, c] ;
L = [b, a, c] ;
L = [b, c, a] ;
No
```

- `permutación(+L1,-L2)` se verifica si `L2` es una permutación de `L1`. Por ejemplo,

```
?- permutación([a,b,c],L).
L = [a, b, c] ;  L = [a, c, b] ;
L = [b, a, c] ;  L = [b, c, a] ;
L = [c, a, b] ;  L = [c, b, a] ;
No
```

```
permutación([],[]).
permutación(L1,[X|L2]) :-
   select(X,L1,L3),
   permutación(L3,L2).
```

Predefinida `permutation`.

Variaciones

- `variación(+L1,+N,-L2)` se verifica si `L2` es una variación `N`–aria de `L1`. Por ejemplo,

```
?- variación([a,b,c],2,L).
L=[a,b];L=[a,c];L=[b,a];L=[b,c];L=[c,a];L=[c,b];No
```

```
variación_1(L1,N,L2) :-
   combinación(L1,N,L3), permutación(L3,L2).

variación_2(_,0,[]).
variación_2(L1,N,[X|L2]) :-
   N > 0, M is N-1,
   select(X,L1,L3),
   variación_2(L3,M,L2).

variación(L1,N,L2) :- variación_2(L1,N,L2).
```

- `variaciones(+L1,+N,-L2)` se verifica si `L2` es la lista de las variaciones `N`–arias de `L1`. Por ejemplo,

```
?- variaciones([a,b,c],2,L).
L = [[a,b],[a,c],[b,a],[b,c],[c,a],[c,b]]
```

```
variaciones_1(L1,N,L2) :-
   setof(L,variación_1(L1,N,L),L2).

variaciones_2(L1,N,L2) :-
   setof(L,variación_2(L1,N,L),L2).

variaciones(L1,N,L2) :-
   variaciones_2(L1,N,L2).
```

Comparación de eficiencia de variaciones

```
?- findall(N,between(1,100,N),L1),
   time(variaciones_1(L1,2,L2)),
   time(variaciones_2(L1,2,L2)).
221,320 inferences in 0.27 seconds
 40,119 inferences in 0.11 seconds
?- findall(N,between(1,200,N),L1),
```

```
   time(variaciones_1(L1,2,L2)),
   time(variaciones_2(L1,2,L2)).
1,552,620 inferences in 2.62 seconds
  160,219 inferences in 0.67 seconds
?- findall(N,between(1,400,N),L1),
   time(variaciones_1(L1,2,L2)),
   time(variaciones_2(L1,2,L2)).
11,545,220 inferences in 19.02 seconds
   640,419 inferences in  2.51 seconds
```

2.2. Generación y prueba

Ordenación por generación y prueba

- `ordenación(+L1,-L2)` se verifica si `L2` es la lista obtenida ordenando la lista `L1` en orden creciente. Por ejemplo,

```
?- ordenación([2,1,a,2,b,3],L).
L = [a,b,1,2,2,3]
```

```
ordenación(L,L1) :-
   permutación(L,L1),
   ordenada(L1).
```

```
ordenada([]).
ordenada([_]).
ordenada([X,Y|L]) :-
   X @=< Y,
   ordenada([Y|L]).
```

Ordenación por selección

```
ordenación_por_selección(L1,[X|L2]) :-
   selecciona_menor(X,L1,L3),
   ordenación_por_selección(L3,L2).
ordenación_por_selección([],[]).

selecciona_menor(X,L1,L2) :-
   select(X,L1,L2),
   not((member(Y,L2), Y @< X)).
```

Ordenación por divide y vencerás

```
ordenación_rápida([],[]).
ordenación_rápida([X|R],Ordenada) :-
   divide(X,R,Menores,Mayores),
   ordenación_rápida(Menores,Menores_ord),
   ordenación_rápida(Mayores,Mayores_ord),
   append(Menores_ord,[X|Mayores_ord],Ordenada).

divide(_,[],[],[]).
divide(X,[Y|R],[Y|Menores],Mayores) :-
   Y @< X, !,
   divide(X,R,Menores,Mayores).
divide(X,[Y|R],Menores,[Y|Mayores]) :-
   \% Y @>= X,
   divide(X,R,Menores,Mayores).
```

Ordenación: comparación de eficiencia

Comparación de la ordenación de la lista `[N,N-1,N-2,...,2,1]`

N	`ordena`	`selección`	`rápida`
1	5 inf 0.00 s	8 inf 0.00 s	5 inf 0.00 s
2	10 inf 0.00 s	19 inf 0.00 s	12 inf 0.00 s
4	80 inf 0.00 s	67 inf 0.00 s	35 inf 0.00 s
8	507,674 inf 0.33 s	323 inf 0.00 s	117 inf 0.00 s
16		1,923 inf 0.00 s	425 inf 0.00 s
32		13,059 inf 0.01 s	1,617 inf 0.00 s
64		95,747 inf 0.05 s	6,305 inf 0.00 s
128		732,163 inf 0.40 s	24,897 inf 0.01 s
256		5,724,163 inf 2.95 s	98,945 inf 0.05 s
512		45,264,899 inf 22.80 s	394,497 inf 0.49 s

Cuadrado mágico por generación y prueba

- Enunciado: Colocar los números 1,2,3,4,5,6,7,8,9 en un cuadrado 3x3 de forma que todas las líneas (filas, columnas y diagonales) sumen igual.

A	B	C
D	E	F
G	H	I

```
cuadrado_1([A,B,C,D,E,F,G,H,I]) :-
   permutación([1,2,3,4,5,6,7,8,9],
               [A,B,C,D,E,F,G,H,I]),
   A+B+C =:= 15,  D+E+F =:= 15,
   G+H+I =:= 15,  A+D+G =:= 15,
   B+E+H =:= 15,  C+F+I =:= 15,
   A+E+I =:= 15,  C+E+G =:= 15.
```

- Cálculo de soluciones:

```
?- cuadrado_1(L).
L = [6, 1, 8, 7, 5, 3, 2, 9, 4] ;
L = [8, 1, 6, 3, 5, 7, 4, 9, 2]
Yes
```

- Cálculo del número soluciones:

```
?- findall(_X,cuadrado_1(_X),_L),length(_L,N).
N = 8
Yes
```

Cuadrado mágico por comprobaciones parciales

- Programa 2:

```
cuadrado_2([A,B,C,D,E,F,G,H,I]) :-
   select(A,[1,2,3,4,5,6,7,8,9],L1),
   select(B,L1,L2),
   select(C,L2,L3),  A+B+C =:= 15,
   select(D,L3,L4),
   select(G,L4,L5),  A+D+G =:= 15,
   select(E,L5,L6),  C+E+G =:= 15,
   select(I,L6,L7),  A+E+I =:= 15,
   select(F,L7,[H]), C+F+I =:= 15, D+E+F =:= 15.
```

- Cálculo de soluciones:

```
?- cuadrado_2(L).
L = [2, 7, 6, 9, 5, 1, 4, 3, 8] ;
L = [2, 9, 4, 7, 5, 3, 6, 1, 8]
Yes
```

- Comprobación que las dos definiciones dan las *mismas* soluciones.

```
?- setof(_X,cuadrado_1(_X),_L),
   setof(_X,cuadrado_2(_X),_L).
Yes
```

Comparación de eficiencia del cuadrado mágico

```
?- time(cuadrado_1(_X)).
161,691 inferences in 0.58 seconds

?- time(cuadrado_2(_X)).
  1,097 inferences in 0.01 seconds

?- time(setof(_X,cuadrado_1(_X),_L)).
812,417 inferences in 2.90 seconds

?- time(setof(_X,cuadrado_2(_X),_L)).
  7,169 inferences in 0.02 seconds
```

2.3. Uso de listas o términos compuestos

Uso de listas o términos compuestos

- Ejemplos:

```
?- setof(N,between(1,1000,N),L1),
   asserta(con_lista(L1)),
   Term =.. [f|L1],
   asserta(con_term(Term)).
?- listing(con_lista).
con_lista([1, 2, ..., 999, 1000]).
?- listing(con_term).
con_term(f(1, 2,...,999, 1000)).
?- time((con_lista(_L),member(1000,_L))).
1,001 inferences in 0.00 seconds
?- time((con_term(_T),arg(_,_T,1000))).
2 inferences in 0.00 seconds
```

- En general, sólo usar listas cuando el número de argumentos no es fijo o es desconocido.

2.4. Uso de la unificación implícita

Uso de la unificación implícita

- `intercambia(+T1,-T2)` se verifica si `T1` es un término con dos argumentos y `T2` es un término con el mismo símbolo de función que `T1` pero sus argumentos intercambiados. Por ejemplo,

```
?- intercambia(opuesto(3,-3),T).
T = opuesto(-3, 3)
```

```
intercambia_1(T1, T2) :-
   functor(T1,F,2),   functor(T2,F,2),
   arg(1,T1,X1),      arg(2,T1,Y1),
   arg(1,T2,X2),      arg(2,T2,Y2),
   X1 = Y2,           X2 = Y1.

intercambia_2(T1,T2) :-
   T1 =.. [F,X,Y],
   T2 =.. [F,Y,X].
```

- `lista_de_tres(L)` se verifica si `L` es una lista de 3 elementos.
- Definición 1:

```
lista_de_tres(L) :-
   length(L, N),
   N = 3.
```

- Definición 2 (sin unificación explícita):

```
lista_de_tres(L) :-
   length(L,3).
```

- Definición 3 (sin length):

```
lista_de_tres([_,_,_]).
```

2.5. Acumuladores

Acumuladores

- `inversa(+L1,-L2)`, `reverse(L1,L2)`, se verifica si `L2` es la lista inversa de `L1`. Por ejemplo,

```
?- inversa([a,b,c],L).
L = [c, b, a]
```

- Definición de `inversa` con `append` (no recursiva final):

```
inversa_1([],[]).
inversa_1([X|L1],L2) :-
   inversa_1(L1,L3),
   append(L3,[X],L2).
```

- Definición de `inversa` con acumuladores (recursiva final):

```
inversa_2(L1,L2) :-
   inversa_2_aux(L1,[],L2).

inversa_2_aux([],L,L).
inversa_2_aux([X|L],Acum,L2) :-
   inversa_2_aux(L,[X|Acum],L2).
```

Comparación de eficiencia

```
?- findall(_N,between(1,1000,_N),_L1),
   time(inversa_1(_L1,_)), time(inversa_2(_L1,_)).
501,501 inferences in 0.40 seconds
  1,002 inferences in 0.00 seconds

?- findall(_N,between(1,2000,_N),_L1),
   time(inversa_1(_L1,_)), time(inversa_2(_L1,_)).
2,003,001 inferences in 1.59 seconds
    2,002 inferences in 0.00 seconds

?- findall(_N,between(1,4000,_N),_L1),
   time(inversa_1(_L1,_)), time(inversa_2(_L1,_)).
8,006,001 inferences in 8.07 seconds
    4,002 inferences in 0.02 seconds
```

2.6. Uso de lemas

Uso de lemas

- `fibonacci(N,X)` se verifica si `X` es el `N`–ésimo término de la sucesión de Fibonacci, definida por
  `f(1) = 1`
  `f(2) = 1`
  `f(n) = f(n-1)+f(n-2)`, si `n > 2`

```
fibonacci_1(1,1).
fibonacci_1(2,1).
fibonacci_1(N,F) :-
   N > 2,
   N1 is N-1,
   fibonacci_1(N1,F1),
   N2 is N-2,
   fibonacci_1(N2,F2),
   F is F1 + F2.
```

- Definición de Fibonacci con lemas

```
:- dynamic fibonacci_2/2.

fibonacci_2(1,1).
fibonacci_2(2,1).
fibonacci_2(N,F) :-
   N > 2,
   N1 is N-1,
   fibonacci_2(N1,F1),
   N2 is N-2,
   fibonacci_2(N2,F2),
   F is F1 + F2,
   asserta(fibonacci_2(N,F)).
```

Comparación de eficiencia en el uso de lemas

```
?- time(fibonacci_1(20,N)).
40,585 inferences in 1.68 seconds
N = 6765

?- time(fibonacci_2(20,N)).
127 inferences in 0.00 seconds
N = 6765
```

```
?- listing(fibonacci_2).
fibonacci_2(20, 6765). fibonacci_2(19, 4181). ...
```

```
?- time(fibonacci_2(20,N)).
3 inferences in 0.00 seconds
N = 6765
```

Uso de lemas y acumuladores

- Definición de Fibonacci con un acumulador

```
fibonacci_3(N,F) :-
   fibonacci_3_aux(N,_,F).
```

`fibonacci_3_aux(+N,-F1,-F2)` se verifica si `F1` es fibonacci de `N-1` y `F2` es fibonacci de `N`.

```
fibonacci_3_aux(0,_,0).
fibonacci_3_aux(1,0,1).
fibonacci_3_aux(N,F1,F) :-
   N > 1,
   N1 is N-1,
   fibonacci_3_aux(N1,F2,F1),
   F is F1 + F2.
```

Comparación de eficiencia en el uso de lemas y acumuladores

- Comparación;

```
?- time(fibonacci_1(20,N)).
40,585 inferences in 1.68 seconds

?- time(fibonacci_2(20,N)).
127 inferences in 0.00 seconds

?- time(fibonacci_3(20,N)).
21 inferences in 0.00 seconds
```

2.7. Determinismo

Determinismo

- `descompone(+E,-N1,-N2)` se verifica si `N1` y `N2` son dos enteros no negativos tales que `N1+N2=E`.
- Definición no determinista:

```
descompone_1(E, N1, N2) :-
   between(0, E, N1),
   between(0, E, N2),
   E =:= N1 + N2.
```

- Definición determinista:

```
descompone_2(E, N1, N2) :-
   between(0, E, N1),
   N2 is E - N1.
```

- Comparación de eficiencia:

```
?- time(setof(_N1+_N2,descompone_1(1000,_N1,_N2),_L)).
1,004,019 inferences in 1.29 seconds

?- time(setof(_N1+_N2,descompone_2(1000,_N1,_N2),_L)).
2,018 inferences in 0.01 seconds
```

2.8. Añadir al principio

Añadir al principio

- `lista_de_cuadrados(+N,?L)` se verifica si `L` es la lista de los cuadrados de los números de `1` a `N`. Por ejemplo,

```
?- lista_de_cuadrados(5,L).
L = [1, 4, 9, 16, 25]
```

- Programa 1 (añadiendo por detrás):

```
lista_de_cuadrados_1(1,[1]).
lista_de_cuadrados_1(N,L) :-
   N > 1,
   N1 is N-1,
   lista_de_cuadrados_1(N1,L1),
   M is N*N,
   append(L1,[M],L).
```

- Programa 2 (añadiendo por delante):

```
lista_de_cuadrados_2(N,L) :-
   lista_de_cuadrados_2_aux(N,L1),
   reverse(L1,L).

lista_de_cuadrados_2_aux(1,[1]).
lista_de_cuadrados_2_aux(N,[M|L]) :-
   N > 1,
   M is N*N,
```

```
   N1 is N-1,
   lista_de_cuadrados_2_aux(N1,L).
```

- Programa 3 (con `findall`):

```
lista_de_cuadrados_3(N,L) :-
   findall(M,(between(1,N,X), M is X*X),L).
```

- Comparación:

```
?- time(lista_de_cuadrados_1(10000,_L)).
50,044,996 inferences in 24.34 seconds
Yes

?- time(lista_de_cuadrados_2(10000,_L)).
50,000 inferences in 0.06 seconds
Yes

?- time(lista_de_cuadrados_3(10000,_L)).
20,012 inferences in 0.04 seconds
Yes
```

2.9. Listas de diferencias

Listas de diferencias

- Representaciones de `[a,b,c]` como listas de diferencias:

```
[a,b,c,d] - [d]
[a,b,c,1,2,3] - [1,2,3]
[a,b,c|X] - X
[a,b,c] - []
```

- `conc_ld(LD1,LD2,LD3)` se verifica si `LD3` es la lista de diferencia correspondiente a la concatenación de las listas de diferencia `LD1` y `LD2`. Por ejemplo,

```
?- conc_ld([a,b|RX]-RX,[c,d|RY]-RY,Z-[]).
RX = [c, d]   RY = []   Z = [a, b, c, d]
?- conc_ld([a,b|_RX]-_RX,[c,d|_RY]-_RY,Z-[]).
Z = [a, b, c, d]
```

```
conc_ld(A-B,B-C,A-C).
```

Bibliografía

Bibliografía

1. I. Bratko *Prolog Programming for Artificial Intelligence (2nd ed.)* (Addison–Wesley, 1990)
   - Cap. 8: "Programming Style and Technique"
2. W.F. Clocksin y C.S. Mellish *Programming in Prolog (Fourth Edition)* (Springer Verlag, 1994)
   - Cap. 6: "Using Data Structures"
3. M.A. Covington *Efficient Prolog: A Practical Guide*

Capítulo 12

Aplicaciones de PD: Problemas de grafos y de las reinas

Programación declarativa (2007–08)

Tema 12: Problemas de grafos y de las reinas

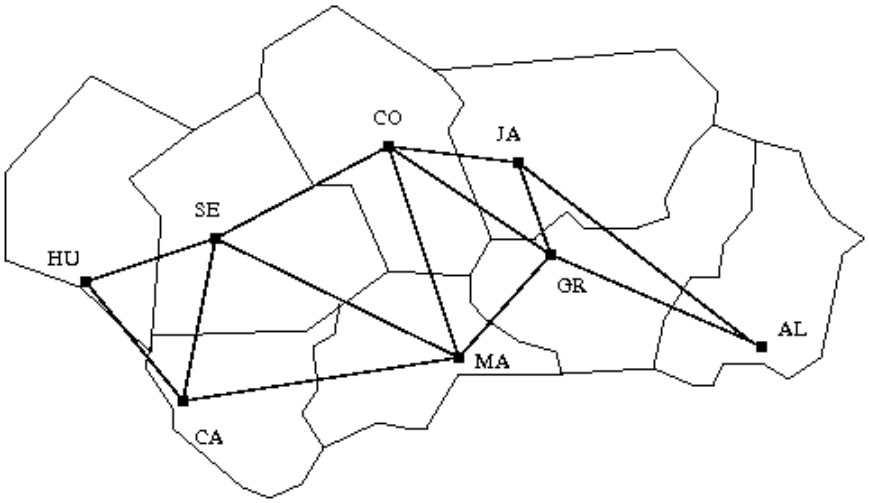
José A. Alonso Jiménez

Índice

1. Problemas de grafos

1.1. Representación de grafos

Grafo de Andalucía



Representación del grafo

- `arcos(+L)` se verifica si `L` es la lista de arcos del grafo.

```
arcos([huelva-sevilla,  huelva-cádiz,
       cádiz-sevilla,   sevilla-málaga,
       sevilla-córdoba, córdoba-málaga,
       córdoba-granada, córdoba-jaén,
       jaén-granada,    jaén-almería,
       granada-almería]).
```

Adyacencia y nodos

- `adyacente(?X,?Y)` se verifica si `X` e `Y` son adyacentes.

```
adyacente(X,Y) :-
   arcos(L),
   (member(X-Y,L) ; member(Y-X,L)).
```

- `nodos(?L)` se verifica si `L` es la lista de nodos.

```
nodos(L) :-
   setof(X,Y^adyacente(X,Y),L).
```

1.2. Caminos en un grafo

Caminos

- `camino(+A,+Z,-C)` se verifica si `C` es un camino en el grafo desde el nodo `A` al `Z`. Por ejemplo,

```
?- camino(sevilla,granada,C).
C = [sevilla, córdoba, granada] ;
C = [sevilla, málaga, córdoba, granada]
Yes
```

```
camino(A,Z,C) :-
   camino_aux(A,[Z],C).
```

- `camino_aux(+A,+CP,-C)` se verifica si `C` es una camino en el grafo compuesto de un camino desde `A` hasta el primer elemento del camino parcial `CP` (con nodos distintos a los de `CP`) junto `CP`.

```
camino_aux(A,[A|C1],[A|C1]).
camino_aux(A,[Y|C1],C) :-
   adyacente(X,Y),
   not(member(X,[Y|C1])),
   camino_aux(A,[X,Y|C1],C).
```

1.3. Caminos hamiltonianos en un grafo

Caminos hamiltonianos

- `hamiltoniano(-C)` se verifica si `C` es un camino hamiltoniano en el grafo (es decir, es un camino en el grafo que pasa por todos sus nodos una vez). Por ejemplo,

```
?- hamiltoniano(C).
C = [almería, jaén, granada, córdoba, málaga, sevilla, huelva, cádiz]
?- findall(_C,hamiltoniano(_C),_L), length(_L,N).
N = 16
```

- Primera definición de `hamiltoniano`

```
hamiltoniano_1(C) :-
   camino(_,_,C),
   nodos(L),
   length(L,N),
   length(C,N).
```

- Segunda definición de `hamiltoniano`

```
hamiltoniano_2(C) :-
   nodos(L),
   length(L,N),
   length(C,N),
   camino(_,_,C).
```

- Comparación de eficiencia

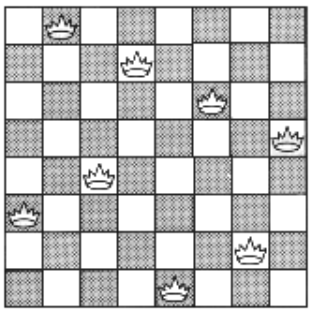
```
?- time(findall(_C,hamiltoniano_1(_C),_L)).
37,033 inferences in 0.03 seconds (1234433 Lips)
?- time(findall(_C,hamiltoniano_2(_C),_L)).
13,030 inferences in 0.01 seconds (1303000 Lips)
```

2. El problema de las reinas

2.1. Especificación del problema de las reinas

El problema de las 8 reinas

- El problema de las ocho reinas consiste en colocar 8 reinas en un tablero rectangular de dimensiones 8 por 8 de forma que no se encuentren más de una en la misma línea: horizontal, vertical o diagonal.



2.2. Representación mediante filas y columnas

Representación mediante filas y columnas

- Sesión:

```
?- tablero(S), solución(S).
S = [1-4, 2-2, 3-7, 4-3, 5-6, 6-8, 7-5, 8-1] ;
```

```
S = [1-5, 2-2, 3-4, 4-7, 5-3, 6-8, 7-6, 8-1] ;
S = [1-3, 2-5, 3-2, 4-8, 5-6, 6-4, 7-7, 8-1]
Yes
```

- `tablero(L)` se verifica si `L` es una lista de posiciones que representan las coordenadas de 8 reinas en el tablero.

```
tablero(L) :-
   findall(X-_Y,between(1,8,X),L).
```

- `solución_1(?L)` se verifica si `L` es una lista de pares de números que representan las coordenadas de una solución del problema de las 8 reinas.

```
solución_1([]).
solución_1([X-Y|L]) :-
   solución_1(L),
   member(Y,[1,2,3,4,5,6,7,8]),
   no_ataca(X-Y,L).
```

- `no_ataca([X,Y],L)` se verifica si la reina en la posición `(X,Y)` no ataca a las reinas colocadas en las posiciones correspondientes a los elementos de la lista `L`.

```
no_ataca(_,[]).
no_ataca(X-Y,[X1-Y1|L]) :-
   X =\= X1,       Y =\= Y1,
   X-X1 =\= Y-Y1,  X-X1 =\= Y1-Y,
   no_ataca(X-Y,L).
```

2.3. Representación mediante columnas

Representación mediante columnas

- `solución_2(L)` se verifica si `L` es una lista de 8 números, $[n_1, \ldots, n_8]$, de forma que si las reinas se colocan en las casillas $(1, n_1)$,...,$(8, n_8)$, entonces no se atacan entre sí.

```
solución_2(L) :-
   permutación([1,2,3,4,5,6,7,8],L),
   segura(L).
```

- `segura(L)` se verifica si `L` es una lista de `m` números $[n_1, \ldots, n_m]$ tal que las reinas colocadas en las posiciones $(x, n_1), \ldots, (x + m, n_m)$ no se atacan entre sí.

```
segura([]).
segura([X|L]) :-
   segura(L),
   no_ataca(X,L,1).
```

- `no_ataca(Y,L,D)` se verifica si `Y` es un número, `L` es una lista de números $[n_1, \ldots, n_m]$ y `D` es un número tales que las reinas colocada en la posición `(X,Y)` no ataca a las colocadas en las posiciones $(X + D, n_1), \ldots, (X + D + m, n_m)$.

```
no_ataca(_,[],_).
no_ataca(Y,[Y1|L],D) :-
   Y1-Y =\= D,
   Y-Y1 =\= D,
   D1 is D+1,
   no_ataca(Y,L,D1).
```

2.4. Representación mediante filas, columnas y diagonales

Representación mediante filas, columnas y diagonales

- `solución_3(?L)` se verifica si `L` es una lista de 8 números, $[n_1, \ldots, n_8]$, de forma que si las reinas se colocan en las casillas $(1, n_1), \ldots, (8, n_8)$, entonces no se atacan entre sí.

```
solución_3(L) :-
   solución_3_aux(
      L,
      [1,2,3,4,5,6,7,8],
      [1,2,3,4,5,6,7,8],
      [-7,-6,-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,7],
      [2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16]).
```

- `solución_3_aux(?L,+Dx,+Dy,+Du,+Dv)` se verifica si `L` es una permutación de los elementos de `Dy` de forma que si `L` es $[y_1, \ldots, y_n]$ y `Dx` es $[1, \ldots, n]$, entonces $y_j - j$ $(1 \leq j \leq n)$ son elementos distintos de `Du` e $y_j + j$ $(1 \leq j \leq n)$ son elementos distintos de `Dv`.

```
solucion_aux([],[],_Dy,_Du,_Dv).
solucion_aux([Y|Ys],[X|Dx1],Dy,Du,Dv) :-
   select(Y,Dy,Dy1),
   U is X-Y,
   select(U,Du,Du1),
```

```
    V is X+Y,
    select(V,Dv,Dv1),
    solucion_aux(Ys,Dx1,Dy1,Du1,Dv1).
```

Comparaciones de eficiencia

```
?- time((findall(_S,(tablero_1(_S), solucion_1(_S)),_L),length(_L,N))).
211,330 inferences in 0.12 seconds (1761083 Lips)
N = 92

?- time((findall(_S,solución_2(_S),_L),length(_L,N))).
1,422,301 inferences in 0.72 seconds (1975418 Lips)
N = 92

?- time((findall(_S,solucion_3(_S),_L),length(_L,N))).
120,542 inferences in 0.07 seconds (1722029 Lips)
N = 92
```

Búsqueda de todas las soluciones para `N` reinas:

	solución 1		solución 2		solución 3	
N	inferencias	seg.	inferencias	seg.	inferencias	seg.
4	401	0.00	543	0.00	546	0.00
6	8,342	0.00	20,844	0.01	6,660	0.01
8	195,628	0.15	1,422,318	0.91	120,614	0.09
10	5,303,845	4.05	150,300,540	96.82	2,774,095	2.01
12	182,574,715	147.22			83,067,721	64.93

Bibliografía

Bibliografía

1. I. Bratko *Prolog Programming for Artificial Intelligence (2nd ed.)* (Addison–Wesley, 1990)
   - Cap. 4: “Using Structures: Example Programs”
   - Cap. 9: “Operations on Data Structures”
2. L. Sterling y E. Shapiro *The Art of Prolog (2nd edition)* (The MIT Press, 1994)
   - Cap. 2 “Database programming”

Bibliografía

[1] J. A. Alonso *Introducción a la programación lógica con Prolog.*
`http://www.cs.us.es/~jalonso/publicaciones/2006-int_prolog.pdf`

[2] P. Blackburn, J. Bos y K. Striegnitz *Learn Prolog Now!.*
`http://www.coli.uni-sb.de/~kris/learn-prolog-now`

[3] I. Bratko *Prolog Programming for Artificial Intelligence (3 ed.)* (Addison–Wesley, 2001).

[4] W. F. Clocksin y C.S. Mellish *Programming in Prolog (Fourth Edition).* (Springer Verlag, 1994).

[5] M. A. Covington *Efficient Prolog: A Practical Guide.*
`http://www.ai.uga.edu/ftplib/ai-reports/ai198908.pdf`

[6] M. A. Covington, D. Nute y A. Vellino *Prolog Programming in Depth.* (Prentice Hall, 1997).

[7] H. C. Cunningham *Notes on Functional Programming with Haskell.* (Technical Report, University of Mississippi, 2007).

[8] P. Flach *Simply Logical (Intelligent Reasoning by Example).* (John Wiley, 1994).

[9] J. Fokker *Programación funcional.* (Technical Report, Universidad de Utrech, 1996).

[10] U. Nilsson y J. Maluszynski *Logic, Programming and Prolog (2nd ed.)*
`http://www.ida.liu.se/~ulfni/lpp`

[11] B.C. Ruiz, F. Gutiérrez, P. Guerrero, y J- Gallardo *Razonando con Haskell (Un curso sobre programación funcional).* (Thompson, 2004).

[12] L. Sterling y E. Shapiro *The Art of Prolog.* (MIT Press, 1994).

[13] S. Thompson *Haskell: The Craft of Functional Programming.* (Addison–Wesley, second edition, 1999).

[14] T. Van Le *Techniques of Prolog Programming.* (John Wiley, 1993).

[15] E. P. Wentworth *Introduction to Funcional Programming.* (Technical Report, Rhodes University, 1994).