MÉTODOS ALGEBRAICOS

DE RAZONAMIENTO AUTOMÁTICO

Memoria presentada por José Antonio Alonso Jiménez para optar al grado de Doctor en Matemáticas por la Universidad de Sevilla.

Sevilla, Mayo 1988

Director de la Memoria:

Prof. D. Agustín Riscos Fernández

Agustín Riscos

VºBº del Director del Departamento

José L. Vicente

José Luis Vicente Cordoba

DEPARTAMENTO DE ALGEBRA, COMPUTACIÓN, GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA

Autorizo la entrada del presente trabajo

Expreso mi agradecimiento a todos los que han hecho posible el presente trabajo. En particular, a los Prof. Luis Laita de la Rica, Alejandro Fernández Margarit y Agustín Riscos Fernández que me pusieron en contacto con la Lógica Matemática; a la Pfra. Delia Balbontín Noval, que me puso en contacto con la Inteligencia Artificial; al Prof. Francisco Castro Jiménez, que me puso en contacto con el Algebra Computacional, y al Prof. Emilio Briales Morales que me ayudó en la implantación de los algoritmos. Finalmente, agradezco al Prof. Agustín Riscos Fernández, director del presente trabajo, por haberme decidido a empezarlo, ayudado a desarrollarlo y animado a terminarlo.

ÍNDICE

4.- LÓGICA MONÁDICA

INTRODUCCIÓN

El objetivo del presente trabajo es la resolución mediante algoritmos algebraicos de problemas del cálculo proposicional clásico, de los cálculos proposicionales polivalentes y de la lógica monádica. En otras palabras, el objetivo es una aplicación del álgebra computacional al razonamiento automático.

El álgebra computacional es la parte de la ciencia de la computación que se ocupa del diseño, análisis, implantación y aplicación de algoritmos algebraicos (LOOS[83] p.1)

En CAVINESS[85] se da como fecha de nacimiento del álgebra computacional el año 1966 por haberse celebrado en dicho año las dos primeras conferencias sobre el tema (SYMSAM 1966 e IFIP 1966).

Dentro del álgebra computacional nuestro interés se centra en los problemas algorítmicos de la teoría de polinomios. El método de las bases de Gröbner soluciona el problema de simplificación de ideales de polinomios y, como consecuencia, soluciona fácilmente muchos otros problemas, en particular, el de pertencia a un ideal que es el que nos interesa.

El método de las bases de Gröbner fue introducido por BUCHBERGER, implícitamente en 1965 y explícitamente en 1976. La idea básica del método consiste en dado un conjunto finito F de polinomios transformarlo en una forma canónica

G, llamada base de Gröbner, que engendra el mismo ideal que F y tal que todo polinomio de dicho ideal se reduce a 0 módulo G y todo polinomio del anillo tiene una única forma irreducible respecto de G.

En 1967, KNUTH y BENDIX, usando las dos ideas básicas del método de las bases de Gröbner (i.e. pares críticos y completación) dieron un algoritmo para resolver el problema de las palabras en álgebras universales.

El razonamiento automático es la parte de la ciencia de la computación cuyo objeto es el descubrimiento, formulación e implantación de conceptos y procedimientos que permitan usar los ordenadores como una ayuda para el razonamiento. Uno de sus principales objetivos es el diseño y la implantación de programas (frecuentemente llamados demostradores de teoremas) que automaticen el razonamiento (WOS[85], página 85).

El primer programa de demostración automática de teorema apareció en 1957 y fue realizado por NEWELL, SHAW y SIMON.

En 1965, ROBINSON introdujo el método de resolución para la demostración automática de teoremas. Una parte importante del trabajo realizado desde entonces en este campo ha sido la elaboración de refinamientos, estrategias y extensiones del método de resolución.

Una exposición completa del método de resolución y sus variantes puede encontrarse en CHANG & LEE[83], LOVELAND[78]

y SIEKMANN & WRICHTSON[83]. El último también contiene una historia del desarrollo del razonamiento automático.

En 1983, HSIANG y DERSHOWITZ, basándose en el algoritmo de Knuth y Bendix, propusieron un método alternativo al de resolución de Robinson. La clave de dicho método fue el descubrimiento de un conjunto canónico de reglas para las álgebras de Boole. En KAPUR & NARENDRAN[85], HSIANG[85] y CHAZARAIN[86] aparecen variantes de dicho método.

Nuestro trabajo es una continuación de los anteriormente citados. Usando las bases de Gröbner en lugar del algoritmo de Knuth y Bendix, damos nuevos métodos de razonamiento automático.

A continuación exponemos los problemas que resolvemos en este trabajo.

En la primera parte del Capítulo 3, estudiamos algoritmos algebraicos para resolver problemas del cálculo proposicional clásico

El cálculo proposicional clásico consta de un lenguaje (formado por las variables $X_1,\ldots,X_n$ y las conectivas ¬(negación), & (conjunción), v (disyunción), -> (implicación) y <->(equivalencia)); un conjunto de proposiciones $P(X_1,..,X_n)$; un conjunto de valores de verdad, Z_2; y una tabla de verdad H_k para cada conectiva k. Una valoración de verdad es una aplicación v de $\{X_1,\ldots,X_n\}$ en Z_2. Cada valoración v se

extiende a una aplicación V de $P(X_1,...,X_n)$ en Z_2 definida por

$$V(P) = \begin{cases} v(X_i), & \text{si P es } X_i \\ H_\neg(V(Q)), & \text{si P es } \neg Q \\ H_k(V(Q),V(R)), & \text{si P es } QkR \end{cases}$$

Los problemas del cálculo proposicional clásico que estudiamos son los siguientes:

Problema CPC1: Dada una proposición P, determinar si P es una tautología (i.e. si para toda valoración v, V(P) = 1)

Problema CPC2: Dada una proposición P, determinar si P es una contradicción (i.e. si para toda valoración v, V(P) = 0)

Problema CPC3: Dada una proposición P, determinar si P es contingente (i.e. si P no es ni tautología ni contradicción) y, en caso afirmativo hallar un modelo y un contramodelo de P (i.e. dos valoraciones v y v' tales que V(P) = 1 y V'(P) = 0).

Problema CPC4: Dadas las proposiciones $P_1,...,P_m,Q$ determinar si Q es consecuencia tautológica de $P_1,...,P_m$ (i.e. si para toda valoración v tal que $V(P_1) =...= V(P_m) = 1$, V(Q) = 1).

Problema CPC5: Dado un conjunto finito de proposiciones $AX = \{P_1,...,P_m\}$, determinar si AX es consistente (i.e. si existe una valoración v tal que $V(P_1) =...= V(P_m) = 1$).

Problema CPC6: Dados dos conjuntos finitos de axiomas AX y AX', determinar si AX y AX' son equivalentes (i.e. si

todo elemento de AX es consecuencia tautológica de AX' y todo elemento de AX' es consecuencia tautológica de AX).

El Problema CPC1 lo resolvemos mediante el Teorema 3.1.C.7 (*P es una tautología sii ST(P) $--->_F^*$ 1*) donde ST es la aplicación de $P(X_1,...,X_n)$ en el anillo de polinomios $Z_2[X_1,...,X_n]$ definida por

$$ST(P) = \begin{cases} X_i, & \text{si P es } X_i \\ ST(Q) + 1, & \text{si P es } \neg Q \\ ST(Q).ST(R), & \text{si P es Q \& R} \\ ST(Q) + ST(R) + ST(Q).ST(R), & \text{si P es Q v R} \\ ST(Q).ST(R) + ST(Q) + 1, & \text{si P es Q -> R} \\ ST(Q) + ST(R) + 1, & \text{si P es Q <-> R} \end{cases}$$

$F = \{X_i^2 + X_i : 1 \leq i \leq n\}$ y $--->_F^*$ es la clausura reflexiva-transitiva de la relación $--->_F$ definida en $Z_2[X_1,...,X_n]$ por $q --->_F q'$ sii $q \neq q'$ y existe un $p \in F$ y un monomio a tal que q' es el polinomio obtenido sustituyendo en q el monomio aL(p) (donde L(p) el mayor monomio de p respecto del orden diagonal) por -aR(p) (donde R(p) = p - L(p)).

El Problema CPC2 lo resolvemos mediante el Corolario 3.1.C.8 (*P es una contradicción sii ST(P) $--->_F^*$ 0*).

El Problema CPC3 lo resolvemos mediante el Corolario 3.1.C.11 (*P es contingente sii ST(P) $-->_F^*$ 1 y ST(P) $-->_F^*$ 0*) y la Nota 3.1.C.12 (Si $X_1^{\alpha_1} ... X_n^{\alpha_n}$ es el menor monomio de ST(P), la valoración v definida por $v(X_i) = \alpha_i$ es un modelo

de P. Si $X_1^{\beta_1}...X_n^{\beta_n}$ es el menor monomio de ST(P) + 1, la valoración v definida por $v(X_i) = \beta_i$ es un contramodelo de P).

El Problema CPC4 lo reducimos a otro de ideales de polinomios mediante el Teorema 3.1.D.4 *(Q es una consecuencia tautológica de $P_1,...,P_m$ sii ST(Q) + 1 pertenece al ideal de $Z_2[X_1,..,X_n]$ engendrado por F = {ST(P_1) + 1,..,ST(P_m) + 1, $X_1^2 + X_1,..., X_n^2 + X_n$})*. Dicho problema se resuelve fácilmente si F es una base de Gröbner usando el Corolario 2.5.4 *(Sea F una base de Gröbner. Un polinomio q pertenece al ideal engendrado por F sii $q \rightarrow_F^* 0$)*. Si F no es una base de Gröbner, podemos reducir el problema al caso anterior construyendo, mediante el Algoritmo 2.8.8, una base de Gröbner G que genere el mismo ideal que F. El algoritmo 2.8.8 se basa en el Teorema 2.7.2 *(F es una base de Gröbner sii para todo $p_1,p_2 \in F$,*

$$SP(PC(p_1,p_2)) = mcm(L(p_1),L(p_2))R(p_1)/L(p_1) - mcm(L(p_1),L(p_2))R(p_2)/L(p_2) \rightarrow_F^* 0)$$

Otros algoritmos de construcción de bases de Gröbner que usan criterios de reducción de pares innecesarios son el 2.9.3 y el 2.9.8 que se basan respectivamente en los Teoremas 2.9.2 *(F es una base de Gröbner sii para todo p_1, $p_2 \in F$ cuyos líderes son primos entre sí, $SP(PC(p_1,p_2)) \rightarrow_F^* 0$)* y 2.9.7 *(Sea $A \subseteq Z_2[X_1,...,X_n]$. F es una base de Gröbner sii para todo $p_1,p_2 \in F$ tales que $PC(p_1,p_2)$ no es AF-eliminable, $SP(PC(p_1,p_2)) \rightarrow_F^* 0$)*.

Una de las ventajas del método anterior usando bases de Gröbner respecto del método de resolución de Robinson es la

"compilación" de axiomas (es decir, dado un conjunto de proposiciones AX = $\{P_1,\ldots,P_m\}$ para determinar si las proposiciones $Q_1,Q_2,\ldots$ se deducen de AX basta calcular una base de Gröbner G que genere el mismo ideal que F = {ST(P1) + 1,.., ST(Pm) + 1, $X_1^2 + X_1,\ldots, X_n^2 + X_n$} y comprobar si $ST(Q_i) + 1 \dashrightarrow_G^* 0$; en cambio, con el método de resolución hay que transformar AX en un conjunto equivalente de cláusulas, A; transformar $\neg Q_i$ en otro conjunto equivalente de cláusulas, B_i, y comprobar por resolución que el conjunto A U B_i es inconsistente. Cada una de estas comprobaciones es de la misma complejidad que el cálculo de la base de Gröbner G).

En la demostración del Teorema 3.1.D.4 nos hemos basado en el Teorema 3.1.D.3 *(La aplicación ST' del anillo booleano $B(X_1,\ldots,X_n)$ en el cociente de $Z_2[X_1,\ldots,X_n]$ respecto del ideal I engendrado por $\{X_i^2 + X_i: 1 \leqslant i \leqslant n\}$ definida por $ST'([P]) = ST(P) + I$ es un isomorfismo de anillos)*

El Problema CPC5 lo resolvemos mediante el Corolario 3.1.D.5 *($\{P_1,\ldots,P_m\}$ es inconsistente sii 1 pertenece al ideal de $Z_2[X_1,\ldots,X_n]$ generado por $F = \{ST(P_1) + 1,\ldots, ST(P_m) + 1, X_1^2 + X_1,\ldots, X_n^2 + X_n\}$)*. Es importante notar que no basta usar los polinomios $X_i^2 + X_i$ para reducir, sino que es necesario usarlos también para formar pares críticos como demostramos en la Nota 3.1.E.7.

El Problema CPC6 lo resolvemos mediante el algoritmo 3.1.E.8 que se basa en el Teorema 2.10.2 *(Si F y F' son*

bases de Gröbner reducidas y engendran el mismo ideal, entonces son iguales).

En la segunda parte del Capítulo 3, estudiamos algoritmos algebraicos para resolver problemas del cálculo proposicional polivalente.

El cálculo proposicional polivalente consta de un lenguaje (formado por un conjunto de variables, VAR = $\{X_1,\ldots,X_n\}$, un conjunto de conectivas, CON, y una función de aridad, ar : CON ---> **N**); un conjunto de proposiciones, P(VAR, CON); un conjunto de valores de verdad, Z_r; y una tabla de verdad, H_k : $Z_r^{ar(k)}$ ---> Z_r, para cada conectiva k. Una valoración de verdad es una aplicación v de $\{X_1,\ldots,X_n\}$ en Z_r. Cada v se extiende a una aplicación V de P(VAR, CON) en Z_r definida por

$$V(P) = \begin{cases} v(X_i), & \text{si P es } X_i \\ H_k(V(P_1),\ldots,V(P_{ar(k)})), & \text{si P es } k(P_1,\ldots,P_{ar(k)}) \end{cases}$$

En los cálculos proposicionales polivalentes nos planteamos los mismos problemas que en el clásico y designamos por CPPi el problema correspondiente a CPCi. Por el Teorema 3.2.A.3 *(Sea P un cálculo proposicional r-valente, p un entero mayor que r y P' el cálculo proposicional p-valente tal que la tabla de verdad de cada conectiva k está definida por* $H'_k(u_1,\ldots,u_{ar(k)}) = H_k(u'_1,\ldots,u'_{ar(k)})$ *donde* H_k *es la tabla de verdad de k en P y* $u'_i = min(u_i, r-1)$*. Entonces los conjuntos de tautologías de P y P' son iguales)*, podemos limi-

tarnos sin pérdida de generalidad a los cálculos con un número primo, p, de valores de verdad.

El Problema CPP1 lo resolvemos mediante el Teorema 3.2.C.6 *(P es una tautología sii ST(P) --->$_F$* 0)* donde F = $\{X_i^p - X_i: 1 \leqslant i \leqslant n\}$ y ST es la aplicación de P(VAR, CON) en $Z_p[X_1,\ldots,X_n]$ definida por

$$ST(P) = \begin{cases} X_i, & \text{si P es } X_i \\ ST_k(ST(P_1),\ldots,ST(P_{ar(k)})), & \text{si P es } k(P_1,\ldots,P_{ar(k)}) \end{cases}$$

donde, para cada conectiva k, ST_k es la aplicación de $Z_p[X_1,\ldots,X_n]^{ar(k)}$ en $Z_p[X_1,\ldots,X_n]$ definida por

$$ST_k(q_1,\ldots,q_r) = \sum_{\substack{0<i1<p-1 \\ \ldots\ldots \\ 0<ir<p-1}} H_k(i_1,\ldots,i_r) \prod_{m=1}^{r} \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq im}}^{p-1} (q_m - j)/(i_m - j),$$

siendo r = ar(k).

Los problemas CPP2, CPP4 y CPP5 los resolvemos mediante el Corolario 3.12.C.9, el Teorema 3.2.D.3 y el Corolario 3.2.D.4, respectivamente.

En el capítulo 4 estudiamos algoritmos algebraicos para resolver problemas de la lógica monádica.

Consideremos un lenguaje monádico L que tiene como signos lógicos las variables x,y,z,..., las conectivas ¬ y & y el cuantificador universal ∀ y como signos no-lógicos las constantes $c_1,\ldots,c_r$ y los símbolos de predicado monádicos

$p_1,\ldots,p_m$. Sean $n = r + 2^m$ y L' el lenguaje obtenido añadiéndole a L las nuevas constantes $c_{r+1},\ldots,c_n$.

Los problemas de la lógica monádica que estudiamos son los siguientes:

Problema LM1: Dada una sentencia A de L, determinar si A es válida (i.e. si para toda L-estructura **M**, **M**(A) = 1).

Problema LM2: Dadas las sentencias $A_1,\ldots,A_s,B$ de L, determinar si B es una consecuencia lógica de $\{A_1,\ldots,A_s\}$ (i.e. si para todo modelo **M** de $\{A_1,\ldots,A_s\}$, **M**(B) = 1).

Problema LM3: Dada un conjunto finito de sentencias de L determinar si es consistente (i.e. si tiene un modelo).

El Problema LM1 lo resolvemos mediante el Teorema 4.3.8 *(Una sentencia A de L es válida sii G(A) $\dashrightarrow_F^*$ 0)* donde $F = \{X_i^2 + X_i : 1 \leqslant i \leqslant mn\}$ y G es la aplicación del conjunto de las sentencias de L' en $Z_2[X_1,\ldots,X_{mn}]$ definida por

$$G(A) = \begin{cases} X_{(i-1)n+j} & \text{si A es } p_ic_j \\ G(B) + 1 & \text{si A es } \neg B \\ G(B).G(C) & \text{si A es B \& C} \\ G(B_x[c_1])\ldots G(B_x[c_n]) & \text{si A es VxB} \end{cases}$$

El Problema LM2 lo resolvemos mediante el Teorema 4.4.1 *(La sentencia B es consecuencia lógica de las sentencias $A_1,\ldots,A_s$ sii $G(B) + 1 \dashrightarrow_F^* 0$ donde F es una base de Gröbner del ideal de $Z_2[X_1,\ldots,X_{mn}]$ engendrado por el conjunto $\{G(A_1) + 1,\ldots,G(A_s) + 1, X_1^2 + X_1,\ldots, X_{mn}^2 + X_{mn}\}$)*.

El Problema LM3 lo resolvemos mediante el Corolario 4.4.3 *(El conjunto de sentencias $\{A_1,\ldots,A_s\}$ es inconsistente sii 1 pertenece al ideal de $Z_2[X_1,\ldots,X_{mn}]$ engendrado por $F = \{G(A_1) + 1,\ldots,G(A_s) + 1, X_1^2 + X_1,\ldots, X_{mn}^2 + X_{mn}\}$).*

Al comienzo de cada uno de los capítulos se encuentra un resumen del mismo.

Los algoritmos presentados a lo largo de todo el trabajo los hemos programado en Le_Lisp. En el apéndice se encuentra el programa correspondiente al cálculo proposicional clásico y a las bases de Gröbner en $Z_2[X_1,\ldots,X_n]$ y una sesión realizada con dicho programa en la que se comprueban los ejemplos contenidos en la Tesis.

CAPITULO 1

RELACIONES CANÓNICAS

En este capítulo definimos y caracterizamos las relaciones canónicas. El Teorema 1.30 y el Corolario 1.31 resumen todas las caracterizaciones. En el capítulo siguiente usaremos las relaciones canónicas para estudiar las bases de Gröbner.

1.1.- Notación

En lo que sigue E representará un conjunto y ---> una relación binaria sobre E que llamaremos reducción. Las variables x, y, z representarán elementos de E.

1.2.- Definición

Para cualquier relación ---> sobre E se definen:

(a) La relación de identidad:

$--->^0 = \{\langle x,x\rangle : x \in E\}$

(b) La n-ésima (n>0) composición de --->:

$--->^n = \{\langle x,y\rangle \in E^2 : (\exists z \in E)\ [x ---> z \ \&\ z --->^{n-1} y]\}$

(c) La clausura transitiva de --->:

$--->^+ = \bigcup_{n>0} --->^n$

(d) La clausura transitiva-reflexiva de --->:

$--->^* = \bigcup_{n\geq 0} --->^n$

(e) La inversa de --->:

$<--- = \{\langle x,y\rangle : y ---> x\}$

(f) La clausura simétrica de --->:

$<---> = ---> \cup <---$

1.3.- Nota

A la inversa y a la clausura simétrica se le pueden aplicar los apartados (a) - (d) de la anterior definición. En particular podemos obtener la clausura transitiva-reflexiva-simétrica de --->, $<--->^*$, como la clausura transitiva-reflexiva de la clausura simétrica de --->.

1.4.-Nota

Sean $\dashrightarrow_1$ y $\dashrightarrow_2$ dos relaciones sobre E. Escribiremos $x \dashrightarrow_1 y \dashrightarrow_2 z$ en lugar de $x \dashrightarrow_1 y$ e $y \dashrightarrow_2 z$.

1.5.- Nota

Las relaciones definidas en 2 pueden describirse como:

(a) $x \dashrightarrow^n y$ sii existen $x_0, x_1, \ldots, x_n \in E$ tales que

$$x = x_0 \dashrightarrow x_1 \dashrightarrow \ldots \dashrightarrow x_n = y$$

(b) $x \dashrightarrow^+ y$ sii existe un $n > 0$ y $x_0, \ldots, x_n \in E$ tales que

$$x = x_0 \dashrightarrow x_1 \dashrightarrow \ldots \dashrightarrow x_n = y$$

(c) $x \dashrightarrow^* y$ sii existe $n \geq 0$ y $x_0, \ldots, x_n \in E$ tales que

$$x = x_0 \dashrightarrow x_1 \dashrightarrow \ldots \dashrightarrow x_n = y$$

(d) $x \langle\dashrightarrow^* y$ sii existe $n \geq 0$ y $x_0, \ldots, x_n \in E$ tales que

$$x = x_0 \langle\dashrightarrow x_1 \langle\dashrightarrow \ldots \langle\dashrightarrow x_n = y$$

1.6.- Definición

x es $\dashrightarrow$-irreducible si no existe ningún y tal que $x \dashrightarrow y$ (es decir, si x es minimal respecto de $\dashrightarrow$).

1.7.- Definición

y es una forma $\dashrightarrow$-irreducible de x si y es $\dashrightarrow$-irreducible y $x \dashrightarrow^* y$.

1.8.- Nota

Un elemento puede tener varias formas $\dashrightarrow$-irreducibles

o no tener ninguna. Por ejemplo, consideremos las siguientes relaciones en Z[X,Y]:

$$\longrightarrow_1 = \{\langle p, p.X\rangle : p \in Z[X,Y]\} \quad y$$

$$\longrightarrow_2 = \{\langle X,1\rangle, \langle X,Y\rangle\}$$

entonces X no tiene ninguna forma $\longrightarrow_1$-irreducible y tiene dos formas $\longrightarrow_2$-irreducibles.

1.9.- Definición

$\longrightarrow$ es noetheriana si no existe ninguna sucesión infinita (x_n) tal que $x_1 \longrightarrow x_2 \longrightarrow \ldots$

1.10.- Ejemplo

En la nota 1.8, la relación $\longrightarrow_1$ no es noetheriana y la $\longrightarrow_2$ sí lo es.

1.11.- Nota

Si $\longrightarrow$ es noetheriana, cada elemento tiene al menos una forma $\longrightarrow$-irreducible. El recíproco no es cierto.

1.12.- Lema (Principio de inducción noetheriana)

Si $\longrightarrow$ es noetheriana y $A \subseteq E$ es tal que

$(\forall x \in E)\ [\{y : x \longrightarrow^+ y\} \subseteq A \Longrightarrow x \in A]$,

entonces $A = E$.

Demostración

Supongamos que $A \neq E$. Existe un $x_0 \in E - A$. Vamos a demostrar que para todo n, existen $x_1, \ldots, x_n \in E - A$ tales que $x_0 \longrightarrow^+ x_1 \longrightarrow^+ \ldots \longrightarrow^+ x_n$ y, por lo tanto, que $\longrightarrow$ no es noetheriana. Lo haremos por inducción sobre n.

Para n = 1 : $\{y: x_0 \dashrightarrow^+ y\} \not\subseteq A$ (en caso contrario, x_0 pertenecería a A). Existe un $x_1 \in \{y: x_0 \dashrightarrow^+ y\} - A$. Luego, $x_1 \in E - A$ y $x_0 \dashrightarrow^+ x_1$.

Para n = m+1: Supongamos que existen $x_1,\ldots,x_m$ pertenecientes a E - A tales que $x_0 \dashrightarrow^+ x_1 \dashrightarrow^+ \ldots \dashrightarrow^+ x_m$. Como antes, existe un $x_{m+1} \in E - A$ tal que $x_m \dashrightarrow^+ x_{m+1}$. Por tanto, $x_0 \dashrightarrow^+ x_1 \dashrightarrow^+ \ldots \dashrightarrow^+ x_m \dashrightarrow^+ x_{m+1}$.

1.13.- Definición

(a) x e y tienen un inmediato común sucesor ($x \downarrow y$) si existe un z tal que $x \dashrightarrow z \dashleftarrow y$.

(b) x e y tienen un común sucesor ($x \downarrow^* y$) si existe z tal que $x \dashrightarrow^* z \dashleftarrow^* y$.

(c) x e y tienen un inmediato común antecesor ($x \uparrow y$) si existe un z tal que $x \dashleftarrow z \dashrightarrow y$.

(d) x e y tienen un común antecesor ($x \uparrow^* y$) si existe z tal que $x \dashleftarrow^* z \dashrightarrow^* y$.

1.14.- Definición

$\dashrightarrow$ es confluente si para todo x,y :

$$x \uparrow^* y \Longrightarrow x \downarrow^* y.$$

1.15.- Ejemplo

En la nota 1.8, la relación $\dashrightarrow_1$ es confluente y $\dashrightarrow_2$ no lo es.

1.16.- Nota

Si ---> es confluente, cada elemento tiene como máximo una forma --->-irreducible. El recíproco no es cierto.

1.17.- Definición

---> es canónica si es noetheriana y confluente.

1.18.- Ejemplo

En el conjunto de los números racionales positivos, la relación

a/b ---> a'/b' sii a/b = a'/b' y m.c.d.(a,b) > m.c.d.(a',b')

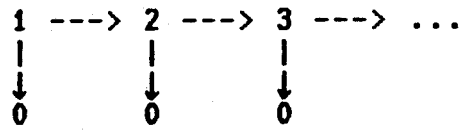
es canónica; pero no lo es en Q.

1.19.- Nota

Si ---> es canónica, cada elemento tiene una única forma --->-irreducible. El recíproco no es cierto (por ejemplo, la relación ---> definida en N por

$$\dashrightarrow = \{(n,0): n \in \mathbb{N}-\{0\}\} \cup \{(n,n+1): n \in \mathbb{N}-\{0\}\},$$

gráficamente



no es canónica aunque cada elemento tiene una única forma --->-irreducible).

1.20.- Lema

Si ---> es noetheriana, son equivalentes:

(a) ---> es canónica;

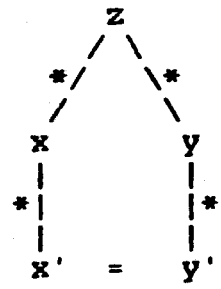
(b) cada elemento tiene una única forma --->-irreducible.

Demostración

(a) ===> (b): es la nota anterior.

(b) ===> (a): Hay que probar que ---> es confluente. Sean x,y ∈ E tales que x ↑* y. Existe un z ∈ E tal que x <---* z --->* y. Sean x' e y' las formas --->-irreducibles de x e y, respectivamente. Ambas son formas --->-irreducibles de z. Por tanto, son iguales. Luego, x ↓* y.

Gráficamente:



1.21.- Definición

Si ---> es canónica, la forma --->-irreducible de cada elemento x se llama la forma --->-normal y se representa por FN(x).

1.22.- Definición

---> tiene la propiedad de Church - Rösser si para todo x,y: x <--->* y ===> x ↓* y.

1.23.- Lema

Las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) ---> es confluente.

(b) ---> tiene la propiedad de Church - Rösser.

Demostración

(a) ===> (b): Puesto que $<--->^* = \bigcup_{n\geq 0} <--->^n$, basta

probar que para todo $n \geq 0$, $x <--->^n y$ ===> $x \downarrow^* y$. Lo haremos por inducción sobre n.

Base (n = 0): Si $x <--->^0 y$, entonces x = y, $x --->^* x <---^* y$, $x \downarrow^* y$.

Inducción: Supongamos que para todo z, y: $z <--->^n y$ ===> $z \downarrow^* y$. Sean $x, y \in E$ tales que $x <--->^{n+1} y$. Existe $z \in E$ tal que $x <---> z <--->^n y$. Por la hipótesis de inducción, existe $u \in E$ tal que $z --->^* u <---^* y$. Puesto que $x <---> z$, se tiene que $x ---> z$ ó $x <--- z$. En el primer caso, $x --->^* u <---^* y$ y $x \downarrow^* y$. En el segundo caso, se tiene que $x <--- z --->^* u$ y, por (a), existe $v \in E$ tal que $x --->^* v <---^* u$; luego, $x --->^* v <---^* y$ y $x \downarrow^* y$.

[Nota: gráficamente,

(b) ===> (a): Sean x, y $\in$ E tales que $x \downarrow^* y$. Entonces existe $z \in E$ tal que $x <---^* z --->^* y$ y $x <--->^* y$. Por tanto, $x \downarrow^* y$.

1.24.- Definición

---> es localmente confluente si para todo x, y:

$x \uparrow y \Longrightarrow x \downarrow^* y$.

1.25.- Nota

Si ---> es confluente, también es localmente confluente. El recíproco no es cierto (por ejemplo, la relación ---> definida en E = {0, 1, 2, 3 } por

$$2 \leftarrow 0 \leftrightarrow 1 \rightarrow 3$$

es localmente confluente, pero no es confluente).

1.26.- Lema

Si ---> es noetheriana, son equivalentes

(a) ---> es confluente

(b) ---> es localmente confluente

Demostración

(a) ===> (b): es la nota anterior

(b) ===> (a): tenemos que probar que

$$(\forall z)\ [(\forall x,y)\ [x \leftarrow^* z \rightarrow^* y \Longrightarrow x \downarrow^* y]] \qquad [1]$$

Sea A = {z: $(\forall x,y)$ [x $\leftarrow^*$ z $\rightarrow^*$ y ===> x $\downarrow^*$ y]}. [1] es equivalente a A = E que por el Lema 12 (Principio de Inducción Noetheriana), es equivalente a

$$(\forall z)\ [\{u: z \rightarrow^+ u\} \subseteq A \Longrightarrow z \in A] \qquad [2]$$

Sea $z \in E$ tal que $\{u: z \rightarrow^+ u\} \subseteq A$. Sean $x, y \in E$ tales que

$$x \leftarrow^* z \rightarrow^* y.$$

Veamos que $x \downarrow^* y$, lo que prueba que $z \in A$.

Pueden darse tres casos:

Caso 1: $x = z$. Entonces $x \longrightarrow^* y \longleftarrow^* y$ y $x \downarrow^* y$.

Caso 2: $y = z$. Entonces $x \longrightarrow^* x \longleftarrow^* y$ y $x \downarrow^* y$.

Caso 3: $x \neq z$ e $y \neq z$. Entonces existen $u, v \in E$ tales que

$$x \longleftarrow^* u \longleftarrow z \longrightarrow v \longrightarrow^* y.$$

Por ser $\longrightarrow$ localmente confluente, existe $w \in E$ tal que

$$u \longrightarrow^* w \longleftarrow^* v.$$

Por la definición de z, los elementos u y v están en A.

Puesto que $u \in A$ y $x \longleftarrow^* u \longrightarrow^* w$, existe $u' \in E$ tal que

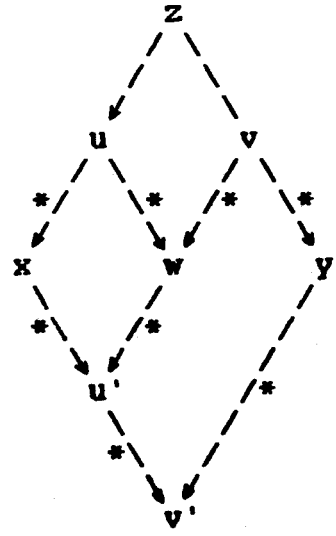
$$x \longrightarrow^* u' \longleftarrow^* w.$$

Puesto que $v \in A$ y $u' \longleftarrow^* w \longleftarrow^* v \longrightarrow^* y$, existe $v' \in E$ tal que

$$u' \longrightarrow^* v' \longleftarrow^* y.$$

Por tanto, $x \longrightarrow^* u' \longrightarrow^* v' \longleftarrow^* y$ y $x \downarrow^* y$.

Gráficamente:



1.27.- Teorema

Si ---> es noetheriana, las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) ---> es canónica

(b) ---> es confluente

(c) ---> tiene la propiedad de Church - Rösser

(d) ---> es localmente confluente

(e) cada elemento tiene una única forma --->-irreducible.

Demostración

(e) y (a) son equivalentes por el Lema 1.20.

(a) y (b) son equivalentes por la Definición 1.17.

(b) y (c) son equivalentes por el Lema 1.23.

(c) y (d) son equivalentes por el Lema 1.26.

1.28.- Definición

Una relación binaria definida en E es un orden noetheriano en E si es transitiva y noetheriana.

1.29.- Definición

Sea > un orden noetheriano en E. x e y están conectados bajo z, $x <--->^* y$ (< z), si existen $x_0,...,x_n \in E$, $n \geq 0$, tales que $x = x_0 <---> x_1 <---> ... <---> x_n = y$ y $x_i < z$ para todo $i \in \{0,...,n\}$.

1.30.- Teorema (Lema de Newman generalizado)

Si $>$ es un orden noetheriano y $\longrightarrow \subseteq >$, son equivalentes:

(a) $\longrightarrow$ es confluente

(b) Para todo $x,y,z \in E$:

$$x \longleftarrow z \longrightarrow y \implies x \longrightarrow^* y \ (< z)$$

Demostración

(a) $\Longrightarrow$ (b): Sean $x,y,z \in E$ tales que

$$x \longleftarrow z \longrightarrow y.$$

Existe un $u \in E$ tal que

$$x \longrightarrow^* u \longleftarrow^* y.$$

Existen $x_0,\ldots, x_n, y_0 ,\ldots, y_m$ $(n,m \geq 0)$ tales que

$$x = x_0 \longrightarrow \ldots \longrightarrow x_n = u = y_m \longleftarrow \ldots \longleftarrow y_0 = y.$$

Puesto que $\longrightarrow \subseteq >$, $x \longrightarrow^* y \ (< z)$.

(b) $\Longrightarrow$ (a): Como en el Lema 1.26, sea

$$A = \{z: (\forall x,y \in E)\ [x \longleftarrow^* z \longrightarrow^* y \implies x \downarrow^* y]\}.$$

Tenemos que probar que $A = E$. Por el principio de inducción noetheriana (sobre $>$), basta probar que

$$(\forall z)\ [\{u: z >^+ u\} \subseteq A \Longrightarrow z \in A]$$

Sea $z \in E$ tal que $\{u: z >^+ u\} \subseteq A$. Sean $x,y \in E$ tales que

$$x \longleftarrow^* z \longrightarrow^* y.$$

Veamos que $x \downarrow^* y$. Y, por tanto, $z \in A$. Si $z = x$ ó $z = y$, $x \downarrow^* y$. Supongamos que $z \neq x$ y $z \neq y$. Existen $u,v \in E$ tales que

$$x \longleftarrow^* u \longleftarrow z \longrightarrow v \longrightarrow^* y.$$

Por (b), $u \longrightarrow^* v \ (< z)$. Existen $u_0 ,\ldots, u_n$ $(n \geq 0)$ tales que

$$u = u_0 \longleftrightarrow \ldots \longleftrightarrow u_n = v$$

y u_i < z para i $\in$ {0,...,n}. Existe w $\in$ E tal que

$$u \longrightarrow^* w \longleftarrow^* v$$

(se demuestra por inducción sobre n:

Base: para n = 0, w = u.

Inducción: Supongamos que u $\downarrow^*$ u_{n-1}. Entonces existe w' $\in$ E tal que

$$u \longrightarrow^* w' \longleftarrow^* u_{n-1}.$$

Puesto que u_{n-1} <---> u_n pueden darse dos casos:

Caso 1 : u_{n-1} <--- u_n . Entonces

$$u \longrightarrow^* w' \longleftarrow^* u_n$$

y u_0 $\downarrow^*$ u_n.

Caso 2 : u_{n-1} ---> u_n . Entonces

$$u \longrightarrow^* w' \longleftarrow^* u_{n-1} \longrightarrow u_n.$$

u_{n-1} $\in$ A (ya que u_{n-1} $\in$ {u: z $>^+$ u} $\subseteq$ A). w' $\downarrow^*$ u_n . Existe w $\in$ E tal que

$$w' \longrightarrow^* w \longleftarrow^* u_n.$$

Por tanto,

$$u \longrightarrow^* w \longleftarrow^* u_n.)$$

u $\in$ A (ya que z ---> u, ---> $\subseteq$ > y {u: z $>^+$ u} $\subseteq$ A).

$$x \longleftarrow^* u \longrightarrow^* w.$$

Existe u' $\in$ E tal que

$$x \longrightarrow^* u' \longleftarrow^* w.$$

v $\in$ A (Análogamente a u $\in$ A).

$$u' \longleftarrow^* w \longleftarrow^* v \longrightarrow^* y.$$

Existe v' $\in$ E tal que

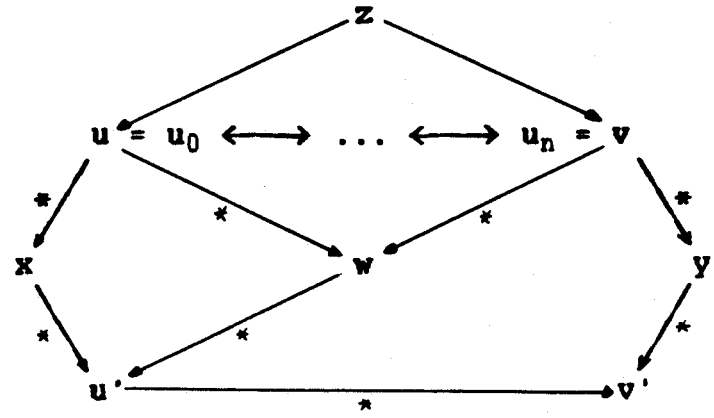
$$u' \longrightarrow^* v' \longleftarrow^* y.$$

Por tanto,

$$x \longrightarrow^* u' \longrightarrow^* v' \longleftarrow^* y$$

y x $\downarrow^*$ y.

Gráficamente:



1.31.- Corolario

Si > es un orden noetheriano y ---> $\subseteq$ >, son equivalentes:

(a) ---> es canónica.

(b) Para todo x,y,z $\in$ E:

x <--- z ---> y ===> x <--->* y (<z)

CAPITULO 2

ALGORITMOS DE BASE DE GRÖBNER EN $Z_p[X_1,\ldots,X_n]$

En este capítulo estudiamos las bases de Gröbner en $Z_p[X_1,\ldots,X_n]$ y damos algoritmos para construirlas.

En la sección 2.1 introducimos la notación; definimos los órdenes que usaremos entre los términos, los monomios y los polinomios y demostramos algunas de sus propiedades.

En la sección 2.2 definimos la relación de reducción, $--->_F$, determinada por un conjunto de polinomios, F, y estudiamos sus propiedades fundamentales en el Lema 2.2.17.

En la sección 2.3 demostramos la igualdad de la relación de equivalencia definida por el ideal engendrado por F y la clausura reflexiva-simétrica-transitiva de $--->_F$.

En la sección 2.4 definimos las bases de Gröbner y en el Teorema 2.4.3 damos otras condiciones equivalentes que usaremos en la demostración de los algoritmos para construirlas.

En la sección 2.5 vemos cómo las bases de Gröbner sirven para decidir el problema de la pertenencia a un ideal.

En la sección 2.6 definimos los pares críticos que usamos en la 2.7 para caracterizar las bases de Gröbner.

En la sección 2.8, basándonos en la caracterización anterior, damos un algoritmo para calcular bases de Gröbner.

En la sección 2.9 damos dos criterios para detectar reducciones innecesarias en la construcción de bases de Gröbner.

En la sección 2.10 demostramos la unicidad de las bases de Gröbner reducidas.

2.1.- NOTACIONES Y DEFINICIONES

2.1.1 Notaciones

En lo que sigue,

p, representa un número primo;

n, representa un entero mayor o igual que 1;

$\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, $\beta = (\beta_1,\ldots,\beta_n)$, representan elementos de $\mathbb{N}^n$;

$Z_p[X_1,\ldots,X_n]$ es el anillo de polinomios en $X_1,\ldots,X_n$ con coeficientes en Z_p;

u, v representan elementos de Z_p;

$X^\alpha = X_1^{\alpha_1} \ldots X_n^{\alpha_n}$ es un término de $Z_p[X_1,\ldots,X_n]$;

a,b,c,d representan términos de $Z_p[X_1,\ldots,X_n]$;

uX^α es un monomio de $Z_p[X_1,\ldots,X_n]$;

m representa monomios de $Z_p[X_1,\ldots,X_n]$;

$p = m_1 + \ldots + m_k$ es un polinomio de $Z_p[X_1,\ldots,X_n]$;

p,q,r,s,h representan polinomios de $Z_p[X_1,\ldots,X_n]$.

2.1.2.- Definición

$X^\alpha >_T X^\beta$ si

(a) el grado de X^α es mayor que el grado de X^β (es decir, $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n > \beta_1 + \ldots + \beta_n$), o

(b) X^α y X^β tienen igual grado y existe un $k \in \{1,\ldots,n\}$ tal que $\alpha_k > \beta_k$ y $\alpha_i = \beta_i$ para $1 \leq i < k$.

2.1.3.- Definición

$ua <_M vb$ si $a <_T b$ ó ($a = b$ y $u < v$).

2.1.4.- Nota

Los monomios de $Z_3[X,Y]$ están ordenados por $<_M$ de la siguiente forma:

$1 <_M 2 <_M Y <_M 2Y <_M X <_M 2X <_M Y^2 <_M 2Y^2 <_M XY <_M 2XY <_M X^2$

2.1.5.- Lema

(a) $<_T$ es un orden total y noetheriano en el conjunto de los términos de $Z_p[X_1,\ldots,X_n]$.

(b) Para todo $a \neq 1$, $1 <_T a$.

(c) Si $a <_T b$, entonces $ac <_T bc$.

2.1.6.- Lema

(a) $>_M$ es un orden total y noetheriano en el conjunto de los monomios de $Z_p[X_1,\ldots,X_n]$.

(b) Si $m_1 <_M m_2$, entonces $am_1 <_M am_2$

2.1.7.- Lema

En general, las implicaciones siguientes no son válidas

(a) $m_1 <_M m_2 \Longrightarrow m_1 m_3 <_M m_2 m_3$

(b) $m_1 <_M m_3$, $m_2 <_M m_4 \Longrightarrow m_1 m_2 <_M m_3 m_4$

Demostración

(a) En $Z_5[X]$, $2X <_M 3X$, pero $(2X)2 >_M (3X)2$

(b) En $Z_5[X]$, $2X <_M 3X$ y $X <_M 2X$, pero $(2X)X >_M (3X)(2X)$

2.1.8.- Nota

Supondremos que todos los polinomios no nulos siempre están escritos como sumas de monomios decrecientes; es decir, $p = m_1 + \ldots + m_k$ con $m_1 >_M \ldots >_M m_k$. Representaremos el líder del polinomio p por $L(p) = m_1$ y el resto por

$R(p) = m_2 + \ldots + m_k$.

2.1.9.- Definición

$p > q$ si (a) $p \neq 0$ y $q = 0$, ó

(b) $p \neq 0$, $q \neq 0$ y $L(p) >_M L(q)$, ó

(c) $p \neq 0$, $q \neq 0$, $L(p) = L(q)$ y $R(p) > R(q)$.

2.1.10.- Lema

(a) $>$ es un orden total y noetheriano en $Z_p[X_1,\ldots,X_n]$.

(b) Si $p < q$, entonces $ap < aq$

2.1.11.- Nota

En general, las implicaciones siguientes no son válidas

(a) $p > q \Longrightarrow p + r > q + r$

(b) $p > p'$, $q > q' \Longrightarrow p + q > p' + q'$

(c) $p > q \Longrightarrow pr > qr$

(d) $p > p'$, $q > q' \Longrightarrow pq > p'q'$

Demostración

En $Z_2[X_1,\ldots,X_4]$

(a) Sean $p = X_1 + X_2$, $q = X_2$ y $r = X_1$. Entonces $p > q$ pero

$$p + r = X_2 < X_1 + X_2 = q + r.$$

(b) Sean $p = X_1 + X_2 + X_3$, $p' = X_2$, $q = X_1 + X_2 + X_4$ y $q' = X_4$. Entonces $p > p'$ y $q > q'$, pero

$$p + q = X_3 + X_4 < X_2 + X_4 = p' + q'.$$

(c) Sean $p = X_1 + 1$, $q = X_1$ y $r = X_1 + 1$. Entonces $p > q$. Sin embargo,

$$pr = X_1^2 + 1 < X_1^2 + X_1 = qr.$$

(d) Sean $p = X_1X_2 + X_2 + 1$, $p' = X_1X_2 + X_2$, $q = X_1 + 1$ y $q' = X_1$. Entonces $p > p'$ y $q > q'$, pero

$$pq = X_1^2 X_2 + X_1 + X_2 + 1 < X_1^2 X_2 + X_1X_2 = p'q'.$$

2.2.- RELACION DE REDUCCION DEFINIDA POR UN CONJUNTO DE POLINOMIOS

2.2.1.- Definición

El coeficiente del término a en el polinomio p, coef(a,p), es u, si ua es un monomio de p, y 0, si no existe ningún u tal que ua sea un monomio de p.

2.2.2.- Nota

En la definición anterior hay que tener presente la nota 2.1.8. Así, en $Z_3[X,Y]$, coef(X, X + Y + X) = 2.

2.2.3.- Definición

Para cada polinomio mónico p y cada término a se define la aplicación $\rho(p,a)$: $Z_p[X_1,\ldots,X_n]$ ---> $Z_p[X_1,\ldots,X_n]$ por

$$\rho(p,a)(q) = q - coef(aL(p),q)ap$$

Al escribir $\rho(p,a)$, supondremos que p es mónico.

2.2.4.- Nota

$\rho(p,a)(q)$ es q si aL(p) no es un término de q y el polinomio que se obtiene sustituyendo en q el término aL(p) por -aR(p), en caso contrario.

2.2.5.- Ejemplos

En $Z_2[X_1,X_2,X_3]$:

$\rho(X_1 + 1, X_2)\ (X_1X_2X_3 + X_1X_2) = X_1X_2X_3 + X_2$

$\rho(X_1 + 1, X_2X_3)(X_1X_2X_3 + X_1X_2) = X_2X_3 + X_1X_2$

$$\rho(X_1 + 1,\ X_3)\ \ (X_1X_2X_3 + X_1X_2) = X_1X_2X_3 + X_1X_2$$

2.2.6.- Lema

Sea $\rho = \rho(p,a)$. Entonces $\rho(q_1+q_2) = \rho(q_1) + \rho(q_2)$. y $\rho(q_1-q_2) = \rho(q_1) - \rho(q_2)$.

Demostración

Sean $b = L(p)$, $u_1 = coef(ab, q_1)$ y $u_2 = coef(ab, q_2)$. Entonces

$$\begin{aligned}
\rho(q_1+q_2) &= (q_1+q_2) - coef(ab, q_1+q_2)ap = \\
&= (q_1+q_2) - (u_1+u_2)ap = \\
&= (q_1-u_1ap) + (q_2- u_2ap) = \\
&= \rho(q_1) + \rho(q_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho(q_1-q_2) &= (q_1-q_2) - coef(ab, q_1-q_2)ap = \\
&= (q_1-q_2) - (u_1-u_2)ap = \\
&= (q_1-u_1ap) - (q_2-u_2ap) = \\
&= \rho(q_1) - \rho(q_2)
\end{aligned}$$

2.2.7.-Lema

$$\rho(p,ba)(ubq) = ub\rho(p,a)(q)$$

Demostración

$$\begin{aligned}
\rho(p,ba)(ubq) &= ubq - coef(baL(p), ubq)bap = \\
&= ubq - coef(aL(p), q)ubap = \\
&= ub(q - coef(aL(p),q)ap) = \\
&= ub\rho(p,a)(q).
\end{aligned}$$

2.2.8.-Definición

El polinomio q se reduce a q' mediante el polinomio mónico p y el término a (en símbolos $q \dashrightarrow_{p,a} q'$) si $q \neq q'$ y $q' = \rho(p,a)(q)$. Al escribir $q \dashrightarrow_{p,a} q'$, supondremos que p es mónico.

2.2.9.-Lema

$\dashrightarrow_{p,a}$ está contenida en > y, por tanto, es noetheriana.

Demostración

Consecuencia de 2.2.8, 2.1.8, 2.1.9, y 2.1.10.

2.2.10.-Lema

(a) Si $q_1 \dashrightarrow_{p,a} q'_1$ y $q_2 \dashrightarrow_{p,a} q'_2$, entonces

$$q_1 + q_2 \dashrightarrow_{p,a} q'_1 + q'_2$$

$$q_1 - q_2 \dashrightarrow_{p,a} q'_1 - q'_2$$

(b) Si $q \dashrightarrow_{p,a} q'$, entonces $ubq \dashrightarrow_{p,ba} ubq'$.

2.2.11.-Definición

El polinomio q se reduce a q' mediante el polinomio mónico p (en símbolos: $q \dashrightarrow_p q'$) si existe un término a tal que $q \dashrightarrow_{p,a} q'$. Al escribir $q \dashrightarrow_p q'$, supondremos que p es mónico.

2.2.12.- Ejemplos

En $Z_2[X_1,X_2,X_3]$: $X_1X_2X_3 + X_1X_2 \dashrightarrow_{X1+1} X_1X_2X_3 + X_2$ y

$X_1X_2X_3 + X_1X_2 \dashrightarrow_{X1+1} X_2X_3 + X_1X_2$

2.2.13.-Lemas

(a) $-->_p = U\{-->_{p,a} : a \text{ es un término}\}$

(b) $-->_p \subseteq >$

(c) $-->_p$ es noetheriana.

(d) Si $q -->_p q'$, entonces $uaq -->_p uaq'$.

(e) Si $q -->_p^* q'$, entonces $uaq -->_p^* uaq'$.

Demostración

Consecuencia de 2.2.11, 2.2.9, y 2.2.10.

2.2.14.-Nota

Las siguientes implicaciones no son válidas:

(a) $q_1 -->_p q_1'$, $q_2 -->_p q_2'$ ===> $q_1 + q_2 -->_p q_1' + q_2'$

(b) $q -->_p q'$ ===> $rq -->_p rq'$

Demostración

En $Z_2[X_1,\ldots,X_4]$:

(a) Sean $q_1 = X_1X_2 + X_4$, $q_2 = X_1X_3 + X_4$, $p = X_1 + 1$, $q_1' = X_2 + X_4$ y $q_2' = X_3 + X_4$. Entonces

$q_1 --->_p q_1'$, $q_2 --->_p q_2'$ pero $q_1 + q_2 -\not->_p q_1' + q_2'$.

(b) Sean $q = X_1 + X_3$, $p = X_1 + X_2$, $q' = X_2 + X_3$ y $r = X_1 + 1$. Entonces $q -->_p q'$ pero $rq \not->_p rq'$.

2.2.15.- Definición

Sea F un conjunto finito de polinomios mónicos. Se dice que el polinomio q se reduce a q' mediante F (y se escribe $q -->_F q'$) si existe $p \in F$ tal que $q -->_p q'$.

2.2.16.- Notación

En lo que sigue F es un conjunto finito de polinomios mónicos. Escribiremos --> en lugar de $-->_F$.

2.2.17.- Lema

(a) $--> = \cup\{-->_p : p \in F\}$

(b) $--> \subseteq >$

(c) --> es noetheriana

(d) Si q --> q', entonces uaq --> uaq'.

(e) Si q -->* q', entonces uaq -->* uaq'.

Demostración

Consecuencia de 2.2.15 y 2.2.13.

2.2.18.- Nota

Las siguientes implicaciones no son válidas:

(a) $q_1 --> q_1'$, $q_2 --> q_2'$ ===> $q_1 + q_2 --> q_1' + q_2'$.

(b) q --> q' ===> rq --> rq'.

Demostración

Consideremos en $Z_2[X_1, X_2, X_3]$ el conjunto F formado por los polinomios $X_1 + X_2$ y $X_1 + X_3$.

(a) Sean $q_1 = X_1 + X_2$, $q_2 = X_1 + X_3$, $q_1' = q_2' = 0$. Entonces $q_1 --> q_1'$, $q_2 --> q_2'$; pero

$$q_1 + q_2 = X_2 + X_3 \not-> 0 = q_1' + q_2'.$$

(b) Sean $q = X_1 + X_2$, $q' = 0$ y $r = X_1 + 1$. Entonces q --> q'; pero

$$rq = X_1^2 + X_1X_2 + X_1 + X_2 \not-> 0 = rq'.$$

2.3.- REDUCCIONES E IDEALES

2.3.1.- Notación

Representaremos por I(F) el ideal engendrado por F y por $=_F$ (ó $=$) la relación de equivalencia definida por F (es decir, $q =_F q'$ sii $q - q' \in I(F)$).

2.3.2.- Lema

Para todo $n \in N$, $<-->^n \subseteq =$

Demostración

Por inducción sobre n.

Para n=0: $q <-->^0 q' \Longrightarrow q = q'$

$\Longrightarrow q - q' \in I(F)$

$\Longrightarrow q = q'$.

Para n=1: Supongamos que $q <--> q'$. Entonces $q --> q'$ o $q' --> q$. Si $q --> q'$, existe $p \in F$, un $u \in Z_p$ y un término a tales que $q' = q - uap$; luego, $q - q' = uap \in I(F)$ y $q = q'$. Análogamente, si $q' --> q$, $q = q'$. Por tanto, $q = q'$

Para $n = k + 1$, $k > 0$: Supongamos que $q <--->^{k+1} q'$ y $<-->^k \subseteq =$. Entonces existe r tal que $q <--> r <-->^k q'$. Por el caso $n = 1$, $q = r$. Luego, por la hipótesis de inducción, $r = q'$. Por tanto, $q = q'$.

2.3.3.- Lema

(a) $<-->^* \subseteq =$

(b) $-->^* \subseteq =$

Demostración

(a) Consecuencia de 2.3.2 puesto que $<--->^* = \bigcup_{n \geq 0} <--->^n$.

(b) $-->^* \subseteq <--->^* \subseteq =$.

2.3.4.- Nota

En general, $--->^* \neq =$.

Demostración

En $Z_2[X_1,X_2,X_3]$, sea $F=\{X_1 + X_2, X_1 + X_3\}$. Entonces $X_2 + X_3 = 0$, pero no $X_2 + X_3 --->^* 0$.

2.3.5.-Lema

Si $q ---> q'$, entonces $q + r \downarrow^* q' + r$.

Demostración

Supongamos que $q ---> q'$. Existen $p \in F$ y a tales que $q --->_{p,a} q'$. Sea $u = coef(aL(p), q)$. Entonces, $q' = q - uap$ y $coef(aL(p), q') = 0$. Sea $v = coef(aL(p), r)$.

$$\begin{aligned} \rho(a,p)(q + r) &= (q + r) - coef(aL(p), q + r)ap = \\ &= (q + r) - (u + v)ap = \\ &= q - uap + r - vap = \\ &= q' + r - vap. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho(a,p)(q' + r) &= (q' + r) - coef(aL(p), q' + r)ap = \\ &= (q' + r) - vap. \end{aligned}$$

Por tanto, $q + r --->^* q' + r - vap <---^* q' + r$ y $q + r \downarrow^* q' + r$.

2.3.6.- Lema

Si $\{p_1,\ldots,p_m\} \subseteq F$ y $\{u_1,\ldots,u_m\} \subseteq Z_p - \{0\}$,

$$q + u_1a_1p_1 +\ldots+ u_ma_mp_m <--->^* q.$$

Demostración

Por inducción sobre m:

Para $m = 1$:

$$u_1a_1p_1 \dashrightarrow 0 \quad \Longrightarrow q + u_1a_1p_1 \downarrow^* q \qquad \text{[por 2.3.5]}$$

$$\Longrightarrow q + u_1a_1p_1 \leftrightarrow^* q.$$

Para $m > 1$: Por el caso anterior,

$$q + u_1a_1p_1 + \ldots + u_ma_mp_m \leftrightarrow^* q + u_1a_1p_1 + \ldots + u_{m-1}a_{m-1}p_{m-1}.$$

Por la hipótesis de inducción,

$$q + u_1a_1p_1 + \ldots + u_{m-1}a_{m-1}p_{m-1} \leftrightarrow^* q.$$

Luego,

$$q + u_1a_1p_1 + \ldots + u_ma_mp_m \leftrightarrow^* q.$$

2.3.7.- Lema

$\equiv \subseteq \leftrightarrow^*$.

Demostración

Sean q y q' tales que $q \equiv q'$. Si $q = q'$, $q \leftrightarrow^* q'$. Supongamos que $q \neq q'$. Existen $\{p_1,\ldots,p_m\} \subseteq F$, $\{u_1,\ldots,u_m\} \subseteq Z_p - \{0\}$ y términos $a_1,\ldots,a_m$ tales que $q - q' = u_1a_1p_1 + \ldots + u_ma_mp_m$. Por 2.3.6,

$$q = q' + u_1a_1p_1 + \ldots + u_ma_mp_m \leftrightarrow^* q'.$$

2.3.8.- Corolario

$\equiv = \leftrightarrow^*$.

Demostración

Consecuencia de 2.3.3 y 2.3.7.

2.4.-BASES DE GRÖBNER

2.4.1.-Definición

F es una base de Gröbner si ---> es canónica.

2.4.2.- Ejemplo

En $Z_2[X_1,X_2,X_3]$, $F = \{X_1 + X_2,\ X_1 + X_3\}$ no es una base de Gröbner.

2.4.3.- Teorema

Las condiciones siguientes son equivalentes:

(a) F es una base de Gröbner.

(b) ---> es confluente.

(c) ---> tiene la propiedad de Church-Rösser.

(d) ---> es localmente confluente.

(e) Cada elemento de $Zp[X_1,\ldots,X_n]$ tiene una única forma --->-irreducible.

Demostración

Consecuencia de 2.4.1, 1.26 y 2.2.17.

2.4.4.- Lema

Si $q_1 - q_2 \longrightarrow^* 0$, entonces $q_1 \downarrow^* q_2$.

Demostración

Por hipótesis, existen polinomios $p_1,\ldots,p_m$ de F, términos $a_1,\ldots,a_m$ y aplicaciones $\varrho_1 = \varrho(p_1,a_1),\ldots,\ \varrho_m = \varrho(p_m,a_m)$, tales que $\varrho^*(q_1 - q_2) = 0$, donde $\varrho^* = \varrho_m \circ \ldots \circ \varrho_1$. Puesto que,

$$\rho^*(q_1 - q_2) = 0 \Longrightarrow \rho^*(q_1) - \rho^*(q_2) = 0 \qquad \text{[por 2.2.6]}$$
$$\Longrightarrow \rho^*(q_1) = \rho^*(q_2)$$
$$\Longrightarrow q_1 \dashrightarrow^* \rho^*(q_1) = \rho^*(q_2) \dashleftarrow^* q_2$$
$$\Longrightarrow q_1 \downarrow^* q_2$$

resulta que $q_1 \downarrow^* q_2$.

2.4.5.- Lema

Sea F una base de Gröbner.

(a) Si para todo $i \in \{1,\ldots,m\}$, $q_i \dashrightarrow^* 0$, entonces $q_1 + \ldots + q_m \dashrightarrow^* 0$.

(b) Si $q \dashrightarrow^* 0$, entonces $rq \dashrightarrow^* 0$.

Demostración

(a) Por inducción sobre m:

Para $m = 2$: Existen polinomios $p_1,\ldots,p_k \in F$, términos $a_1,\ldots,a_k$ y aplicaciones $\rho_1 = \rho(p_1,a_1),\ldots,\ \rho_k = \rho(p_k,a_k)$, tales que $\rho^*(q_1) = 0$, donde $\rho^* = \rho_k \circ \ldots \circ \rho_1$. Entonces

$$\rho^*(q_1 + q_2) = \rho^*(q_1) + \rho^*(q_2) = \qquad \text{[por 2.6]}$$
$$= \rho^*(q_2)$$

Puesto que $\rho^*(q_2) \dashleftarrow^* q_2 \dashrightarrow^* 0$ y $\dashrightarrow$ es canónica, $\rho^*(q_2) \downarrow^* 0$; luego, existen $s_1,\ldots,s_l \in F$, $b_1,\ldots,b_l$, $\tau_1 = \rho(s_1,b_1),\ldots,\ \tau_l = \rho(s_l,b_l)$, $\tau^* = \tau_1 \circ \ldots \circ \tau_l$ tales que $\tau^*(\rho^*(q_2)) = 0$. Por tanto, $(\tau^* \circ \rho^*)(q_1 + q_2) = 0$ y $q_1 + q_2 \dashrightarrow^* 0$.

Para $m = k+1 > 2$:

$$q_1 + \ldots + q_{k+1} = (q_1 + \ldots + q_k) + q_{k+1} \dashrightarrow^* 0$$

(por hipótesis de inducción y el caso $m = 2$).

(b) Sea $r = u_1a_1 + \ldots + u_ma_m$. Para todo $i \in \{1,\ldots,m\}$, $u_ia_iq \dashrightarrow^* 0$ (por 2.2.17). Luego,

$$rq = u_1a_1q + \ldots + u_ma_mq \;\text{--->}^{*}\; 0 \qquad \text{[por (a)]}$$

2.4.6.- Nota

Las siguientes implicaciones no son válidas:

(a) $q_1 \;\text{--->}^{*}\; 0,\ q_2 \;\text{--->}^{*}\; 0 \;\text{===>}\; q_1 + q_2 \;\text{--->}^{*}\; 0$

(b) $q \;\text{--->}^{*}\; 0 \;\text{===>}\; rq \;\text{--->}^{*}\; 0$

Demostración

En $Z_2[X_1,X_2,X_3]$:

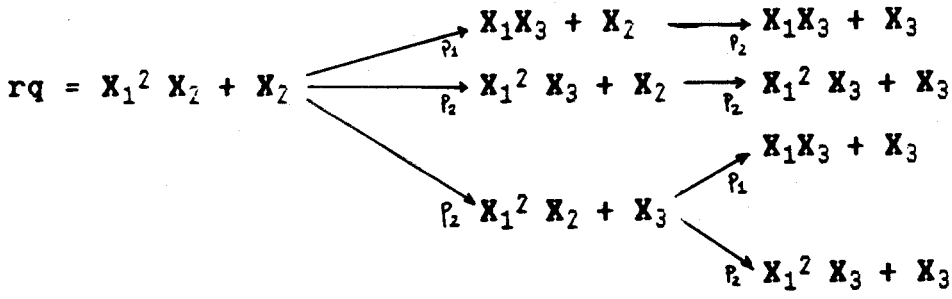
(a) Sean $F = \{X_1 + X_2,\ X_1 + X_3\}$, $q_1 = X_1 + X_2$ y $q_2 = X_1 + X_3$. Entonces $q_1 \;\text{--->}^{*}\; 0$, $q_2 \;\text{--->}^{*}\; 0$, pero

$$q_1 + q_2 = X_2 + X_3 \;\not\longrightarrow^{*}\; 0.$$

(b) Sean $p_1 = X_1X_2 + X_3$, $p_2 = X_2 + X_3$, $F = \{p_1,\ p_2\}$, $q = X_1X_2 + X_2$ y $r = X_1 + 1$. Entonces

$$q = X_1X_2 + X_2 \;\text{--->}_{p1}\; X_3 + X_2 \;\text{--->}_{p2}\; 0$$

Luego, $q \;\text{--->}^{*}\; 0$, pero



Las formas --->-irreducibles de rq son $X_1X_3 + X_3$ y $X_1^2 X_3 + X_3$

Por tanto, $rq \;\not\longrightarrow^{*}\; 0$.

2.5.- BASES DE GRÖBNER Y PERTENENCIA A UN IDEAL

2.5.1.- Lema

Si $q \dashrightarrow^* 0$, entonces $q \in I(F)$.

Demostración

$q \dashrightarrow^* 0 \Longrightarrow q \equiv 0$ [por 2.3.3.b]

$\Longrightarrow q \in I(F)$ [por 2.3.1]

2.5.2.- Lema

El recíproco del Lema anterior no es válido.

Demostración

En $Z_2[X_1,X_2,X_3]$, sean $F = \{X_1 + X_2,\ X_1 + X_3\}$ y $q = X_2 + X_3$. Entonces $q \in I(F)$ pero $q \not\dashrightarrow^* 0$.

2.5.3.- Teorema

Las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) F es una base de Gröbner.

(b) Para todo q, $q \in I(F) \Longrightarrow q \dashrightarrow^* 0$.

Demostración

(a) $\Longrightarrow$(b):

$q \in I(F) \Longrightarrow q \equiv 0$

$\Longrightarrow q \longleftrightarrow^* 0$ [por 2.3.7]

$\Longrightarrow q \downarrow^* 0$ [por (a) y 2.4.3.c]

$\Longrightarrow q \dashrightarrow^* 0$.

(b) $\Longrightarrow$(a): Por 2.4.3, basta probar que $\dashrightarrow$ tiene la propiedad de Church-Rösser. (i.e. $q_1 \longleftrightarrow^* q_2 \Longrightarrow q_1 \downarrow^* q_2$).

$q_1 <--->^* q_2$ ===> $q_1 \equiv q_2$ [por 2.3.a]

===> $q_1 - q_2 \in I(F)$ [por 2.3.1]

===> $q_1 - q_2 --->^* 0$ [por (b)]

===> $q_1 \downarrow^* q_2$ [por 2.4.4]

2.5.4.- Corolario

Sea F una base de Gröbner. Para todo q,

$$q \in I(F) <===> q --->^* 0.$$

Demostración

Consecuencia de 2.5.1 y 2.5.3.

2.5.6.- Lema

Sea F una base de Gröbner

(a) $FN(q_1 +...+ q_m) = FN(q_1) +...+ FN(q_m)$

(b) $FN(rq) = FN(rFN(q))$

(c) $FN(q_1 - q_2) = FN(q_1) - FN(q_2)$

Demostración

(a) Por la definición de la foma normal, $q_i --->^* FN(q_i)$ para todo $i \in \{1,...,m\}$; luego, $q_i \equiv FN(q_i)$. Por tanto,

$$q_1 +...+ q_m \equiv FN(q_1) +...+ FN(q_m)$$

$$q_1 +...+ q_m <--->^* FN(q_1) +...+ FN(q_m)$$

$$FN(q_1 +...+ q_m) \equiv FN(q_1) +...+ FN(q_m)$$

(b) Por la definición de FN, $q --->^* FN(q)$. Además

$q --->^* FN(q)$ ===> $q \equiv FN(q)$ [por 2.3.3.b]

===> $rq \equiv r.FN(q)$

===> $rq <--->^* r.FN(q)$ [por 2.5.5]

===> $rq \downarrow^* r.FN(q)$ [por 2.4.3]

===> $FN(rq) = FN(r.FN(q))$

Luego, $FN(rq) = FN(r.FN(q))$.

(c) $FN(q_1 - q_2) = FN(q_1 + (-q_2)) =$

$= FN(q_1) + FN(-q_2) =$

$= FN(q_1) - FN(q_2)$

2.5.7.- Teorema

Las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) F es una base de Gröbner

(b) Para todo q, q_1, q_2:

$$q_1 \leftarrow\!\!-\!\!-\!\!-^* q \longrightarrow^* q_2 \Longrightarrow q_1 - q_2 \longrightarrow^* 0.$$

Demostración

(a) ===> (b): Supongamos que $q_1 \leftarrow\!\!-\!\!-\!\!-^* q \longrightarrow^* q_2$. Por 2.4.3, $q_1 \downarrow^* q_2$. Luego, $FN(q_1) = FN(q_2)$. Por 2.5.6.c, $FN(q_1 - q_2) = FN(q_1) - FN(q_2) = 0$. Por tanto, $q_1 - q_2 \longrightarrow^* 0$

(b) ===> (a) Por 2.4.3,basta probar que --> es confluente. Sean q, q_1, q_2 tales que $q_1 \leftarrow\!\!-\!\!-\!\!-^* q \longrightarrow^* q_2$. Por hipótesis, $q_1 - q_2 \longrightarrow^* 0$. Luego, por 2.4.4, $q_1 \downarrow^* q_2$.

2.6.- PARES CRITICOS

2.6.1.- Definición

El par crítico de q_1 y q_2 es

$$PC(q_1,q_2) = (m.c.m(L(q_1),L(q_2)).R(q_1)/L(q_1),\ m.c.m(L(q_1),L(q_2)).R(q_2)/L(q_2))$$

2.6.2.- Definición

El S-polinomio del par $\langle q_1,q_2\rangle$ es $SP(q_1,q_2) = q_1 - q_2$.

2.6.3.-Lema

Si $q_1,q_2 \in I(F)$, $SP(PC(q_1,q_2)) \in I(F)$.

Demostración

Sean $a = m.c.m(L(q_1),L(q_2))$ y $b_i = a/L(q_i)$ para $i = 1,2$

Entonces:

$$\begin{aligned} SP(PC(q_1,q_2)) &= b_1R(q_1) - b_2R(q_2) = \\ &= b_1(q_1 - L(q_1)) - b_2(q_2 - L(q_2)) = \\ &= b_1q_1 - a - b_2q_2 + a = \\ &= b_1q_1 - b_2q_2 \in \\ &\in I(F). \end{aligned}$$

2.7.-CARACTERIZACION DE BASES DE GRÖBNER MEDIANTE PARES CRITICOS.

2.7.1.-Lema

Sean p_1, $p_2 \in F$ y q, q_1, $q_2 \in Z_p[X_1,\ldots,X_n]$ tales que $q \xrightarrow{p1,a1} q_1$ y $q \xrightarrow{p2,a2} q_2$.

(a) Si $a_1 L(p_1) \neq a_2 L(p_2)$, entonces $q_1 \downarrow^* q_2$.

(b) Si $SP(PC(p_1,p_2)) \xrightarrow{}{}^* 0$, entonces $q_1 \downarrow^* q_2$.

Demostración

(a) Para $i \in \{1,2\}$, sea $\rho_i = \rho(p_i, a_i)$. Puesto que $q \xrightarrow{pi,ai} q_i$.

$$coef(a_iL(p_i),q) = u_i \neq 0. \qquad [1.i]$$

Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que

$$a_1L(p_1) > a_2L(p_2),$$

con lo que

$$coef(a_1 L(p_1), a_2 R(p_2)) = 0. \qquad [2]$$

Sea

$$r = q - u_1a_1L(p_1) - u_2a_2L(p_2). \qquad [3]$$

Entonces

$$coef(a_iL(p_i),r) = 0 \qquad [4.i]$$

(ya que $a_1L(p_1) \neq a_2L(p_2)$).

$$\begin{aligned} q_1 &= q - u_1a_1p_1 = \\ &= q - u_1a_1L(p_1) - u_1a_1R(p_1) = \\ &= r + u_2a_2L(p_2) - u_1a_1R(p_1) \end{aligned} \qquad [5.1]$$

Análogamente,

$$q_2 = r + u_1a_1L(p_1) - u_2a_2R(p_2). \qquad [5.2]$$

Por [4.1] y [2],

$\text{coef}(a_1L(p_1),\ q_2) = u_1;$

$\rho_1(q_2) = q_2 - a_1u_1p_1.$

Por [5.2],

$$\rho_1(q_2) = r - u_1a_1R(p_1) - u_2a_2R(p_2) \qquad [6]$$

Distinguimos dos casos:

Caso 1: $\text{coef}(a_2L(p_2),\ a_1R(p_1)) = 0$. Entonces, por [5.1] y [4.2]

$\text{coef}(a_2L(p_2),\ q_1) = u_2;$

$\rho_2(q_1) = q_1 - u_2a_2p_2 =$

$= r - u_2a_2R(p_2) - u_1a_1R(p_1) =$

$= \rho_1(q_2).$

Luego, $q_1 \downarrow^* q_2$.

Caso 2: $\text{coef}(a_2L(p_2),a_1R(p_1)) = u_2' \neq 0$. Entonces por [6] y [4.2],

$\text{coef}(a_2L(p_2),\rho_1(q_2)) = -u_1u_2';$

$\rho_2(\rho_1(q_2)) = r - u_1a_1R(p_1) - u_2a_2R(p_2) + u_1u_2'a_2p_2$

Por [5.1] y [4.2],

$\text{coef}(a_2L(p_2),q_1) = u_2 - u_1u_2';$

$\rho_2(q_1) = r + u_2a_2L(p_2) - u_1a_1R(p_1) - (u_2-u_1u_2')a_2p_2 =$

$= r - u_2a_2R(p_2) - u_1a_1R(p_1) + u_1u_2'a_2p_2 =$

$= \rho_2(\rho_1(q_2)).$

Luego, $q_1 \downarrow^* q_2$.

(b) Si $a_1L(p_1) \neq a_2L(p_2)$, entonces $q_1 \downarrow^* q_2$ por (a). Supongamos que

$$a_1L(p_1) = a_2L(p_2). \qquad [1]$$

Sean

$u = \text{coef}(a_1L(p_1),q) = \text{coef}(a_2L(p_2),q),$

$b = \text{m.c.m}\ (L(p_1),L(p_2)),$ [2]

$$c_i = b/L(p_i) \quad (i \in \{1,2\}) \qquad [3.i]$$

Por [1], $a_1L(p_1)$ es un múltiplo común de $L(p_1)$ y $L(p_2)$, y por [2], $a_1L(p_1)$ es un múltiplo de b. Sea

$$d = a_1L(p_1)/b. \qquad [4.1]$$

Por [1],

$$d = a_2L(p_2)/b. \qquad [4.2]$$

Por [3.i] y [4.i],

$$dc_i = a_i. \qquad [5.i]$$

$$q_1 - q_2 = (q - ua_1p_1) - (q - ua_2p_2).$$

Por [1],

$$q_1 - q_2 = - ua_1R(p_1) + ua_2R(p_2).$$

Por [5.1] y [5.2],

$$q_1 - q_2 = udc_1R(p_1) + udc_2R(p_2) =$$

$$= ud(c_1R(p_1) - c_2R(p_2)).$$

Por [3] y 6.1,

$$q_1 - q_2 = - udSP(PC(p_1,p_2)).$$

Por 2.2.17.e,

$$q_1 - q_2 \text{ ---}>^* 0.$$

Por 2.4.4,

$$q_1 \downarrow^* q_2 \quad .$$

2.7.2 Teorema

Las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) F es una base de Gröbner

(b) Para todo $p_1,p_2 \in F$: $SP(PC(p_1,p_2)) \text{ ---}>^*_F 0$.

Demostración

(a) ===>(b): Por 2.6.4 y 2.5.3.

(b) ===>(a): Por 2.4.3 y 2.7.1.

2.8.- ALGORITMO DE CALCULO DE BASES DE GRÖBNER

2.8.1.- Notación

En lo que sigue, representaremos por A el conjunto de los conjuntos finitos de polinomios mónicos de $Z_p[X_1,\ldots,X_n]$.

2.8.2.- Definición

Una función de selección es una función computable

$$Sel: Z_p[X_1,\ldots,X_n] \times A \longrightarrow Z_p[X_1,\ldots,X_n]$$

tal que para todo $F \in A$ y todo $p \in Z_p[X_1,\ldots,X_n]$ que no sea $\longrightarrow_F$-irreducible, $p \longrightarrow_F Sel(p,F)$.

2.8.3.- Lema

La función

$$selector: Z_p[X_1,\ldots,X_n] \times A \longrightarrow Z_p[X_1,\ldots,X_n]$$

que a cada $p = u_1a_1 + \ldots + u_ka_k$ y $F = \{q_1,\ldots,q_m\} \in A$ le asocia selector(p,F), definida por:

(i) si p es $\longrightarrow_F$-irreducible, selector(p,F) = p;

(ii) si p es $\longrightarrow_F$-reducible, selector(p,F) = $\varrho(q,a)(p)$,

donde

$$j = \inf\{i \in \{1,\ldots,m\}: (\exists a)\ [coef(aL(q_i)),p) \neq 0]\},$$

$$q = q_j,$$

$$j' = \inf\{i \in \{1,\ldots,k\}: (\exists a)\ [aL(q) = u_ia_i]\},$$

$$a = a_{j'}/L(q);$$

es una función de selección.

2.8.4.- Definición

Una función computable

$$S: Z_p[X_1,\ldots,X_n] \times A \longrightarrow Z_p[X_1,\ldots,X_n]$$

es un algoritmo de forma normal si para todo $F \in A$ y todo $p \in Z_p[X_1,\ldots,X_n]$, $S(p,F)$ es una forma $--->_F$-irreducible de p.

2.8.5.- Lema

La función

$$FN : Z_p[X_1,\ldots,X_n] \times A \longrightarrow Z_p[X_1,\ldots,X_n]$$

definida por

$$FN(p,F) = \begin{cases} p, \text{ si } p \text{ es } --->_F\text{-irreducible;} \\ FN(\text{selector}(p,F),F), \text{ en caso contrario;} \end{cases}$$

es un algoritmo de forma normal.

Demostración

El cálculo de FN(p,F) termina porque $--->_F$ es noetheriana (2.2.17) y $p \; --->^* \; FN(p,F)$ por 2.8.3.

2.8.6.-Lema

Si $p \; --->^*_F \; q$ y $p \in I(F)$, entonces $q \in I(F)$.

Demostración

$$p \; --->^* \; q \Longrightarrow p \; <--->^* \; q$$

$$\Longrightarrow p \equiv q \qquad \text{[por 2.3.8]}$$

$$\Longrightarrow p - q \in I(F)$$

$$\Longrightarrow q = p - (p - q) \in I(F).$$

2.8.7.- Lema

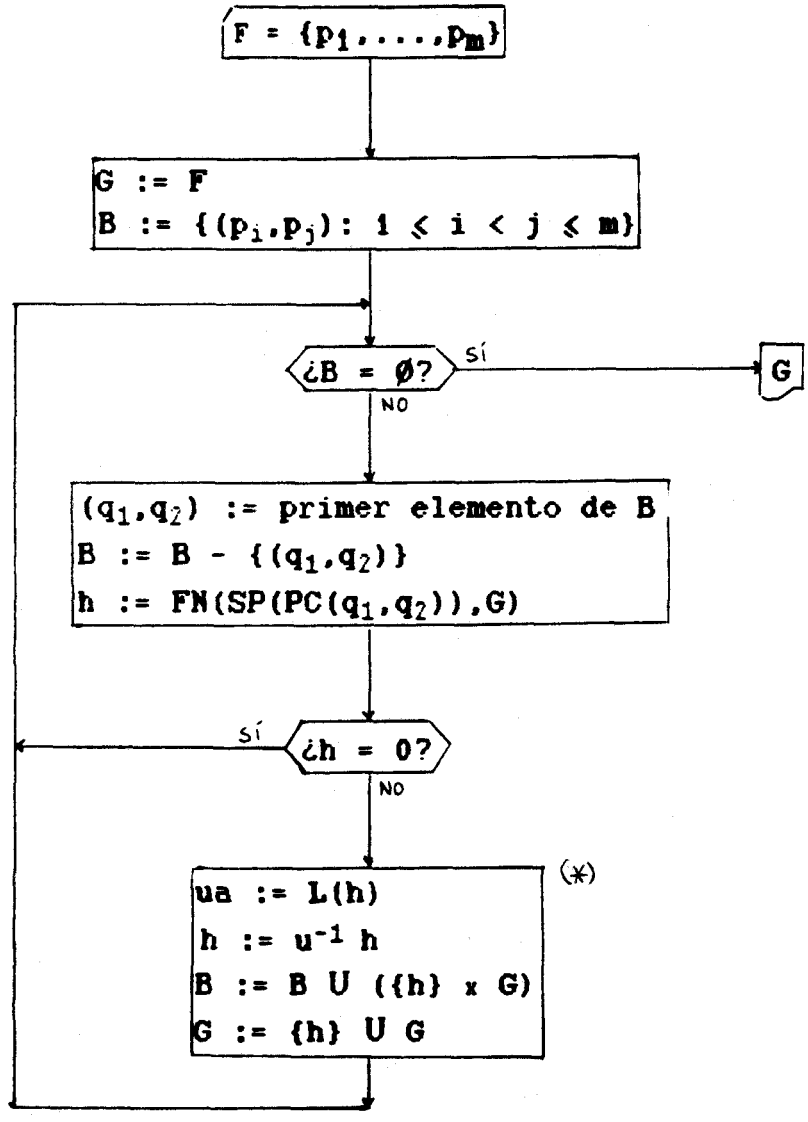
Si $p \in F$, entonces $FN(p,F) \in I(F)$.

Demostración

Por 2.8.5 y 2.8.4, $p \longrightarrow^*_F FN(p,F)$. Por hipótesis y 2.8.6, $FN(p,F) \in I(F)$.

2.8.8.- Algoritmo (para calcular bases de Gröbner)

Dado $F = \{p_1,\ldots,p_m\}$, el siguiente procedimiento



termina construyendo un G tal que $I(F) = I(G)$ y G es una base de Gröbner.

Demostración

(a) El procedimiento termina:

Para cada $i \geq 1$, sea G_i el valor de G tras la i-ésima ejecución del bloque (*) y $P_i = \{L(q): q \in G_i\}$. Entonces para todo i,

$G_i \subset G_{i+1}$, $P_i \subseteq P_{i+1}$, $I(P_i) \subseteq I(P_{i+1})$ e $I(P_i) \neq I(P_{i+1})$, ya que en caso contrario $L(h) \in I(P_i)$ y h sería $\xrightarrow{}_{G_i}$-reducible, en contradicción con la definición de h. Por lo tanto, si el prodecimiento no termina, se forma una cadena infinita ascendente de ideales de $Z_p[X_1,\ldots,X_n]$, $I(P_i)$, en contradicción con el teorema de la base de Hilbert.

(b) Veamos que I(F) = I(G):

Sea k el número de veces que se ejecuta el bloque (*). Si k = 0 ,entonces G = F e I(G) = I(F). Supongamos que k>0. Para cada $i \in \{1,\ldots,k\}$ sea h_i el valor de h en la i-ésima ejecución del bloque (*) y G_i el valor de G tras la i-ésima ejecución dicho bloque . Sea $G_0 = F$. Veamos, por inducción sobre i, que para todo $i \in \{0,\ldots,k\}$, $I(G_i) = I(F)$.

$I(G_0) = I(F)$.

Sea $j \in \{1,\ldots,k-1\}$. Supongamos que $I(G_j) = I(F)$. Entonces h_{j+1} es un múltiplo de $FN(SP(PC(q_1,q_2)),G_j)$ y $q_1, q_2 \in G_j$. Por 2.6.4, $SP(PC(q_1,q_2)) \in I(G_j)$. Por 2.8.7, $h_{j+1} \in I(G_j)$. Por tanto, $h_{j+1} \in I(F)$ y $I(G_{j+1}) = I(G_j \cup \{h_{j+1}\}) = I(F)$.

Por consiguiente, $I(G) = I(G_k) = I(F)$.

(c) G es una base de Gröbner:

Por 2.7.2, basta probar que para todo $q_1, q_2 \in G$, $SP(PC(q_1,q_2)) \xrightarrow{}_G^* 0$.

Sean G_0, B_0 los valores iniciales de G y B, k el número de veces que se ejecuta el bloque (*), G_i y B_i los valores de G y B tras la i-ésima ($1 \leq i \leq k$) ejecución dicho bloque.

Sean $q_1, q_2 \in G$. Tenemos que demostrar que $SP(PC(q_1,q_2)) \rightarrow_G^* 0$. Sean

$$i_1 = \inf\{i: q_1 \in G_i\},$$

$$i_2 = \inf\{i: q_2 \in G_i\},$$

$$i' = \max(\{i_1, i_2\}).$$

Supongamos que $i' = i_1$. $\langle q_1,q_2\rangle \in B_{i'}$ [dem: si $i' = 0$, $B_0 = B_{i'}$ y $\langle q_1,q_2\rangle \in B_{i'}$; si $i' > 0$, $B_{i'} = B_{i'-1} \cup (\{q_1\} \times G_{i'-1})$ y $\langle q_1,q_2\rangle \in B_{i'}$]. $h := FN(SP(PC(q_1,q_2)),G_j)$ se ejecuta para algún $j \in \{i',\ldots,k\}$. Si $h = 0$, $SP(PC(q_1,q_2)) \rightarrow_{G_j}^* 0$ y $SP(PC(q_1,q_2)) \rightarrow_G^* 0$. Si $h \neq 0$, $h \in G_{j+1}$, $SP(PC(q_1,q_2)) \rightarrow_{G_j}^* h \rightarrow_{G_{j+1}} 0$, y $SP(PC(q_1,q_2)) \rightarrow_G^* 0$. Por tanto, $SP(PC(q_1,q_2)) \rightarrow_G^* 0$.

2.8.9.- Ejemplo

Vamos a aplicar el Algoritmo anterior para calcular una base de Gröbner del ideal de $Z_2[a,b,c,d]$ engendrado por el conjunto $F = \{p_1 = bd + b + d + 1,\ p_2 = cd + d,\ p_3 = ab + b\}$.

Solución

$G = F$

$FN(SP(PC(p_1,p_2)),G) = bc + b + c + 1$

$p_4 = bc + b + c + 1$

$G = G \cup \{p_4\}$

$FN(SP(PC(p_1,p_3)),G) = ad + a + d + 1$

$p_5 = ad + a + d + 1$

$G = G \cup \{p_5\}$

$FN(SP(PC(p_2,p_3)),G) = 0$

$FN(SP(PC(p_1,p_4)),G) = 0$

$FN(SP(PC(p_2,p_4)),G) = 0$

$FN(SP(PC(p_3,p_4)),G) = ac + a + c + 1$

$p_6 = ac + a + c + 1$

$G = G \cup \{p_6\}$

Los restantes también son iguales a 0. Por tanto una base de Gröbner de I(F) es G = {bd + b + d + 1, cd + d, ab + b, bc + b + c + 1, ad + a + d + 1, ac + a + c + 1}.

2.8.10.- Nota

En el ejemplo anterior hemos tenido que estudiar 15 pares y sólo 3 han dado lugar a nuevos polinomios. En el próximo parágrafo trataremos de establecer criterios para eliminar pares que no producen nuevos polinomios.

2.9.- MEJORAS DEL ALGORITMO

2.9.1.-Lema

Sean $p_1,p_2 \in F$. Si $L(p_1)$ y $L(p_2)$ son primos entre sí, entonces $SP(PC(p_1,p_2)) \rightarrow^*_F 0$.

Demostración

Sea $q = SP(PC(p_1,p_2))$. Entonces, por 2.6.1 y 2.2.3,

$$\begin{aligned} q &= L(q_2)R(q_1) - L(q_1)R(q_2) \\ &\rightarrow^* o(R(q_1),L(q_2))(q) \\ &= -L(q_1)R(q_2) \\ &\rightarrow^* \rho(R(q_2),L(q_1))(-L(q_1)R(q_2)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

2.9.2.- Teorema

F es una base de Gröbner sii para todo $p_1,p_2 \in F$ cuyos líderes no son primos entre sí, $SP(PC(p_1,p_2)) \rightarrow^*_F 0$.

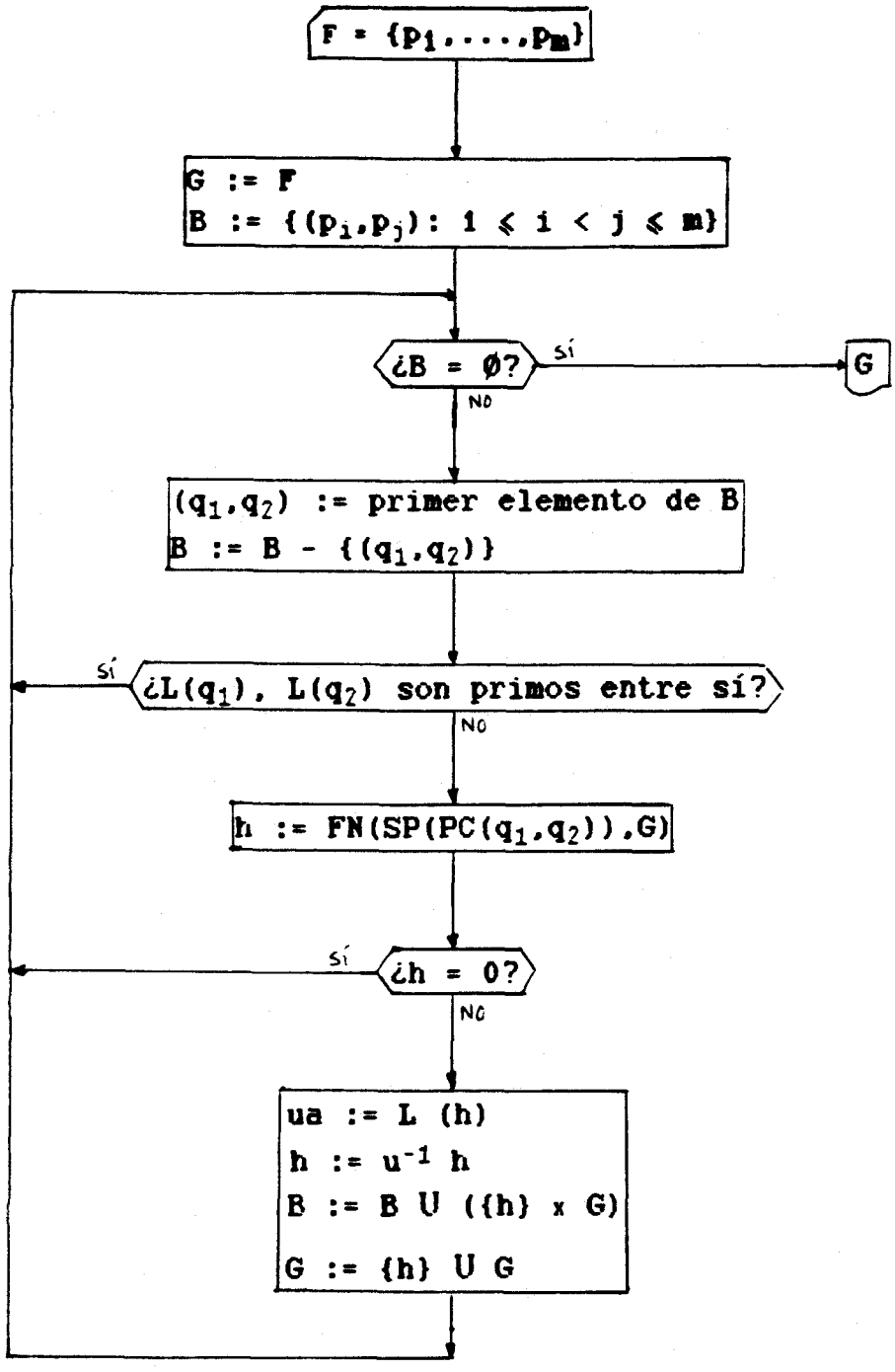
Demostración

(===>) por 2.7.2.

(<===) Sean $p_1,p_2 \in F$. Si $L(p_1)$ y $L(p_2)$ son primos entre sí, entonces $SP(PC(p_1,p_2)) \rightarrow^*_F 0$, por 2.9.1. Si $L(p_1)$ y $L(p_2)$ no son primos entre sí, entonces $SP(PC(p_1,p_1)) \rightarrow^*_F 0$ por hipótesis. Luego, $SP(PC(p_1,p_2)) \rightarrow^*_F 0$. Por 2.7.2 F es una base de Gröbner.

2.9.3.- Algoritmo (2º para calcular bases de Gröbner)

Dado $F = \{p_1,\ldots,p_n\}$, el siguiente procedimiento



termina construyendo un G tal que I(F) = I(G) y G es una base de Gröbner.

Demostración

Igual que la de 2.8.8, excepto que en la parte (c) se sustituye "sean $q_1, q_2 \in G$ " por "sean $q_1, q_2 \in G$ tales que sus líderes no son primos entre sí" y "2.7.2" por "2.9.2".

2.9.4.-Ejemplo

En el ejemplo 2.8.9, se evitan 3 reducciones: la de los pares (p_2,p_3), (p_4,p_5) y (p_1,p_6).

2.9.5.- Definición

Sea $A \subseteq Z_p[X_1,\ldots,X_n]$. El par (q_1,q_2) es AF-eliminable si se verifican las siguientes condiciones:

(a) $q_1, q_2 \in A$

(b) Existe $p \in F - A$ tal que m.c.m$(L(q_1),L(q_2))$ es divisible por $L(p)$.

2.9.6.- Lema

Si $q_1 \leftarrow\!\!- q \dashrightarrow q_2$ y $q_1 \downarrow^* q_2$, entonces $q_1 \leftarrow\!\!\dashrightarrow q_2$ $(< q)$.

Demostración

Es una consecuencia inmediata de 2.2.7.

2.9.7.-Teorema

Sea $A \subseteq Z_p[X_1,\ldots,X_n]$. F es una base de Gröbner sii para todo $p_1, p_2 \in F$ tales que $PC(p_1, p_2)$ no es AF-eliminable, $SP(PC(p_1, p_2)) \dashrightarrow^* 0$.

Demostración

(===>) Según 2.7.2.

(<===) Por 2.4.3, 2.2.7 y 1.30, basta probar que para todo q, q_1, q_2:

$$q_1 \leftarrow\!\!- q \dashrightarrow q_2 \quad ===> \quad q_1 \leftarrow\!\!\dashrightarrow^* q_2 \ (< q)$$

Supongamos que $q_1 \leftarrow\!\!- q \dashrightarrow q_2$. Existen $p_1, p_2 \in F$,

u_1, $u_2 \in Z_p - \{0\}$ y monomios a_1, a_2 tales que $q_i = \rho(p_i,a_i)(q)$ y $u_i = coef(a_iL(p_i), q)$. Distinguimos los siguientes casos:

Caso 1: $a_1L(p_1) \neq a_2L(p_2)$:

Según 2.7.1(a) y 2.9.6, $q_1 <--->^* q_2$ $(< q)$.

Caso 2: $a_1L(p_1) = a_2L(p_2)$:

Caso 2.1: (p_1,p_2) no es AF-eliminable:

Según 2.7.1(b) y 2.9.6, $q_1 <--->^* q_2$ $(< q)$.

Caso 2.2: (p_1,p_2) es AF-eliminable:

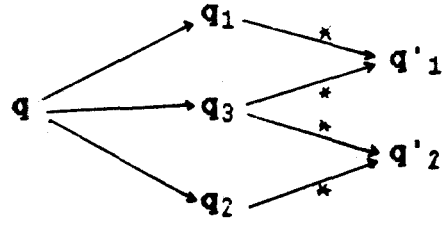
Existe $p \in F - A$ tal que m.c.m$(L(q_1),L(q_2))$ es divisible por $L(p)$. Puesto que $a_1L(p_1)$ es múltiplo de $L(p_1)$ y de $L(p_2)$, también lo es de $L(P)$. Sea $d = a_1L(p_1)/L(p)$. Entonces

$$dL(p) = a_1L(p_1) = a_2L(p_2)$$

y $coef(dL(p), q) = u_1 \neq 0$;

luego $q \dashrightarrow q_3 = \rho(p, d)(q)$.

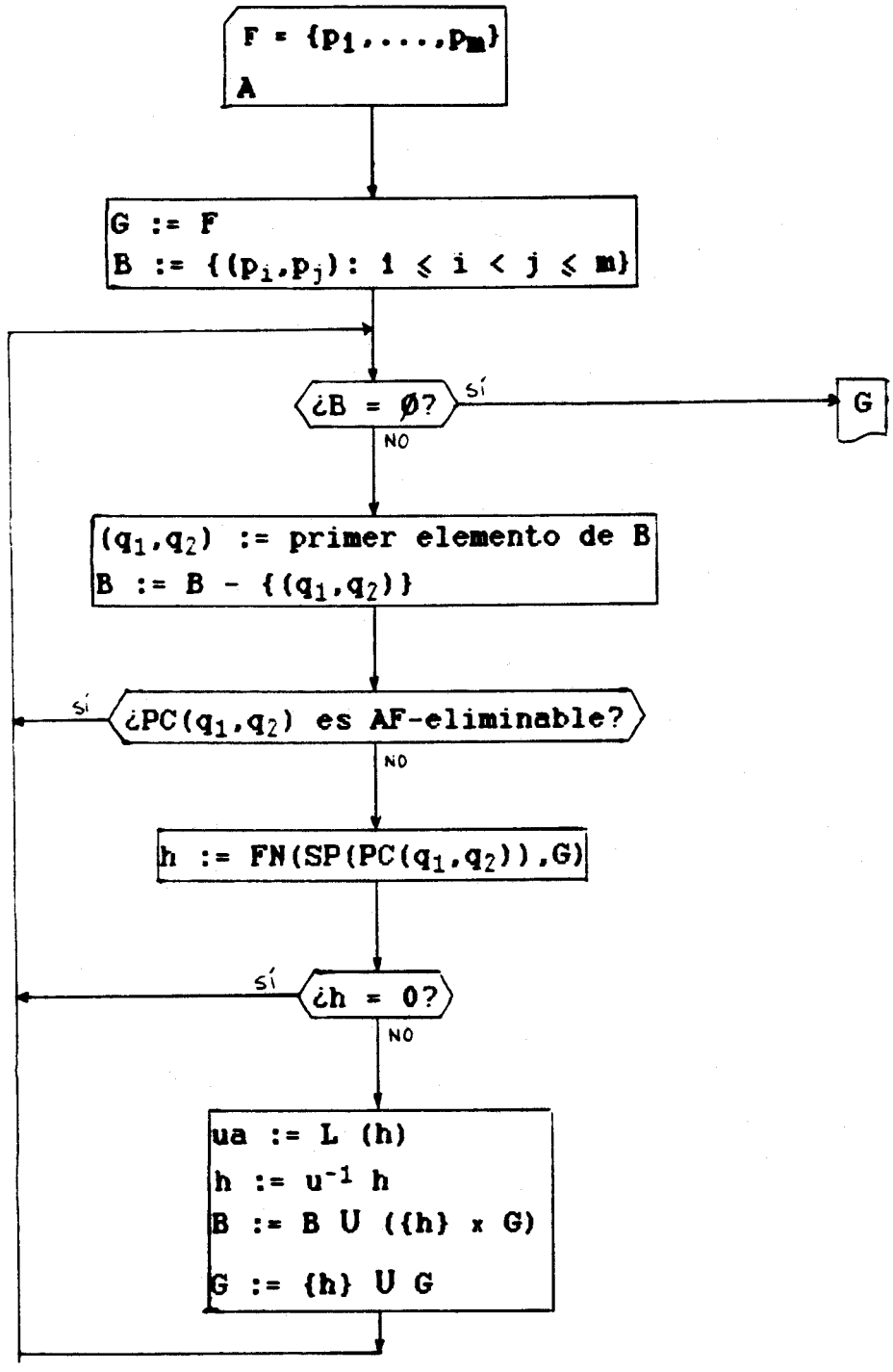
Para $i \in \{1, 2\}$ tenemos: (p_i,p) no es AF-eliminable (porque $p \notin A$), $q_i = \rho(p_i, a_i)(q) <--- q ---> \rho(p, d)(q) = q_3$ y $a_iL(p_i) = dL(p)$). Aplicando el Caso 2.1, tenemos que $q_i \downarrow^* q_3$. Por tanto, existen q'_1, q'_2 tales que



Luego, $q_1 <--->^* q_2$ $(< q)$.

2.9.8.- Algoritmo (3º para calcular bases de Gröbner)

Dados $F = \{p_1,\ldots,p_m\}$ y A, un conjunto recursivo de polinomios, el siguiente procedimiento



termina construyendo un G tal que I(F) = I(G) y G es una base de Gröbner.

Demostración

Igual que la de 2.8.8, excepto que en la parte (c) se sustituye "sean $q_1, q_2 \in G$ " por "sean $q_1, q_2 \in G$ tales que $PC(q_1, q_2)$ no es AF-eliminable" y "2.7.2" por "2.9.7".

2.9.9.- Ejemplo

En el ejemplo 2.8.9, considerando el conjunto A de los polinomios distintos de p_1 se evitan 4 reducciones: la de los pares (p_2, p_3), (p_2, p_4), (p_3, p_5) y (p_4, p_5).

2.10.- BASES DE GRÖBNER REDUCIDAS

2.10.1.- Definición

Una base de Gröbner F es reducida si para todo $p \in F$, $FN(p, F - \{p\}) \neq p \neq 0$.

2.10.2.- Teorema

Sean F y F' bases de Gröbner reducidas. Si $I(F) = I(F')$ entonces $F = F'$.

Demostración

Supongamos que $F \neq F'$. Sean $F = \{p_1,\ldots,p_m\}$ y $F' = \{p'_1,\ldots,p'_{m'}\}$ donde $p_1 < \ldots < p_m$ y $p'_1 < \ldots < p'_{m'}$. Sea $A = \{j \in \{1,\ldots,m\}: p_j \neq p'_j\}$. $A \neq \emptyset$ (en caso contrario, $FN(p'_{m'+1}, F' - \{p'_{m'+1}\}) = 0$). Sea i el menor elemento de A. Distinguimos dos casos

Caso 1: $L(p_i) \neq L(p'_i)$

Supongamos que $L(p_i) < L(p'_i)$. Puesto que $p_i \in I(F')$ y F' es una base de Gröbner, $FN(p_i, F') = 0$. Los únicos polinomios de F' que se pueden usar en la reducción de p_i son $p'_1,\ldots,p'_{i-1}$ Por tanto, p_i es reducible por $\{p_1,\ldots,p_{i-1}\} = \{p'_1,\ldots,p'_{i-1}\}$ Contradicción con el ser F reducida.

Caso 2: $L(p_i) = L(p'_i)$

$R(p_i) \neq R(p'_i)$. Sea $p = R(p_i) - R(p'_i)$. $p \in I(F)$ (porque $p = p_i - p'_i$). $FN(p, F) = 0$. Existe un $j < i$ y un monomio b tales que $coef(bL(p_j), p) \neq 0$. Pero $coef(bL(p_j), R(p_i)) = 0$ (por ser F reducida), $p_j = p'_j$ (por la definición de i) y $coef(bL(p_j), R(p'_i)) = coef(bL(p'_j), R(p'_i)) = 0$ (por ser F' reducida). Contradicción.

CAPITULO 3

CÁLCULOS PROPOSICIONALES

En este capítulo usamos las bases de Gröbner para resolver algorítmicamente problemas de los cálculos proposicionales.

En la primera parte estudiamos el cálculo proposicional clásico.

La sección 3.1.A contiene las definiciones del cálculo proposicional clásico que usaremos en las restantes.

En la sección 3.1.B definimos la aplicación ST que asocia un polinomio de $Z_2[X_1,\ldots,X_n]$ a cada proposición.

En la sección 3.1.C caracterizamos las tautologías (3.1.C.7), las contradiciones (3.1.C.9) e indicamos cómo obtener un modelo y un contramodelo para las contingentes (3.1.C.12).

En la sección 3.1.D construimos un isomorfismo entre el anillo booleano correspondiente al álgebra de Lindenbaum-Tarski y $Z_2[X_1,\ldots,X_n]/I$ (donde I es el ideal engendrado por $\{X_i^2 + X_i : 1 \leqslant i \leqslant n\}$), damos condiciones equivalentes a $\{P_1,\ldots,P_m\} \models Q$ (3.1.D.4) y a $\{P_1,\ldots,P_m\}$ es inconsistente (3.1.D.5).

En la sección 3.1.E damos algoritmos para los problemas de deducción (3.1.E.1), inconsistencia (3.1.E.4 y 3.1.E.6) y equivalencia (3.1.E.8).

En la segunda parte estudiamos el cálculo proposicional polivalente.

La sección 3.2.A contiene las definiciones del cálculo proposicional polivalente que usaremos en las restantes, ejemplos de cálculos polivalentes y el Teorema 3.2.A.3 que permite limitarnos a cálculos con un número primo, p, de valores de verdad.

En la sección 3.2.B definimos la aplicación ST que asocia un polinomio de $Z_p[X_1,\ldots,X_n]$ a cada proposición.

En la sección 3.2.C caracterizamos las tautologías (3.2.C.6) y las contradiciones (3.2.C.8).

En la sección 3.2.D damos condiciones equivalentes a $\{P_1,\ldots,P_m\} \models Q$ (3.2.D.3) y a $\{P_1,\ldots,P_m\}$ es inconsistente (3.2.D.4) que nos permiten aplicar a los cálculos polivalentes los algoritmos de la sección 3.1.E para el cálculo clásico.

3.1.- CÁLCULO PROPOSICIONAL CLÁSICO

3.1.A.- DEFINICIONES

3.1.A.1.- Definición

El conjunto de las proposiciones en $X_1,\ldots,X_n$ (que lo representaremos por $P(X_1,\ldots,X_n)$) se define recursivamente por:

(a) para todo $i \in \{1,\ldots,n\}$, $X_i \in P(X_1,\ldots,X_n)$;

(b) si $P \in P(X_1,\ldots,X_n)$, entonces $\neg P \in P(X_1,\ldots,X_n)$;

(c) si $P, Q \in P(X_1,\ldots,X_n)$ y $k \in \{v, \&, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, entonces $P\ k\ Q \in P(X_1,\ldots,X_n)$.

3.1.A.2.- Notación

Usaremos las variables P, Q, R,... para representar los elementos de $P(X_1,\ldots,X_n)$.

3.1.A.3.- Definición

(a) $H_\neg : Z_2 \longrightarrow Z_2$ está definida por

a	$H_\neg(a)$
0	1
1	0

(b) Para cada conectiva $k \in \{v, \&, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ la aplicación $H_k : Z_2^2 \longrightarrow Z_2$ está definida por

a	b	$H_v(a,b)$	$H_\&(a,b)$	$H_\rightarrow(a,b)$	$H_\leftrightarrow(a,b)$
0	0	0	0	1	1
0	1	1	0	1	0
1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1

3.1.A.4.- Definición

Una valoración es una aplicación

$$v : \{X_1,\ldots,X_n\} \longrightarrow Z_2.$$

Para cada valoración v, la aplicación

$$V : P(X_1,\ldots,X_n) \longrightarrow Z_2$$

está definida por:

$$V(P) = \begin{cases} v(X_i), & \text{si P es } X_i \text{ e } i \in \{1,\ldots,n\}; \\ H_{\neg}(V(Q)), & \text{si P es } \neg Q; \\ H_k(V(Q),V(R)), & \text{si P es QkR y k} \in \{v,\&,\rightarrow,\leftrightarrow\} \end{cases}$$

3.1.A.5.- Definición

Una proposición P es una tautología si para toda valoración v, V(P) = 1. Por $\models$ P indicaremos que P es una tautología.

3.1.A.6.- Definición

Una proposición Q es consecuencia tautológica de un conjunto de proposiciones $\{P_1,\ldots,P_m\}$ si para toda valoración v

$$V(P_1) = \ldots = V(P_m) = 1 \Longrightarrow V(Q) = 1.$$

Por $\{P_1,\ldots,P_m\} \models Q$ indicaremos que Q es consecuencia tautológica de $\{P_1,\ldots,P_m\}$.

3.1.B.- POLINOMIOS ASOCIADOS A PROPOSICIONES

3.1.B.1.- Definición

La aplicación

$$ST : P(X_1,\ldots,X_n) \longrightarrow Z_2[X_1,\ldots,X_n]$$

está definida por:

$$ST(P) = \begin{cases} X_i & \text{,si P es } X_i \text{ e i } \in \{1,\ldots,n\}; \\ ST(Q)+1 & \text{,si P es } \neg Q; \\ ST(Q).ST(R) & \text{,si P es Q\&R;} \\ ST(Q)+ST(R)+ST(Q).ST(R) & \text{,si P es QvR;} \\ ST(Q).ST(R)+ST(Q)+1 & \text{,si P es Q->R;} \\ ST(Q)+ST(R)+1 & \text{,si P es Q<->R} \end{cases}$$

3.1.B.2.- Notación

Los polinomios transformados de las proposiciones P, Q, R,... mediante la aplicación ST los representaremos por p, q, r,..., respectivamente.

3.1.B.3.- Definición

Para cada valoración v, la aplicación

$$V^* : Z_2[X_1,\ldots,X_n] \longrightarrow Z_2$$

es el homomorfismo definido por:

$$V^*(p) = \begin{cases} 1 & \text{,si p es 1;} \\ v(X_i) & \text{,si p es } X_i \text{ e i } \in \{1,\ldots,n\}; \\ V^*(q)+V^*(r) & \text{,si p es Q+r;} \\ V^*(q).V^*(r) & \text{,si p es q.r.} \end{cases}$$

3.1.B.4.- Lema

Para toda valoración v, $V = V^* \circ ST$.

Demostración

Por inducción sobre la longitud de las proposiciones.

(a) Si P es X_i para algún $i \in \{1,\ldots,n\}$,

$$(V^* \circ ST)(P) = V^*(ST(X_i)) =$$
$$= V^*(X_i) = \quad \text{[por 3.1.B.1]}$$
$$= v(X_i) = \quad \text{[por 3.1.B.3]}$$
$$= V(X_i) = \quad \text{[por 3.1.A.4]}$$
$$= V(P).$$

(b) Si P es Q & R,

$$(V^* \circ ST)(P) = V^*(ST(Q \,\&\, R)) =$$
$$= V^*(ST(Q).ST(R)) = \quad \text{[por 3.1.B.1]}$$
$$= V^*(ST(Q)).V^*(ST(R)) = \quad \text{[por 3.1.B.3]}$$
$$= V(Q).V(R) = \quad \text{[por hip. ind.]}$$
$$= V(Q \,\&\, R) = \quad \text{[por 3.1.A.4]}$$
$$= V(P).$$

(c) Análogamente se demuestran los restantes casos.

3.1.C.- CARACTERIZACIÓN ALGEBRAICA DE LAS TAUTOLOGÍAS

3.1.C.1.- Notación

En lo que sigue, usaremos las siguientes notaciones:

. $F = \{X_1^2 + X_1, \ldots, X_n^2 + X_n\}$;

. $I = I(F)$ es el ideal generado por F;

. ---> es la relación de reducción definida por F.

3.1.C.2.- Lema

F es una base de Gröbner.

Demostración

Por 2.9.2, ya que los líderes de los elementos de F son primos entre sí.

3.1.C.3.- Lema

Para toda valoración v,

$$p \in I \quad ===> \quad V^*(p) = 0.$$

Demostración

Sea $p \in I$. Existen polinomios $q_1, \ldots, q_n$ tales que $p = q_1(X_1^2 + X_1) + \ldots + q_n(X_n^2 + X_n)$. Puesto que V^* es un homomorfismo, $V^*(p) = 0$.

3.1.C.4.- Lema

Para toda valoración v,

$$p \text{ --->}^* q \quad ===> \quad V^*(p) = V^*(q).$$

Demostración

p --->* q ===> $p \equiv q$ [por 2.3.3]

===> $p - q \in I$

$\Longrightarrow$ $V^*(p - q) = 0$ [por 3.1.C.3]

$\Longrightarrow$ $V^*(p) = V^*(q)$

3.1.C.5.- Lema

Si p es --->-irreducible y $p \neq 0$, existe una valoración v tal que $V^*(p) = 1$.

Demostración

Sea $X_1^{\alpha_1}...X_n^{\alpha_n}$ el menor monomio de p y v la valoración definida por $v(X_i) = \alpha_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Entonces $V^*(p) = 1$.

3.1.C.6.- Lema

$p \in I$ <===> para toda valoración v, $V^*(p) = 0$.

Demostración

(===>) Lema 3.1.C.3.

(<===) Sea $q = FN(p)$. Por 2.5.1, para demostrar que $p \in I$ basta probar que $q = 0$. Supongamos que $q \neq 0$. Por 3.1.C.5, existe una valoración v tal que $V^*(q) = 1$. Por 3.1.C.4, $V^*(p) = V^*(q) = 1$.

3.1.C.7. Teorema

P es una tautología <===> $ST(P)$ $--->^*$ 1.

Demostración

(===>) Sea $q = FN(ST(P))$. Tenemos que probar que $q = 1$. Supongamos que $q \neq 1$. Entonces $q + 1 \neq 0$. Por 3.1.C.5, existe una valoración v tal que $V^*(q + 1) = 1$.

$V(P) = V^*(ST(P)) =$ [por 3.1.B.4]

$= V^*(q) =$ [por 3.1.C.4]

$= V^*(q + 1) + 1 =$ [por 3.1.B.3]

$= 0.$

Por tanto, P no es una tautología.

(<===) Sea v una valoración,

$V(P) = V^*(ST(P)) =$ [por 3.1.B.4]

$= V^*(FN(ST(P)) =$ [por 3.1.C.4]

$= V^*(1) =$

$= 1.$

Por tanto, P es una tautología.

3.1.C.8.- Ejemplo

Demostrar que la proposición

$$(X_1 \to X_2) \vee (X_2 \to X_1)$$

es una tautología.

Demostración

$ST((X_1 \to X_2) \vee (X_2 \to X_1)) =$

$= ST(X_1 \to X_2)+ST(X_2 \to X_1)+ST(X_1 \to X_2)ST(X_2 \to X_1) =$

$= (X_1X_2+X_1+X_2+1) + (X_2X_1+X_2+X_1+1) +$

$(X_1X_2+X_1+X_2+1)(X_2X_1+X_2+X_1+1) =$

$= X_1^2 X_2^2 + X_1^2 + X_2^2 + 1 \dashrightarrow^*$

$\dashrightarrow^* 1.$

3.1.C.9.- Corolario

P es una contradicción <===> $ST(P) \dashrightarrow^* 0.$

Demostración

P es una contradicción

<===> $\neg P$ es una tautología

<===> $FN(ST(\neg P)) = 1$ [por 3.1.C.7]

$\langle ===\rangle$ FN(ST(P) + 1) = 1 [por 3.1.B.1]

$\langle ===\rangle$ FN(ST(P)) = 0 [por 2.5.6]

3.1.C.10.- Ejemplo

Demostrar que la proposición

$$(X_1 \leftrightarrow X_2) \;\&\; (X_1 \leftrightarrow \neg X_2)$$

es una contradicción.

Demostración

$ST((X_1 \leftrightarrow X_2) \;\&\; (X_1 \leftrightarrow \neg X_2)) =$

$= ST(X_1 \leftrightarrow X_2).ST(X_1 \leftrightarrow \neg X_2) =$

$= (ST(X_1) + ST(X_2) + 1)(ST(X_1) + ST(\neg X_2) + 1) =$

$= (X_1 + X_2 + 1)(X_1 + X_2 + 1 + 1) =$

$= X_1^2 + X_2^2 + X_1 + X_2 \dashrightarrow^*$

$\dashrightarrow^* 0.$

3.1.C.11.- Corolario

P es contingente $\langle ===\rangle$ $ST(P) \not\dashrightarrow^* 1$ y $ST(P) \not\dashrightarrow^* 0$.

3.1.C.12.- Nota

Sea P una proposición contingente.

(a) Si $X_1^{\alpha_1}...X_n^{\alpha_n}$ es el menor monomio de ST(P) y v es la valoración definida por $v(X_i) = \alpha_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, V(P) = 1.

(b) Si $X_1^{\beta_1}...X_n^{\beta_n}$ es el menor monomio de ST(P) + 1 y v' es la valoración definida por $v'(X_i) = \beta_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, V'(P) = 0.

3.1.C.13.- Ejemplo

Demostrar que la proposición

$$(X_1 \leftrightarrow X_2) \;\&\; (X_1 \leftrightarrow X_3)$$

es contingente.

Demostración

$$ST((X_1 <-> X_2) \& (X_1 <-> X_3)) =$$

$$= ST(X_1 <-> X_2).ST(X_1 <-> X_3) =$$

$$= (X_1 + X_2 + 1)((X_1 + X_3 + 1) =$$

$$= X_1^2 + X_1X_2 + X_1X_3 + X_2^2 + X_2X_3 + X_3^2 + 1 --->*$$

$$--->* X_1X_2 + X_1X_3 + X_2X_3 + X_1 + X_2 + X_3 + 1.$$

Además,

(a) si v es la valoración definida por $v(X_1) = v(X_2) = v(X_3) = 0$, $V((X_1 <-> X_2) \& (X_1 <-> X_3)) = 1$;

(b) si v' es la valoración definida por $v'(X_1) = v'(X_2) = 0$ y $v'(X_3) = 1$, $V'((X_1 <-> X_2) \& (X_1 <-> X_3)) = 0$.

3.1.D.- CARACTERIZACIÓN ALGEBRAICA DE LA DEDUCCIÓN

3.1.D.1.- Definición

En $P(X_1,\ldots,X_n)$ se define la relación

$P \mathcal{E} Q$ sii para toda valoración v, $V(P) = V(Q)$.

$\mathcal{E}$ es una relación de equivalencia en $P(X_1,\ldots,X_n)$. El conjunto cociente $P^*(X_1,\ldots,X_n) = P(X_1,\ldots,X_n)/\mathcal{E}$ con las operaciones + y . definidas por:

$$[P] + [Q] = [\neg(P \leftrightarrow Q)]$$

$$[P].[Q] = [P \,\&\, Q]$$

y los elementos 0 y 1 definidos por:

$$0 = [\neg(X_1 \leftrightarrow X_1)]$$

$$1 = [X_1 \leftrightarrow X_1]$$

es un anillo booleano. Escribiremos $B(X_1,\ldots,X_n)$ en lugar de $(P^*(X_1,\ldots,X_n),+,.,0,1)$.

3.1.D.2.- Lema

Sean $p, q \in Z_2[X_1,\ldots,X_n]$. Son equivalentes:

(a) $p + I = q + I$;

(b) para toda valoración v, $V^*(p) = V^*(q)$.

Demostración

$p + I = q + I \iff$

$\iff p - q \in I$

$\iff$ para toda v, $V^*(p - q) = 0$ [por 3.1.C.6]

$\iff$ para toda v, $V^*(p) = V^*(q)$. [por 3.1.B.3]

3.1.D.3.- Teorema

La aplicación

$$ST': B(X_1,\ldots,X_n) \dashrightarrow Z_2[X_1,\ldots,X_n]/I$$

definida por

$$ST'([P]) = ST(P) + I$$

es un isomorfismo de anillos.

Demostración

(a) ST' es una aplicación inyectiva:

[P] = [Q] <===>

<===> para toda v, V(P) = V(Q) [por 3.1.D.1]

<===> para toda v, $V^*(ST(P)) = V^*(ST(Q))$ [por 3.1.B.4]

<===> ST(P) + I = ST(Q) + I [por 3.1.D.2]

(b) ST' es suprayectiva:

Basta comprobar que si definimos

$$ST'': Z_2[X_1,\ldots,X_n] \dashrightarrow P(X_1,\ldots,X_n)$$

por:

$$ST''(p) = \begin{cases} X_i & \text{,si p es } X_i \text{ e i} \in \{1,\ldots,n\}; \\ X_1 <-> X_1 & \text{,si p es 1;} \\ \neg(ST''(q) <-> ST''(r)) & \text{,si p es q + r;} \\ ST''(q)\ \&\ ST''(r) & \text{,si p es q.r;} \end{cases}$$

se tiene ST(ST''(p)) + I = p + I para todo $p \in Z_2[X_1,\ldots,X_n]$, lo que garantiza la suprayectividad de ST'. Lo comprobaremos por inducción sobre la formación de los polinomios:

(b.1) Si p es 1,

ST(ST''(p)) + I =

= ST(ST''(1)) + I =

= $ST(X_1 <-> X_1) + I$ =

= $(X_1 + X_1 + 1) + I$ = [por 3.1.B.1]

$= 1 + I =$

$= p + I.$

(b.2) Si p es X_i para algún $i \in \{1,...,n\}$,

$ST(ST''(p)) + I =$

$= ST(ST''(X_i)) + I =$

$= ST(X_i) + I =$

$= X_i + I =$ [por 3.1.B.1]

$= p + I.$

(b.3) Si p es q + r,

$ST(ST'(p)) + I =$

$= ST(ST''(q + r)) + I =$

$= ST(\neg(ST''(q) <-> ST''(r))) + I =$

$= (ST(ST''(q)) + ST(ST''(r))) + I =$ [por 3.1.B.1]

$= (ST(ST''(q)) + I) + (ST(ST''(r)) + I) =$

$= (q + I) + (r + I) =$ [por hip. ind.]

$= (q + r) + I =$

$= p + I.$

(b.4) Si p es q.r,

$ST(ST''(p)) + I =$

$= ST(ST''(q.r)) + I =$

$= ST(ST''(q) \& ST''(r)) + I =$

$= (ST(ST''(q)).ST(ST''(r))) + I =$ [por 3.1.B.1]

$= (ST(ST''(q)) + I).(ST(ST''(r)) + I) =$

$= (q + I).(r + I) =$ [por hip. ind.]

$= (q.r) + I =$

$= p + I.$

(c) ST' es un homomorfismo de anillos:

$ST'([P] + [Q]) =$

$= ST'([\neg(P \leftrightarrow Q)]) =$ [por 3.1.D.1]

$= ST(\neg(P \leftrightarrow Q)) + I =$

$= (ST(P \leftrightarrow Q)) + 1) + I =$ [por 3.1.B.1]

$= (ST(P) + ST(Q) + 1 + 1) + I =$ [por 3.1.B.1]

$= (ST(P) + I) + (ST(Q) + I) =$

$= ST'([P]) + ST'([Q]).$

$ST'([P].[Q]) =$

$= ST'([P \& Q]) =$ [por 3.1.D.1]

$= ST(P \& Q) + I =$

$= (ST(P).ST(Q)) + I =$ [por 3.1.B.1]

$= (ST(P) + I).(ST(Q) + I) =$

$= ST'([P]).ST'([Q]).$

$ST'(1) =$

$= ST'([X_1 \leftrightarrow X_1]) =$ [por 3.1.D.1]

$= ST(X_1 \leftrightarrow X_1) + I =$

$= (X_1 + X_1 + 1) + I =$ [por 3.1.B.1]

$= 1 + I.$

3.1.D.4.- Teorema

Las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $\{P_1,\ldots,P_m\} \models Q.$

(b) $ST(Q)+1 \in (ST(P_1)+1,\ldots,ST(P_m)+1, X_1^2 + X_1,\ldots, X_n^2 + X_n).$

Demostración

El Teorema es una consecuencia de los siguientes Lemas.

Lema I $((p_1...p_m + 1) + I) = ((p_1+1) + I,..., (p_m+1) + I)$ [ideales de $Z_2[X_1,...,X_n]/I$ engendrados respectivamente por $(p_1...p_m + 1) + I$ y $\{(p_1+1) + I,..., (p_m+1) + I\}$].

Lema II Son equivalentes:

(a) $p_1...p_m(q + 1) + I = I$

(b) $(q + 1) + I \in ((p_1...p_m + 1) + I)$ [ideal de $Z_2[X_1,...,X_n]/I$ engendrado por $(p_1...p_m + 1) + I$].

Lema III

$ST'([P_1 \& ... \& P_m \rightarrow Q]) = (p_1....p_mq + p_1....p_m + 1) + I.$ [siendo $p_i = ST(P_i)$ y $q = ST(Q)$].

Demostración del Teorema

$\{P_1,...,P_m\} \models Q$ <===>

<===> $P_1 \& ... \& P_m \rightarrow Q$ es una tautología

<===> $[P_1 \& ... \& P_m \rightarrow Q] = 1$

<===> $ST'([P_1 \& ... \& P_m \rightarrow Q]) = ST'(1)$

<===> $(p_1....p_mq + p_1....p_m + 1) + I = 1 + I$ [por Lema III]

<===> $p_1....p_m(q + 1) + I = I$

<===> $(q + 1) + I \in ((p_1....p_m + 1) + I)$ [por Lema II]

<===> $(q + 1) + I \in (p_1 + 1 + I,..., p_m + 1 + I)$ [por Lema I]

<===> existen $r_1 + I,..., r_n + I$ tales que

$(q+1)+ I = (r_1+ I)((p_1+1) + I)+...+(r_n+ I)((p_n+1) + I)$

<===> existen $r_1,..., r_n, s_1,..., s_n$ tales que

$q+1 = r_1(p_1+1)+...+r_n(p_n+1)+s_1(X_1^2+X_1)+...+s_n(X_n^2+X_n)$

<===> $q + 1 \in (p_1 + 1,...,p_m + 1, X_1^2 + X_1,..., X_n^2 + X_n)$

<===> $ST(Q)+1 \in (ST(P_1)+1,..., ST(P_m)+1, X_1^2+X_1,..., X_n^2+X_n)$.

Demostración del Lema I

Para todo i $\in \{1,\ldots,m\}$,

$$(p_i + 1) + I = ((p_i + 1) + I)((p_1\ldots p_m + 1) + I) \in ((p_1\ldots p_m + 1) + I).$$

Luego, $((p_1 + 1) + I,\ldots,(p_m + 1) + I) \subseteq ((p_1\ldots p_m + 1) + I)$.

Demostraremos la otra inclusión por inducción sobre m:

Para k = 1: evidentemente $((p_1+1) + I) \subseteq ((p_1+1) + I)$.

Para k = m:

$(p_1\ldots p_m + 1) + I =$

$= ((p_m + 1) + I)((p_1\ldots p_{m-1} + 1) + I) + ((p_m + 1) + I) \in$

$\in ((p_1\ldots p_{m-1} + 1) + I, (p_m + 1) + I) \subseteq$

$\subseteq ((p_1 + 1) + I,\ldots,(p_m + 1) + I)$ [por hip. ind.]

Demostración del Lema II

(===>) Si $p_1\ldots p_m(q + 1) + I = I$, entonces

$$(q + 1) + I = ((q + 1) + I)((p_1\ldots p_m + 1) + I) \in ((p_1\ldots p_m + 1) + I).$$

(<===) Si $(q + 1) + I \in ((p_1\ldots p_m + 1) + I)$, existe un r tal que $(q + 1) + I = r((p_1\ldots p_m + 1) + I)$. Por tanto, $p_1\ldots p_m(q + 1) + I = I$.

Demostración del Lema III

Por inducción sobre m.

3.1.D.5.- Corolario

Las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $\{P_1,\ldots,P_m\}$ es inconsistente;

(b) $1 \in (ST(P_1) + 1,\ldots, ST(P_m) + 1, X_1^2 + X_1,\ldots, X_n^2 + X_n)$.

Demostración

$\{P_1,\ldots,P_m\}$ es inconsistente <===>

<===> $\{P_1,\ldots,P_m\} \models X_1 <-> \neg X_1$

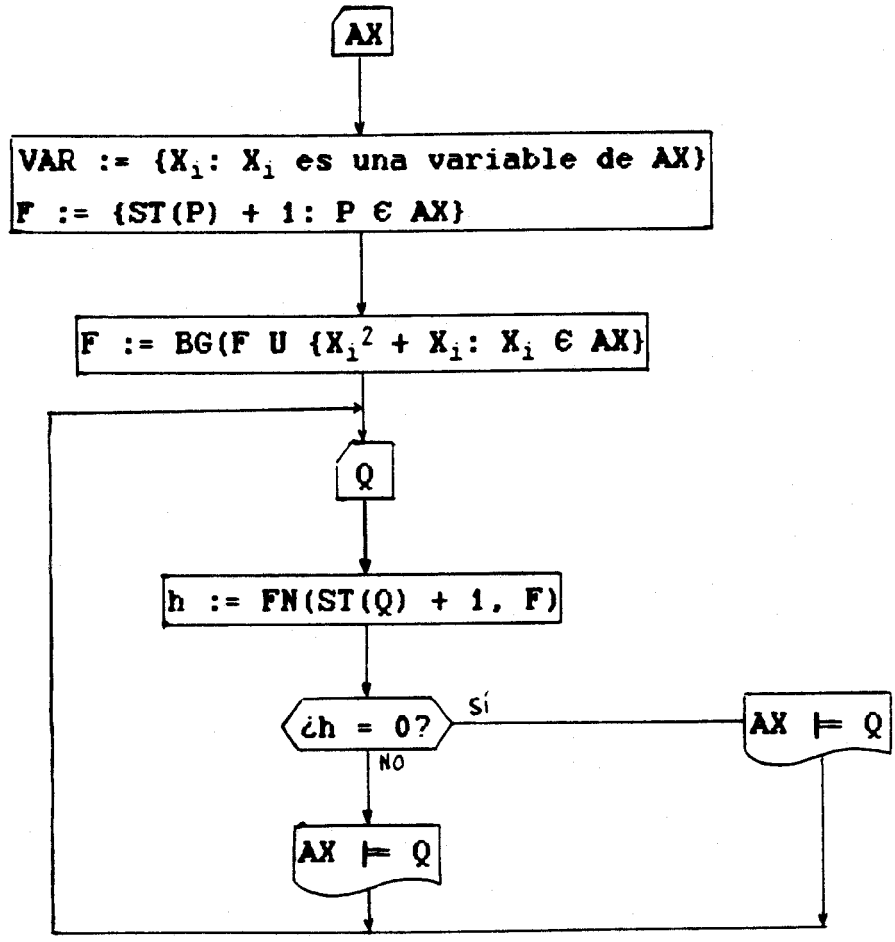
<===> $ST(X_1 <-> \neg X_1) + 1 \in (ST(P_1) + 1,\ldots, ST(P_m) + 1, X_1^2 + X_1,\ldots, X_n^2 + X_n)$ [por 3.1.D.4]

<===> $1 \in (ST(P_1) + 1,\ldots,ST(P_m) + 1, X_1^2 + X_1,\ldots, X_n^2 + X_n)$

3.1.E.- ALGORITMOS DE DEDUCCIÓN

3.1.E.1.- Algoritmo

Dado el conjunto de proposiciones AX = $\{P_1,....,P_n\}$, para cada proposición Q, el siguiente procedimiento



termina determinando si Q es consecuencia lógica de AX o no lo es.

Demostración

Es consecuencia inmediata del Teorema 3.1.D.4 y del Corolario 2.5.4.

3.1.E.2.- Ejemplo

Dado el conjunto de axiomas

AX = {a -> b, b -> e, c v d, ¬(c & d)},

determinar si las proposiciones

¬ e -> ¬ a & ¬ b y

a -> (b <-> c)

son consecuencias de AX.

Demostración

Los polinomios correspondientes a los elementos de AX son:

p_1 = ST(a -> b) = ab + a + 1

p_2 = ST(b -> e) = be + b + 1

p_3 = ST(c v d) = cd + c + d

p_4 = ST(¬(c & d)) = cd + 1

La base de Gröbner reducida del ideal engendrado por

{p_1 + 1, p_2 + 1, p_3 + 1, p_4 + 1,

a^2 + a, b^2 + b, c^2 + c, d^2 + d, e^2 + e}

es

F = {ae + a, be + b, ab + a, c + d + 1,

a^2 + a, b^2 + b, d^2 + d, e^2 + e}

El polinomio correspondiente a la primera fórmula es

q_1 = ST(¬ e -> ¬ a & ¬ b)

= abe + ab + ae + be + a + b + 1.

Puesto que la forma normal de q_1 + 1 respecto de F es 0, ¬ e -> ¬ a & ¬ b es consecuencia de AX.

El polinomio correspondiente a la segunda fórmula es

q_2 = ST(a -> (b <-> c)) =

= ab + ac + 1.

Puesto que la forma normal de q_2 + 1 respecto de F es ad, a -> (b <-> c) no es consecuencia de AX.

3.1.E.3.- Notas

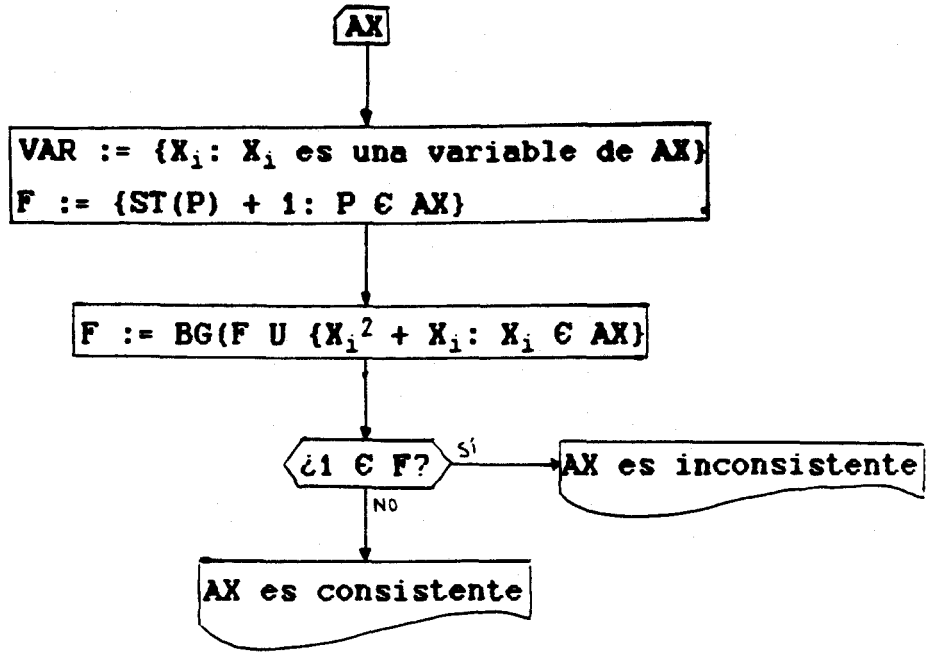
De las diferencias existentes entre la deducción mediante el procedimiento anterior y el método de resolución de Robinson, señalamos las siguientes:

(a) mientras que en el método de resolución las fórmulas tienen que estar en forma de cláusulas, en el procedimiento anterior pueden estar en la forma usual.

(b) El procedimiento de resolución es igual de complejo que el cálculo de una base de Gröbner. El algoritmo anterior, al calcular la base de Gröbner "compila" los axiomas; así, el cambio de la proposición Q no obliga a rehacer los cálculos; mientras que el método de resolución tiene que rehacer todo el proceso cada vez que se cambia la fórmula Q.

3.1.E.4.- Algoritmo (de inconsistencia)

Dado el conjunto de proposiciones AX = $\{P_1,\ldots,P_m\}$, el siguiente procedimiento:



termina determinando si AX es consistente o no.

Demostración

Es consecuencia inmediata del Corolario 3.1.D.5 y del Corolario 2.5.4.

3.1.E.5.- Ejemplo

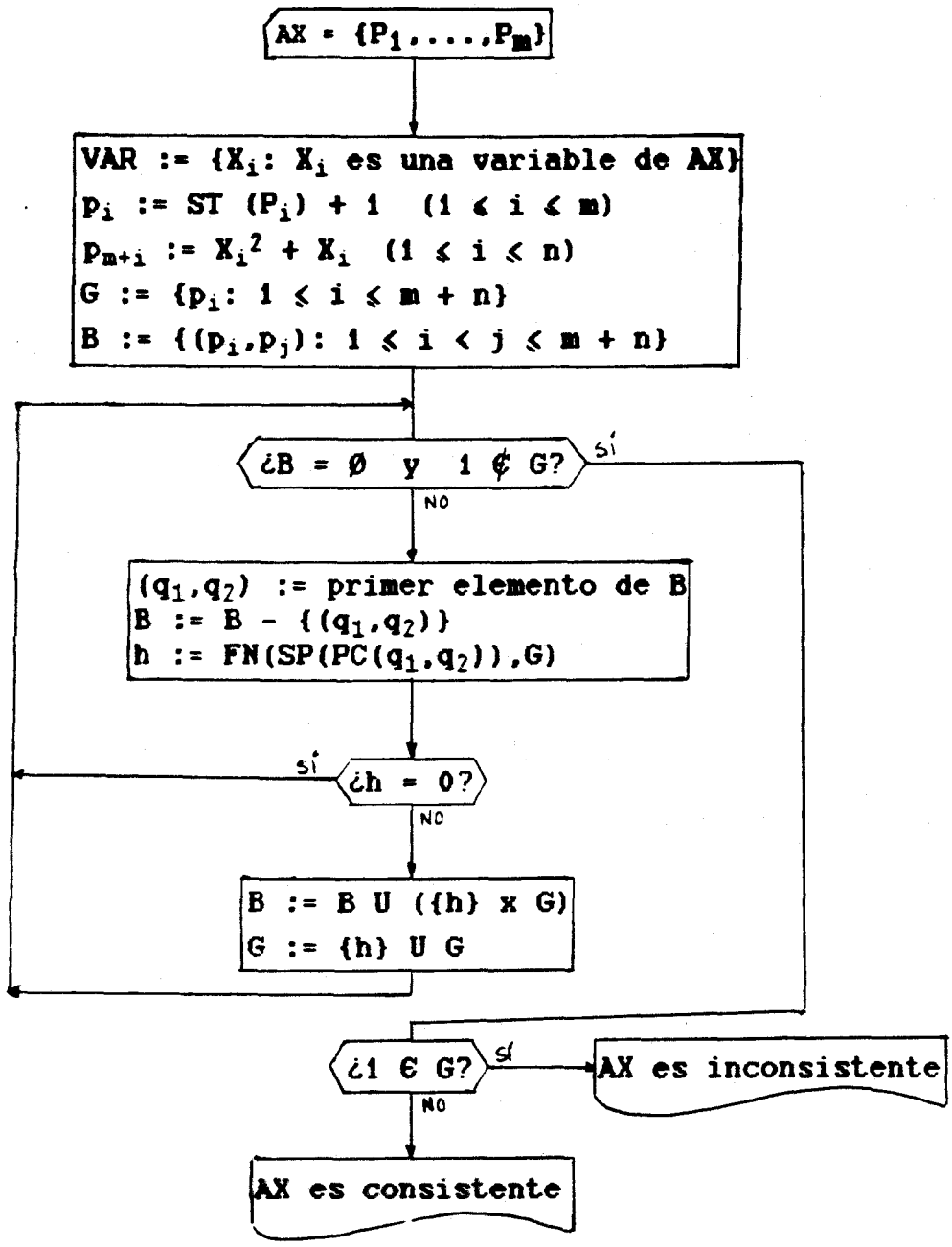
Aplicando el algoritmo anterior al conjunto de axiomas

$$AX = \{b \to a \,\&\, b,\ \neg c \vee b,\ \neg a * \neg d,\ c \,\&\, d\}$$

obtenemos que AX es inconsistente.

3.1.E.6.- Nota

Para determinar si un conjunto es consistente no es necesario calcular la base de Gröbner, podemos hacerlo mediante el siguiente algoritmo



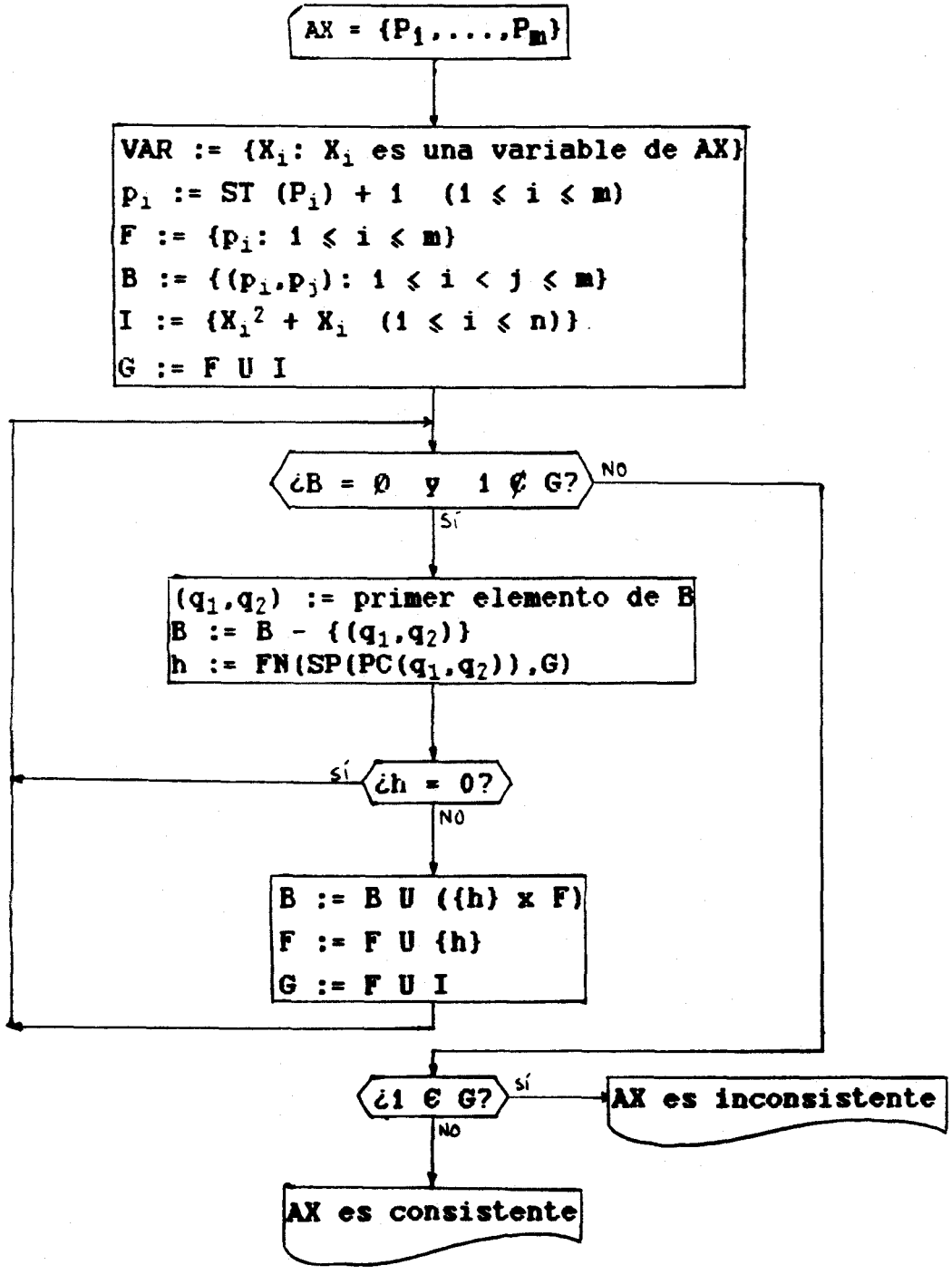
termina determinando si el conjunto AX es consistente o inconsistente.

Demostración

Es una consecuencia inmediata del Corolario 3.1.D.5, 2.8.8 y 2.5.4.

3.1.E.7.- Nota

En el algoritmo anterior no es suficiente usar los polinomios $X_i^2 + X_i$ para reducir, es necesario usarlos para formar pares críticos; es decir, el siguiente procedimiento para determinar si el conjunto de axiomas AX es consistente es incorrecto



Demostración

Sea AX = { X_1 & X_2, $\neg X_1$ & X_3}. El conjunto AX es inconsistente pero aplicándole al algoritmo anterior obtenemos

p_1= ST(X_1 & X_2) + 1 =

= X_1X_2 + 1

p_2= ST($\neg X_1$ & X_3) + 1 =

= X_1X_3 + X_3 + 1

G = {p_1 , p_2} U {X_i^2 + X_i: 1 $\leqslant$ i $\leqslant$ 3}

h_1= FN(SP(PC(p_1,p_2), G) =

= X_2X_3 + X_2 + X_3

G = G U {h_1}

FN(SP(PC(p_1,h_1), G) = 0

FN(SP(PC(p_2,h_1), G) = 0

Puesto que 1 $\notin$ G, el algoritmo da como resultado "AX es consistente". En cambio, aplicando el Algoritmo 3.1.E.6, obtenemos p_1 y p_2 como antes,

p_{2+i} = X_i^2 + X_i (1 $\leqslant$ i $\leqslant$ 3)

G = {p_i: 1 $\leqslant$ i $\leqslant$ 5}

h_1 = FN(SP(PC(p_1,p_2), G) = X_2X_3 + X_2 + X_3

G = G U {h_1}

h_2 = FN(SP(PC(p_1,p_3), G) = X_1 + 1

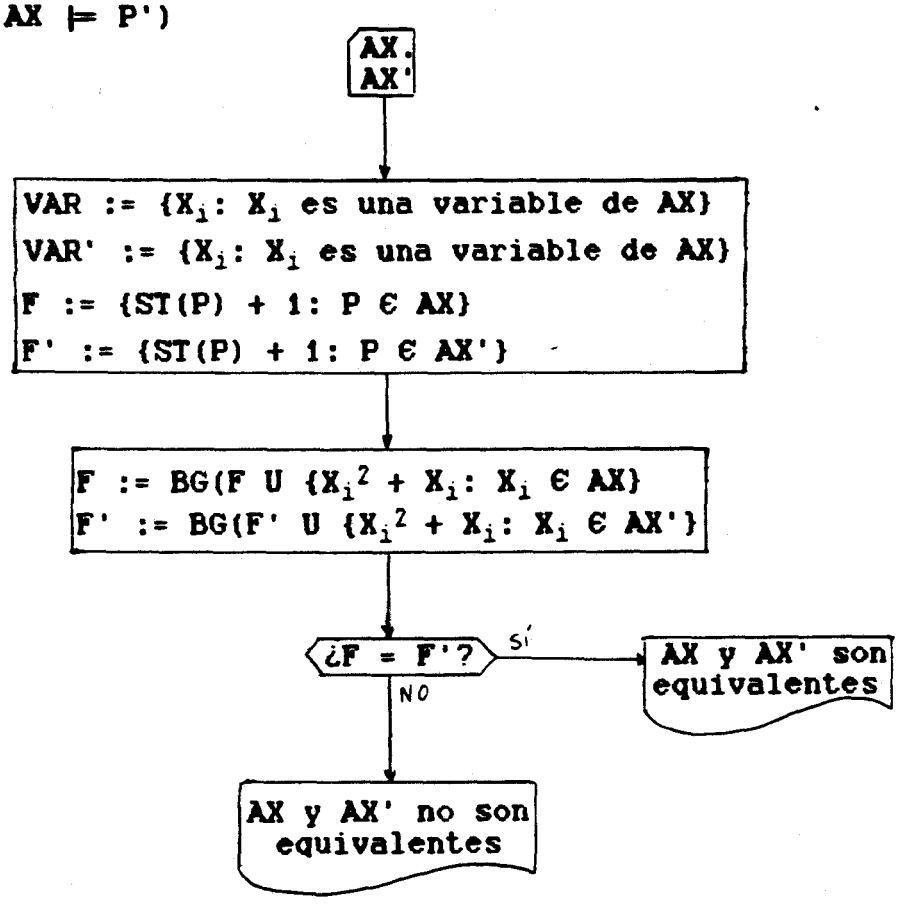
G = G U {h_2}

h_3 = FN(SP(PC(p_2,h_2), G) = 1

Por tanto, "AX es consistente".

3.1.E.8.- Algoritmo (de equivalencia)

Dados dos conjuntos de axiomas AX y AX' el siguiente procedimiento decide si los conjuntos AX y AX' son equivalentes (es decir, si para todo $P \in AX$, $AX' \models P$ y para todo $P' \in AX'$, $AX \models P'$)



3.1.E.9.- Ejemplo

Dado el conjunto de axiomas

$$AX = \{\neg e \rightarrow (\neg a \,\&\, \neg b \,\&\, (c \vee d),$$
$$a \,\&\, (\neg b \vee \neg c) \rightarrow d,$$
$$\neg b \rightarrow \neg a,$$
$$c \leftrightarrow \neg d\},$$

Los polinomios correspondientes a los elementos de AX son:

$$p_1 = ST(\neg e \rightarrow (\neg a \,\&\, \neg b \,\&\, (c \vee d)) =$$

$= abcde + abcd + abce + abde + acde + bcde + abc +$

$abd + acd + ace + ade + bcd + bce + bde + cde +$

$ac + ad + bc + bd + cd + ce + de + c + d + e$

$p_2 = ST(a \& (\neg b \vee \neg c) \rightarrow d) =$

$= abcd + abc + ad + a + 1$

$p_3 = ST(\neg b \rightarrow \neg a) =$

$= ab + a + 1$

$p_4 = ST(c \leftrightarrow \neg d) =$

$= c + d.$

La base de Gröbner reducida del ideal generado por

$\{p_1 + 1,\ p_2 + 1,\ p_3 + 1,\ p_4 + 1,$

$a^2 + a,\ b^2 + b,\ c^2 + c,\ d^2 + d,\ e^2 + e\}$

es

$F = \{ae + a,\ be + b,\ ab + a,\ c + d + 1,$

$a^2 + a,\ b^2 + b,\ d^2 + d,\ e^2 + e\}$

Puesto que F coincide con la base de Gröbner reducida obtenida en el Ejemplo 3.1.E.2, los conjuntos de axiomas

$AX = \{\neg e \rightarrow (\neg a \& \neg b \& (c \vee d),$

$a \& (\neg b \vee \neg c) \rightarrow d,$

$\neg b \rightarrow \neg a,$

$c \leftrightarrow \neg d\},$

y

$AX' = \{a \rightarrow b,\ b \rightarrow e,\ c \vee d,\ \neg(c \& d)\},$

son equivalentes.

3.2.- CÁLCULO PROPOSICIONAL POLIVALENTE

3.2.A.- DEFINICIONES

3.2.A.1.- Definición

Dado un conjunto finito de variables, VAR; un conjunto finito de conectivas, CON, (disjunto con el anterior) y una función de aridad, ar : CON ---> $\mathbb{N}$, se define el conjunto de proposiciones P(VAR,CON) recursivamente como sigue:

(a) Si X $\in$ VAR, entonces X $\in$ P(VAR,CON).

(b) Si $k \in$ CON, $m = ar(k)$ y $P_1,\ldots,P_m \in$ P(VAR,CON), entonces $k(P_1,\ldots,P_m) \in$ P(VAR,CON).

Usaremos las letras $X_1,\ldots,X_n$ para representar los elementos de VAR y las letras P, Q, R,... para representar los elementos de P(VAR,CON).

En lo que sigue r es un número entero mayor que 1. Vamos a definir un Cáculo Proposicional r-valente.

Para cada conectiva k está definida una función $H_k : Z_r^{ar(k)} \dashrightarrow Z_r$ (la tabla de verdad de la conectiva k).

Una valoración de verdad es una aplicación

$$v : VAR \dashrightarrow Z_r$$

Para cada valoración v, la aplicación

$$V : P_{CON,ar}(VAR) \dashrightarrow Z_r$$

está definida por

$$V(P) = \begin{cases} v(X), & \text{si } X \in VAR \\ H_k(V(P_1),\ldots,V(P_{ar(k)})), & \text{si P es } k(P_1,\ldots,P_{ar(k)}) \end{cases}$$

Una proposición P es una tautología si para toda valoración v, V(P) = 1.

Una proposición Q es una consecuencia tautológica de un conjunto de proposiciones $\{P_1,\ldots,P_m\}$ si para toda valoración v,

$$V(P_1) = \ldots = V(P_m) = 1 \Longrightarrow V(Q) = 1$$

Por $\{P_1,\ldots,P_m\} \models Q$ indicaremos que Q es una consecuencia tautológica de $\{P_1,\ldots,P_m\}$.

3.2.A.2.- Ejemplos

(a) El cálculo trivalente de Lukasiewicz tiene la conectiva monaria ¬ y las conectivas binarias v,& -> y <->. Las correspondientes tablas de verdad son:

a	$H_{\neg}(a)$
0	1
1	0
2	2

a\b	$H_{\vee}$ 0	$H_{\vee}$ 1	$H_{\vee}$ 2	$H_{\&}$ 0	$H_{\&}$ 1	$H_{\&}$ 2	$H_{\to}$ 0	$H_{\to}$ 1	$H_{\to}$ 2	$H_{\leftrightarrow}$ 0	$H_{\leftrightarrow}$ 1	$H_{\leftrightarrow}$ 2
0	0	1	2	0	0	0	1	1	1	1	0	2
1	1	1	1	0	1	2	0	1	2	0	1	2
2	2	1	2	0	2	2	2	1	1	2	2	1

(b) El cálculo modal trivalente de Lukasiewicz, se obtiene añadiéndole al anterior las conectivas monarias L y M y las tablas de verdad

a	$H_L(a)$	$H_M(a)$
0	0	0
1	1	1
2	0	1

Las fórmulas LP y MP se interpretan por "P es necesaria" y "P es posible", respectivamente.

(d) El cálculo trivalente de Gödel tiene las conectiva monaria ¬ y las conectivas binarias v,& -> y <->. Las correspondientes tablas de verdad son:

a	$H_{\neg}(a)$
0	1
1	0
2	0

	H_{v}			$H_{\&}$			$H_{\to}$			$H_{\leftrightarrow}$		
a\b	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
0	0	1	2	0	0	0	1	1	1	1	0	0
1	1	1	1	0	1	2	0	1	2	0	1	2
2	2	1	2	0	2	2	0	1	1	0	2	1

(d) El cálculo r-va lente de Lukasiewicz tiene el mismo conjunto de conectivas que el trivalente y sus tablas de verdad se definen por:

$$H_{\neg}(a) = r - a + 1;$$

$$H_{v}(a,b) = \min(a, b);$$

$$H_{\&}(a,b) = \text{máx}(a, b);$$

$$H_{\to}(a,b) = \begin{cases} 1, & \text{si } a \geq b, \\ 1 + b - a, & \text{si } a < b; \end{cases}$$

$$H_{\leftrightarrow}(a,b) = 1 + |a - b|;$$

(d) El cálculo r-valente de Gödel tiene el mismo conjunto de conectivas que el trivalente y sus tablas de verdad se definen por:

$$H_{\neg}(a) = \begin{cases} 1, & \text{si } a = r \\ r, & \text{si } a \neq r; \end{cases}$$

$$H_{v}(a,b) = \min(a, b);$$

$$H_{\&}(a,b) = \text{máx}(a, b);$$

$$H_{\to}(a,b) = \begin{cases} 1, & \text{si } a \geq b, \\ b, & \text{si } a < b; \end{cases}$$

$$H_{\leftrightarrow}(a,b) = \begin{cases} 1, & \text{si } a = b, \\ \max(a, b), & \text{si } a \neq b; \end{cases}$$

3.2.A.3.- Teorema

Sea P un cálculo proposicional r-valente, p un entero mayor que r y P' el cálculo proposicional p-valente que tiene el mismo lenguaje que P y la tabla de verdad de cada conectiva k, $H'_k : Z_p^{ar(k)} \dashrightarrow Z_p$, está definida por

$$H'_k(u_1,\ldots,u_{ar(k)}) = H_k(u'_1,\ldots,u'_{ar(k)})$$

donde H_k es la tabla de verdad de k en P y $u'_i = \min(u_i, r-1)$ Entonces una proposición P es una tautología en P sii lo es en P'.

3.2.A.4.- Nota

En lo que sigue nos limitaremos a estudiar los cálculos proposicionales con un número primo de valores de verdad y en el caso de un número compuesto, r, de valores de verdad lo que hacemos es buscar el menor primo mayor o igual que r y extender el cálculo como en el Teorema anterior.

3.2.B.- POLINOMIOS ASOCIADOS A PROPOSICIONES

3.2.B.1.- Notación

En lo que sigue, usaremos las siguientes notaciones:

- p es un número primo,

- $P_p(X_1,\ldots,X_n)$ es un cálculo proposicional p-valente en las variables $X_1,\ldots,X_n$.

- $Z_p[X_1,\ldots,X_n]$ es el anillo de los polinomios en $X_1,\ldots,X_n$ con coeficientes en Z_p.

3.2.B.2.- Definición

Para cada conectiva k de aridad r la aplicación

$$ST_k : (Z_p[X_1,\ldots,X_n])^r \longrightarrow Z_p[X_1,\ldots,X_n]$$

está definida por:

$$ST_k(q_1,\ldots,q_r) =$$

$$= \sum_{\substack{0\leq i1\leq p-1 \\ \ldots\ldots \\ 0\leq ir\leq p-1}} H_k(i_1,\ldots,i_r) \prod_{m=1}^{r} \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq im}}^{p-1} (q_m - j)/(i_m - j),$$

3.2.B.3.- Ejemplos

(a) En el cálculo trivalente de Lukasiewicz, las funciones ST_k son:

$$ST_{\neg}(a) = 2a + 1,$$

$$ST_{\vee}(a,b) = 2a^2 b^2 + a^2 b + ab^2 + ab + a + b,$$

$$ST_{\&}(a,b) = a^2 b^2 + 2a^2 b + 2ab^2 + 2ab,$$

$$ST_{\rightarrow}(a,b) = a^2 b^2 + 2a^2 b + 2ab^2 + 2ab + 2a + 1,$$

$$ST_{\leftrightarrow}(a,b) = 2a^2 b^2 + a^2 b + ab^2 + ab + 2a + 2b + 1.$$

[donde a, b C $Z_3[X_1,\ldots,X_n]$ y las operaciones se realizan en $Z_3[X_1,\ldots,X_n]$].

(b) En el cálculo modal trivalente de Lukasiewicz, las funciones ST_k son, además de las anteriores:

$$ST_L(a) = 2a^2 + 2a,$$

$$ST_M(a) = a^2.$$

[donde a C $Z_3[X_1,\ldots,X_n]$ y las operaciones se realizan en $Z_3[X_1,\ldots,X_n]$].

(c) En el cálculo trivalente de Gödel, las funciones ST_k son:

$$ST_{\neg}(a) = 2a^2 + 1,$$

$$ST_{\vee}(a,b) = 2a^2 b^2 + a^2 b + ab^2 + ab + a + b,$$

$$ST_{\&}(a,b) = a^2 b^2 + 2a^2 b + 2ab^2 + 2ab,$$

$$ST_{\rightarrow}(a,b) = 2a^2 b^2 + 2a^2 b + ab^2 + 2a^2 + 2ab + 1,$$

$$ST_{\leftrightarrow}(a,b) = a^2 b^2 + 2a^2 + ab + 2b^2 + 1.$$

[donde a, b C $Z_3[X_1,\ldots,X_n]$ y las operaciones se realizan en $Z_3[X_1,\ldots,X_n]$].

3.2.B.4.- Nota

Si k es una conectiva y r = ar (k), entonces para todo $(i_1,\ldots,i_r)$ $\in$ Z_p^r

$$ST_k(i_1,\ldots,i_r) = H_k(i_1,\ldots,i_r).$$

3.2.B.5.- Definición

La aplicación

$$ST : P_p(X_1,\ldots,X_n) \longrightarrow Z_p[X_1,\ldots,X_n]$$

está definida por:

$$ST(P) = \begin{cases} X_i, & \text{si } P \text{ es } X_i \text{ e } i \in \{1,\ldots,n\} \\ ST_k(ST(P_1),\ldots,ST(P_r)), & \text{si } P \text{ es } k(P_1,\ldots,P_r) \end{cases}$$

3.2.B.5.- Definición

Para cada valoración v, la aplicación

$$V^* : Z_p[X_1,\ldots,X_n] \longrightarrow Z_p$$

es el homomorfismo definido por:

$$V^*(p) = \begin{cases} 1, & \text{si } p \text{ es } 1 \\ v(X_i), & \text{si } P \text{ es } X_i \\ V^*(q) + V^*(r), & \text{si } p \text{ es } q + r \\ V^*(q)V^*(r), & \text{si } p \text{ es } qr \end{cases}$$

3.2.B.6.- Lema

Para toda valoración v, $V = V^* \circ ST$.

Demostración

Por inducción sobre la longitud de las proposiciones.

3.2.C.- CARACTERIZACIÓN ALGEBRAICA DE LAS TAUTOLOGÍAS

3.2.C.1.- Notación

En lo que sigue, usaremos las siguientes notaciones:

- $F = \{X_1^p - X_1, \ldots, X_n^p - X_n\} \subseteq Z_p[X_1, \ldots, X_n]$;

- $I = I(F)$ es el ideal de $Z_p[X_1, \ldots, X_n]$ generado por F;

- ---> es la relación de reducción definida por F en $Z_p[X_1, \ldots, X_n]$.

3.2.C.2.- Lema

F es una base de Gröbner.

Demostración

Por 2.9.2, ya que los líderes de los elementos de F son primos entre sí.

3.2.C.3.- Lema

Para toda valoración v,

$$q \in I \implies V^*(q) = 0.$$

Demostración

Sea $q \in I$. Existen polinomios $r_1, \ldots, r_n$ tales que $q = r_1(X_1^p - X_1) + \ldots + r_n(X_n^p - X_n)$. Por el Teorema de Fermat, $a^p - a = 0$, para todo $a \in Z_p$. Puesto que V^* es un homomorfismo, $V^*(q) = 0$.

3.2.C.4.- Lema

Para toda valoración v,

$$p \xrightarrow{}{}^* q \implies V^*(p) = V^*(q).$$

Demostración

Análoga a la del Lema 3.1.C.4.

3.2.C.5.- Lema

$q \in I$ <===> para toda valoración v, $V^*(q) = 0$.

Demostración

(===>) Lema 3.2.C.3.

(<===) Por inducción sobre n:

Para n = 1: Sea q' la forma --->-irreducible de q. Existen $a_0,\ldots,a_{p-1} \in Z_p$ tales que

$$q' = a_{p-1} X_1^{p-1} + \ldots + a_1 X_1 + a_0.$$

Para cada $i \in \{0,\ldots, p-1\}$, sea v_i la valoración definida por $v_i(X_1) = i$. Por el Lema 3.2.C.4, $V_i^*(q) = V_i^*(q')$ para todo $i \in \{0,\ldots, p-1\}$. Luego,

$0 = V_0^*(q) = V_0^*(q') = a_0$,

$0 = V_1^*(q) = V_1^*(q') = a_{p-1} + \ldots + a_1 + a_0$,

$0 = V_2^*(q) = V_2^*(q') = 2^{p-1} a_{p-1} + \ldots + 2a_1 + a_0$,

$0 = V_3^*(q) = V_3^*(q') = 3^{p-1} a_{p-1} + \ldots + 3a_1 + a_0$,

.....

$0 = V_{p-1}^*(q) = V_{p-1}^*(q') = (p-1)^{p-1} a_{p-1} + \ldots + (p-1)a_1 + a_0$.

Puesto que el determinante del sistema es

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 2^{p-1} & 2^{p-2} & \ldots & 2 & 1 \\ 3^{p-1} & 3^{p-2} & \ldots & 3 & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (p-1)^{p-1} & (p-1)^{p-2} & \ldots & (p-1) & 1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

$a_0 = a_1 = \ldots = a_{p-1} = 0$ y $q' = 0$.

Supongamos el resultado cierto para n - 1. Sea q' la forma --->-irreducible de q. Existen $q_0,\ldots,q_{p-1}$ $\in$ $Z_p[X_1,\ldots,X_{n-1}]$ tales que

$$q' = q_{p-1} X_n^{p-1} +\ldots+ q_1 X_n + q_0.$$

Sea v una valoración de $\{X_1,\ldots,X_{n-1}\}$. Para cada i $\in$ $\{0,\ldots, p - 1\}$, sea v_i la valoración definida por

$$v_i(X_j) = \begin{cases} v(X_j), & \text{si } j \in \{1,\ldots, n - 1\} \\ i, & \text{si } j = n. \end{cases}$$

Por el Lema 3.2.C.4, para todo i $\in$ $\{0,\ldots, p - 1\}$, $V_i^*(q) = V_i^*(q')$. Luego,

$0 = V_0^*(q) = V_0^*(q') = V^*(q_0)$,

$0 = V_1^*(q) = V_1^*(q') = V^*(q_{p-1}) +\ldots + V^*(q_1) + V^*(q_0)$,

$0 = V_2^*(q) = V_2^*(q') = 2^{p-1} V^*(q_{p-1}) +\ldots + 2V^*(q_1) + V^*(q_0)$,

.....

$0 = V_{p-1}^*(q) = V_{p-1}^*(q') =$

$= (p-1)^{p-1} V^*(q_{p-1}) +\ldots + (p-1)V^*(q_1) + V^*(q_0)$,

Como en el caso anterior, $V^*(q_0) = V^*(q_1) =\ldots= V^*(q_{p-1}) = 0$. Por la hipótesis de inducción, $q_0 = q_1 = \ldots = q_{p-1} = 0$. Luego, $q' = 0$.

3.2.C.6.- Teorema

P es una tautología sii ST(P) --->* 1.

Demostración

P es una tautología

<===> para toda valoración v,

V(P) = 1 [por 3.2.A.1]

<===> para toda valoración v,

V*(ST(P)) = 1 [por 3.2.B.5]

<=====> para toda valoración v,

$V^*(ST(P) - 1) = 0$

<=====> $ST(P) - 1 \in I$ [por 3.2.C.5]

<=====> $ST(P) - 1 \dashrightarrow^* 0$ [por 2.5.4]

<=====> $ST(P) \dashrightarrow^* 1$.

3.2.C.7.- Ejemplo

Dadas las fórmulas

$P_1 = x \vee \neg x$,

$P_2 = ((x \to \neg x) \to x) \to x$,

$P_3 = x \to (y \to x)$,

$P_4 = (\neg\neg x \to x) \to (x \vee \neg x)$,

estudiar su validez en los sistemas trivalentes de Gödel y Lukasiewicz.

Solución

Representaremos por ST_L y ST_G las funciones ST correspondientes a los sistemas trivalentes de Lukasiewicz y Gödel, respectivamente.

$ST_L(P_1) = 2x^4 + 2x^3 + 2x + 1 \dashrightarrow^*$

$\dashrightarrow^* 2x^2 + x + 1$.

$ST_G(P_1) = 2x^6 + x^5 + x^4 + 2x^2 + 1 \dashrightarrow^*$

$\dashrightarrow^* 2x^2 + x + 1$.

$ST_L(P_2) = x^{22} + x^{21} + 2x^{18} + 2x^{17} + 2x^{16} + 2x^{15} + x^{14} + x^{11} +$

$+ 2x^{10} + 2x^9 + 2x^6 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1 \dashrightarrow^*$

$\dashrightarrow^* 1$.

$ST_G(P_2) = 2x^{30} + x^{29} + 2x^{27} + 2x^{24} + x^{23} + x^{22} + x^{21} + x^{20} +$

$+ x^{19} + 2x^{18} + 2x^{17} + 2x^{16} + x^{15} + 2x^{14} + x^{13} +$

$+ 2x^{11} + x^8 + x^6 + x^5 + 2x^4 + x^2 + 1 \dashrightarrow^*$

$$\text{--->}^* 2x^2 + x + 1.$$

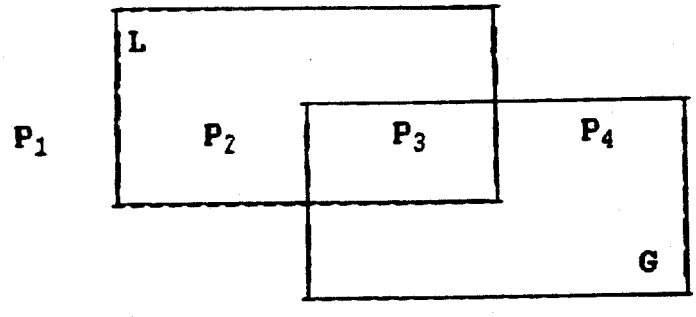
$$ST_L(P_3) = x^6y^4 + x^6y^3 + x^6y^2 + 2x^5y^3 + x^5y^2 + 2x^4y^2 + 2x^4y +$$
$$+ 2x^3y^4 + 2x^3y^3 + x^3y^2 + 2x^3y + x^2y^3 + 2x^2y^2 +$$
$$+ 2x^2y + 2xy^2 + 1 \text{--->}^*$$
$$\text{--->}^* 1.$$

$$ST_G(P_3) = 2x^6y^4 + 2x^6y^3 + 2x^6y^2 + 2x^5y^4 + x^5y^3 + 2x^4y^4 +$$
$$+ x^3y^4 + x^3y^3 + x^3y + x^2y^4 + 2x^2y^3 + 2x^2y^2 + 2x^2y +$$
$$+ xy^4 + 2xy^2 + 1 \text{--->}^*$$
$$\text{--->}^* 1.$$

$$ST_L(P_4) = x^{16} + x^{15} + x^{14} + x^{13} + 2x^{12} + x^{11} + 2x^{10} + x^8 +$$
$$+ 2x^6 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1 \text{--->}^*$$
$$\text{--->}^* 2x^2 + x + 1.$$

$$ST_G(P_4) = 2x^{32} + x^{30} + x^{29} + 2x^{28} + 2x^{27} + 2x^{24} + x^{23} + x^{22} +$$
$$+ x^{20} + x^{18} + 2x^{16} + x^{15} + x^{14} + 2x^{10} + x^9 + 2x^8 +$$
$$+ x^6 + x^4 + 2x^2 + 1 \text{--->}^*$$
$$\text{--->}^* 1.$$

Por tanto, las fórmulas válidas en el sistema de Lukasiewicz son P_2 y P_3, y las válidas en el sistema de Gödel son P_3 y P_4. Gráficamente,



3.2.C.8.- Definición

P es una contradicción si para toda valoración v, V(P) = 0.

3.2.C.9.- Corolario

P es una contradicción sii ST(P) --->* 0.

Demostración

P es una contradicción

<===> para toda valoración v,

V(P) = 0 [por 3.2.C.8]

<===> para toda valoración v,

V*(ST(P)) = 0 [por 3.2.B.6]

<===> ST(P) ∈ I [por 3.2.C.5]

<===> ST(P) --->* 0 [por 2.5.4]

3.2.D.- CARACTERIZACIÓN ALGEBRAICA DE LA DEDUCCIÓN

3.2.D.1.- Lema

Sean $p_1,\ldots,p_m,\ q \in Z_p[X_1,\ldots,X_n]$. Si I y J son los ideales de $Z_p[X_1,\ldots,X_n]$ engendrados por los conjuntos $F = \{X_i^p - X_i: 1 \leq i \leq n\}$ y $G = \{p_i: 1 \leq i \leq m\}$, las condiciones siguientes son equivalentes:

(a) $q \in I + J$ (i.e. el ideal engendrado por F U G).

(b) Para toda valoración v,

$$V^*(p_1) = \ldots = V^*(p_m) = 0 \quad ===> V^*(q) = 0.$$

Demostración

(===>) Es una consecuencia inmediata del Lema 3.2.C.3 y de ser V^* homomorfismo.

(<===) Dividimos el conjunto de las valoraciones en dos subconjuntos:

$A = \{v: V^*(p_1) = \ldots = V^*(p_m) = 0\}$,

$B = \{v:$ existe un $i(v) \in \{1,\ldots,m\}$ tal que $V^*(p_{i(v)}) \neq 0\}$

Consideremos el polinomio

$$q' = \begin{cases} q, & \text{si } B = \emptyset; \\ q \prod_{v \in B} (p_{i(v)} - V^*(p_{i(v)})), & \text{si } B \neq \emptyset. \end{cases}$$

Para toda valoración v, $V^*(q') = 0$. Por el Lema 3.2.C.5, $q' \in I$.

Si $B = \emptyset$, $q = q' \in I \subseteq I + J$.

Si $B \neq \emptyset$, podemos escribir

$$q' = q \prod_{v \in B} (p_{i(v)} - V^*(p_{i(v)})) = uq + p',$$

donde

$$u = \prod_{v \in B} (- V^*(p_{i(v)})) \in Z_p - \{0\}$$

y $p' \in J$. Luego,

$$uq = q' - p' \in I + J$$

y $q \in I + J$.

3.2.D.2.- Corolario

Las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $1 \in I + J$

(b) no existe ninguna valoración v, tal que $V^*(p_1) = \ldots = V^*(p_m) = 0$.

3.2.D.3.- Teorema

Sean $P_1,\ldots,P_m$, Q proposiciones de un cálculo proposicional p-valente. Las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $\{P_1,\ldots,P_m\} \models Q$

(b) $ST(Q)-1 \in (ST(P_1)-1,\ldots, ST(P_m)-1, X_1^p - X_1,\ldots, X_n^p - X_n)$

Demostración

$\{P_1,\ldots,P_m\} \models Q$ <===>

<===> para toda valoración v,

$V(P_1) = \ldots = V(P_m) = 1$ ===> $V(Q) = 1$

<===> para toda valoración v,

$V^*(ST(P_1)) = \ldots = V^*(ST(P_m)) = 1$ ===> $V^*(ST(Q)) = 1$

[por 3.2.B.6]

<===> para toda valoración v,

$V^*(ST(P_1)-1) = \ldots = V^*(ST(P_m)-1) = 0$ ===> $V^*(ST(Q)-1) = 0$

[por ser V^* homomorfismo]

<===> $ST(Q)-1 \in (ST(P_1)-1,\ldots,ST(P_m)-1, X_1^D - X_1,\ldots,X_n^D - X_n)$

[por 3.2.D.1]

3.2.D.4.- Corolario

Son equivalentes:

(a) $\{P_1,\ldots,P_m\}$ es inconsistente

(b) $1 \in (ST(P_1)-1,\ldots, ST(P_m)-1, X_1^D - X_1,\ldots, X_n^D - X_n)$

Demostración

$\{P_1,\ldots,P_m\}$ es inconsistente <===>

<===> no existe ninguna valoración v, tal que

$V(P_1) = \ldots = V(P_m) = 1$

<===> no existe ninguna valoración v, tal que

$V^*(ST(P_1)-1) = \ldots = V^*(ST(P_m)-1) = 0$ [por 3.2.B.6]

<===> $1 \in (ST(P_1)-1,\ldots, ST(P_m)-1, X_1^D - X_1,\ldots, X_n^D - X_n)$

[por 3.2.D.2]

3.2.D.5.- Nota

Los algoritmos de deducción para las lógicas polivalentes son los mismos que los desarrollados para la lógica clásica en 3.1.E.

CAPITULO 4

LÓGICA MONÁDICA

En este capítulo usamos las bases de Gröbner para resolver algorítmicamente problemas de la lógica monádica.

La sección 4.1 contiene las definiciones de la lógica monádica que usaremos en las restantes.

En la sección 4.2 definimos la aplicación G que asocia un polinomio de $Z_2[X_1,\ldots,X_n]$ a cada sentencia monádica.

En la sección 4.3 caracterizamos las sentencias válidas mediante el Teorema 4.3.8.

En la sección 4.4 damos condiciones equivalentes a $\{A_1,\ldots,A_m\} \models B$ (4.4.1) y a $\{A_1,\ldots,A_m\}$ es inconsistente (4.4.3) que nos permiten aplicar a la lógica monádica los algoritmos de la sección 3.1.E para el cálculo proposicional clásico.

4.1.- DEFINICIONES

4.1.1.- Definición

Un lenguaje monádico L está formado por un conjunto de variables (x, y, z,...), un conjunto de constantes un conjunto de símbolos de predicados monádicos, las conectivas ¬ (negación) y & (conjunción) y el cuantificador universal ∀.

4.1.2.- Definición

Los términos de un lenguaje monádico son las variables y las constantes. Usaremos la letra t como metavariable para designar términos.

4.1.3.- Definición

(a) Si p es un símbolo de predicado y t es un término de L, pt es una fórmula atómica de L.

(b) Si A es una fórmula de L, ¬A también lo es.

(c) Si A y B son fórmulas de L, A & B también lo es.

(d) Si A es una fórmula de L, (∀xA) también lo es.

Usaremos las letras A, B, C,... como metavariables sobre fórmulas.

4.1.4.- Definición

(1) Una estancia de una variable x en una fórmula A es ligada si dicha estancia ocurre en una parte de A de la forma (∀xB). En caso contrario, se dice que la estancia es libre.

(2) Una variable x es libre (resp. ligada) en una fórmula A si A tiene alguna estancia libre (resp. ligada) de x.

(3) Una sentencia de L es una fórmula de L sin variables libres. Representaremos por Sent(L) el conjunto de las sentencias de L.

(4) Una proposición de L es una sentencia de L sin cuantificadores. Representaremos por P(L) el conjunto de proposiciones de L.

4.1.5.- Definición

$A_{x1,\ldots,xs}[t_1,\ldots,t_s]$ es la fórmula obtenida sustituyendo simultáneamente todas las estancias libres de $x_1,\ldots,x_s$ en A por $t_1,\ldots,t_s$ respectivamente.

4.1.6.- Definición

Usaremos las siguientes abreviaturas:

(1) A v B como abreviatura de ¬(¬A & ¬B).

(2) A -> B como abreviatura de ¬A v B.

(3) A <-> B como abreviatura de (A -> B) & (B -> A)

(4) (∃xA) como abreviatura de ¬(∀x)¬A

4.1.7.- Definición

Una L-estructura M consta de:

(1) Un conjunto no vacío M, que denominaremos universo de M.

(2) Para cada constante c de L, un elemento M(c) de M.

(3) Para cada símbolo de predicado p de L, un subconjunto M(p) de M.

4.1.8.- Definición

Sea M una L-estructura. Para cada elemento a de M elegimos un nuevo símbolo de constante a. Al lenguaje obtenido añadiéndole a L una nueva constante a por cada elemento a de M lo notaremos por L(M).

4.1.9.- Definición

Para cada nueva constante a de L(M) definimos M(a) como el elemento de M representado por a.

4.1.10.- Definición

Sea A una sentencia de L(M). El valor de verdad de A en M se define recursivamente por:

(1) Si A es pt, $M(A) = 1$ sii $M(t) \in M(p)$

(2) Si A es $\neg B$, $M(A) = H_{\neg}(M(B))$

(3) Si A es B&C, $M(A) = H_{\&}(M(B),M(C))$

(4) Si A es $(\forall xB)$, $M(A) = 1$ sii $M(B_x[a]) = 1$ para todo $a \in M$.

4.1.11.- Definición

(1) Una M-estancia de una fórmula A de L es una fórmula cerrada de L(M) de la forma $A_{x1,\ldots,xs}[a_1,\ldots,a_s]$ donde $a_1,\ldots, a_s$ son elementos de M.

(2) Una fórmula A de L es válida en M, $M \models A$, si para toda M-estancia A' de A, $M(A') = 1$.

(3) M es un modelo de A si $M \models A$.

(4) A es válida, $\models A$, si es válida en todas las L-estructuras.

(5) A es consistente si tiene algún modelo.

(6) M es un modelo de $\{A_1,\ldots,A_s\}$ si $M \models A_i$ para todo i $(1 \leq i \leq s)$.

(7) A es una consecuencia de $\{A_1,\ldots,A_s\}$, $\{A_1,\ldots,A_s\} \models A$ si todos los modelos de $\{A_1,\ldots,A_s\}$ son modelos de A.

(8) $\{A_1,\ldots,A_s\}$ es consistente si tiene algún modelo e inconsistente en caso contrario.

4.1.12.- Notación

En lo que sigue utilizaremos las siguientes notaciones:

(1) L es el lenguaje monádico que tiene las constantes $c_1,\ldots, c_r$ y los símbolos de predicados monádicos $p_1,\ldots,p_m$.

(2) $n = r + 2^m$.

(3) L' es el lenguaje obtenido añadiéndole a L las 2^m nuevas constantes $c_{r+1},\ldots, c_n$.

4.1.13.- Definición

Una valoración de L' es una aplicación v del conjunto $\{p_ic_j: 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ en Z_2. Para cada valoración v se define una aplicación $V : P(L') \longrightarrow Z_2$ recursivamente como sigue:

$$V(A) = \begin{cases} v(A), & \text{si A es atómica;} \\ H_{\neg}(V(B)), & \text{si A es } \neg B; \\ H_{\&}(V(B),V(C)), & \text{si A es B \& C.} \end{cases}$$

4.1.14.- Definición

Una proposición A de L' es una tautología si para toda valoración de verdad v de L', V(A) = 1.

4.2.- POLINOMIOS ASOCIADOS A FÓRMULAS

4.2.1.- Definición

F: Sent(L') ---> P(L') se define recursivamente como

$$F(A) = \begin{cases} A & \text{, si A es atómica} \\ \neg F(B) & \text{, si A es } \neg B \\ F(B)\ \&\ F(C) & \text{, si A es B \& C} \\ F(B_x[c_1])\ \&\ \ldots\ \&\ F(B_x[c_n]) & \text{, si A es } \forall xB \end{cases}$$

4.2.2.- Notas

(a) F(B v C) = F(B) v F(C)

(b) F(B -> C) = F(B) -> F(C)

(c) F(B <-> C) = F(B) -> F(C)

(d) $F(\exists xB) = F(B_x[c_1])\ v\ \ldots\ v\ F(B_x[c_n])$

4.2.3.- Definición

G: Sent(L') ---> $Z_2[X_1,\ldots,X_{mn}]$ se define recursivamente por

$$G(A) = \begin{cases} X_{(i-1)n+j}, & \text{si A es } p_ic_j; \\ G(B) + 1, & \text{si A es } \neg B; \\ G(B)G(C), & \text{si A es B \& C;} \\ G(B_x[c_1]).....G(B_x[c_n]), & \text{si A es } \forall xB \end{cases}$$

4.2.4.- Notas

(a) G(B v C) = G(B)G(C) + G(B) + G(C).

(b) G(B -> C) = G(B)G(C) + G(B) + 1.

(c) G(B <-> C) = G(B) + G(C) + 1.

$$(d)\ G(\exists xB) = \sum\{\prod_{j=1}^{s} G(B_x[c_{i(j)}]) : 1 \leq i(1) < \ldots < i(s) \leq n\}$$

4.2.5.- Definición

ST : P(L') ---> $Z_2[X_1,\ldots,X_{mn}]$ se define recursivamente por

$$ST(A) = \begin{cases} X_{(i-1)n+j}, & \text{si A es } p_ic_j; \\ ST(B) + 1, & \text{si A es } \neg B; \\ ST(B).ST(C), & \text{si A es B \& C.} \end{cases}$$

4.2.6.- Notación

En lo que sigue, $F = \{X_i^2 + X_i : 1 \leq i \leq mn\}$ y escribiremos ---> en lugar de $--->_F$.

4.2.7.- Lema

Una proposición A de L' es una tautología si, y sólo si, ST(A) $--->^*$ 1.

Demostración

Ver 3.1.C.7

4.2.8.- Lema

$G = ST \circ F$.

Demostración

Por inducción sobre la longitud de las sentencias.

. Si A es atómica, A es p_ic_j para algún $i \in \{1,\ldots,m\}$ y $j \in \{1,\ldots,n\}$. Sea $k = (i - 1)n + j$.

$$(ST \circ F)(A) = ST(F(A)) =$$

$$= ST(A) = \qquad \text{[por 4.2.1]}$$

$= X_k =$ [por 4.2.5]

$= G(A)$. [por 4.2.3]

. Si A es $\neg B$,

$(ST \circ F)(A) = ST(F(\neg B)) =$

$= ST(\neg F(B)) =$ [por 4.2.1]

$= ST(F(B)) + 1 =$ [por 4.2.5]

$= G(B) + 1 =$ [por hip. ind.]

$= G(\neg B) =$ [por 4.2.3]

$= G(A)$.

. Si A es B & C,

$(ST \circ F)(A) = ST(F(B \& C)) =$

$= ST(F(B) \& F(C)) =$ [por 4.2.1]

$= ST(F(B))ST(F(C)) =$ [por 4.2.5]

$= G(B)G(C) =$ [por hip. ind.]

$= G(B \& C) =$ [por 4.2.3]

$= G(A)$.

4.3.- CARACTERIZACIÓN ALGEBRAICA DE LA VALIDEZ.

4.3.1.- Lema

Si A es una sentencia consistente de L, existe un modelo M' de A tal que card (M') $\leq 2^m$.

Demostración

Sea M un modelo de A y N el universo de M. En N definimos la relación

a R b sii $M(p_i a) = M(p_i b)$ para todo i $\in \{1, \ldots, m\}$

(donde a y b son las nuevas constantes que se añaden a L para denotar los elementos a y b de N). R es una relación de equivalencia en N. En cada clase [a], elegimos un elemento a'. Sea M el conjunto formado por dichos elementos y M la L(M)-estructura de universo M definida por

$M(a) = a'$, para todo a $\in$ N;

$M(c_i) = M(N(c_i))$, para todo i $\in \{1, \ldots, r\}$;

$M(p_j) = \{a' : a \in N(p_j)\}$, para todo j $\in \{1, \ldots, m\}$

Que la restricción de M a L, $M_{|L}$, es un modelo de A tal que card$(M_{|L}) \leq 2^m$ es una consecuencia inmediata de los siguientes Lemas:

Lema I: card (M) $\leq 2^m$

Lema II: Para toda fórmula B de L(M) con s (s $\geq$ 0) variables libres $x_1, \ldots, x_s$ y todo $(a_1, \ldots, a_s) \in N^s$,

$$M(B_{x1,\ldots,xs}[a_1, \ldots, a_s]) = M(B_{x1,\ldots,xs}[a_1', \ldots, a_s']).$$

En efecto, card $(B_{|L})$ = card (B) $\leq 2^m$ por el Lema I; y, por el Lema II, M(A) = N(A) = 1.

Demostración de Lema I

La aplicación s: M ---> Z_2^m definida por

$$s(a') = (M(p_1a'),\ldots,M(p_ma'))$$

es inyectiva. Luego, card (M) $\leq$ card (Z_2^m) = 2^m.

Demostración del Lema II

Por inducción sobre la longitud de las fórmulas:

·Si B es atómica, existe un i $\in$ {1 ,..., m} y un término t de L(N) tales que B es p_it.

··Si existe un a $\in$ N tal que t es a,

M(B) = 1 <===> $M(p_ia)$ = 1

<===> a $\in$ $M(p_i)$

<===> a' $\in$ $M(p_i)$

<===> $M(p_ia)$ = 1 [pues M(a) = a']

<===> M(B) = 1

··Si existe un j $\in$ {1 ,..., r} tal que t es c_j , entonces existe un a $\in$ N tal que a = $M(c_j)$. Por tanto, $M(c_j)$ = M(M(c_j)) = a'.

M(B) = $M(p_ic_j)$ =

= $M(p_ia)$ =

= $M(p_ia)$ = [por el caso anterior]

= $M(p_ia')$ = [M(a) = a']

= $M(p_ic_j)$ = [$M(c_j)$ = a']

= M(B).

··En caso contrario, t es una variable x

$M(B_x[a])$ = $M(p_ia)$ =

= $M(p_ia)$ = [por el caso 1]

= $M(p_ia')$ = [M(a) = a']

= $M(B_x[a'])$

·Si B es ¬C,

$$\mathfrak{M}(B_{x1,\ldots,xs}[a_1, \ldots, a_s]) =$$

$$= \mathfrak{M}(\neg C_{x1,\ldots,xs}[a_1, \ldots, a_s]) =$$

$$= H_{\neg}(\mathfrak{M}(C_{x1,\ldots,xs}[a_1, \ldots, a_s])) =$$

$$= H_{\neg}(M(C_{x1,\ldots,xs}[a_1, \ldots, a_s])) =$$

[hip. ind]

$$= M(\neg C_{x1,\ldots,xs}[a_1, \ldots, a_s]) =$$

$$= M(B_{x1,\ldots,xs}[a_1, \ldots, a_s])$$

·Si B es C & D, se demuestra análogamente.

·Si B es ∀yC,

$\mathfrak{M}(B_{x1,\ldots,xs}[a_1,\ldots,a_s]) = 1$ <===>

<===> $\mathfrak{M}(\forall y C_{x1,\ldots,xs}[a_1, \ldots, a_s]) = 1$

<===> para todo b ∈ N,

$$\mathfrak{M}((C_{x1,\ldots,xs}[a_1, \ldots, a_s])_y[b]) = 1$$

<===> para todo b ∈ N,

$$\mathfrak{M}(C_{x1,\ldots,xs,y}[a_1, \ldots, a_s, b]) = 1$$

<===> para todo b ∈ N,

$$M(C_{x1,\ldots,xs,y}[a_1', \ldots, a_s', b']) = 1$$

[por hip. ind.]

<===> para todo b' ∈ M,

$$M(C_{x1,\ldots,xs,y}[a_1', \ldots, a_s', b']) = 1 \cdot$$

<===> para todo b' ∈ M,

$$M((C_{x1,\ldots,xs}[a_1', \ldots, a_s'])_y [b']) = 1$$

<===> $M(\forall y\ C_{x1,\ldots,xs}[a_1', \ldots, a_s']) = 1$

<===> $M(B_{x1,\ldots xs}[a_1', \ldots, a_s']) = 1.$

4.3.2.- Lema

Si M es un modelo finito de una sentencia A de L, existe un modelo N de A tal que card (N) = card (M) + 1.

Demostración

Sea b_0 un elemento distinto de los de M, $N = M \cup \{b_0\}$ y a_0 un elemento fijo de M. Sea N la L-estructura de universo N definida por

$$N(c_i) = M(c_i) \text{ , para todo } i \in \{1, \ldots, r\};$$

$$N(p_j) = \begin{cases} M(p_j) & \text{, si } a_0 \notin M(p_j); \\ M(p_j) \cup \{b_0\} & \text{, si } a_0 \in M(p_j). \end{cases}$$

Además, para cada elemento a de M, la constante añadida a L para formar L(N) es la misma que se añade para formar L(M). Que N es un modelo de A es una consecuencia inmediata del siguiente Lema:

Lema: Para toda fórmula B de L(M) con s ($s \geq 0$) variables libres $x_1, \ldots, x_s$,

$$N(B_{x1,\ldots,xs}[b_0, \ldots, b_0]) = M(B_{x1,\ldots,xs}[a_0, \ldots, a_0]).$$

Demostración (Por inducción sobre la longitud de B):

·Si B es atómica, existe un $i \in \{1, \ldots, m\}$ y un término t de L(M) tales que B es $p_i t$.

·Si t es una variable, x

$$N(B_x[b_0]) = 1 \Leftrightarrow N(p_i b_0) = 1$$
$$\Leftrightarrow b_0 \in N(p_i)$$
$$\Leftrightarrow a_0 \in M(p_i)$$
$$\Leftrightarrow M(p_i a_0) = 1$$
$$\Leftrightarrow M(B_x[a_0]) = 1$$

·Si t es una constante, $M(t) = N(t) = b_0$ y

$$\mathfrak{N}(B) = 1 \iff \mathfrak{N}(p_i t) = 1$$
$$\iff \mathfrak{N}(t) \in \mathfrak{N}(p_i)$$
$$\iff M(t) \in M(p_i)$$
$$\iff M(p_i t) = 1$$
$$\iff M(B) = 1.$$

·Si B es $\neg C$,

$$M(B_{x1,\ldots,xs}[b_0, \ldots, b_0]) =$$
$$= M(\neg C_{x1,\ldots,xs}[b_0, \ldots, b_0])$$
$$= H_\neg(M(C_{x1,\ldots,xs}[b_0, \ldots, b_0]) =$$
$$= H_\neg(\mathfrak{N}(C_{x1,\ldots,xs}[a_0, \ldots, a_0]) = \text{[hip.ind.]}$$
$$= \mathfrak{N}(\neg C_{x1,\ldots,xs}[a_0, \ldots, a_0]) =$$
$$= \mathfrak{N}(B_{x1,\ldots,xs}[a_0, \ldots, a_0])$$

·Si B es C & D, se demuestra análogamente.

·Si B es $\forall y C$,

$\mathfrak{N}(B_{x1,\ldots xs}[b_0, \ldots, b_0] = 1 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \mathfrak{N}(\forall y C_{x1,\ldots,xs}[b_0, \ldots, b_0]) = 1$

$\Longrightarrow$ para todo $b \in N$,

$$\mathfrak{N}((C_{x1,\ldots,xs}[b_0, \ldots, b_0])_y\ [b] = 1$$

$\Longrightarrow$ para todo $a \in M$,

$$\mathfrak{N}((C_{x1,\ldots,xs}[b_0, \ldots, b_0])_y\ [a]) = 1$$

$\Longrightarrow$ para todo $a \in M$,

$$\mathfrak{N}((C_y[a])_{x1,\ldots,xs}[b_0, \ldots, b_0]) = 1$$

$\Longrightarrow$ para todo $a \in M$,

$$M((C_y[a])_{x1,\ldots,xs}[a_0, \ldots, a_0]) = 1$$

[hip. ind.]

$\Longrightarrow$ para todo $a \in M$,

$$M((C_{x1,\ldots,xs}[a_0, \ldots, a_0])_y[a]) = 1$$

$$\Longrightarrow M(\forall y C_{x1,\ldots,xs}[a_0, \ldots, a_0]) = 1$$

$\Longrightarrow M(B_{x1,\ldots,xs}[a_0, \ldots, a_0]) = 1$

$M(B_{x1,\ldots,xs}[a_0, \ldots, a_0]) = 1 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow M(\forall y C_{x1,\ldots,xs}[a_0, \ldots, a_0]) = 1$

$\Longrightarrow$ para todo $a \in M$,

$M((C_{x1,\ldots,xs}[a_0, \ldots, a_0])_y[a] = 1$

$\Longrightarrow$ ··para todo $a \in N - \{b_0\} = M$

$N((C_{x1,\ldots,xs}[b_0, \ldots, b_0])_y[a]) =$

$= N((C_y[a])_{x1,\ldots,xs}[b_0, \ldots, b_0]) =$

$= M((C_y[a])_{x1,\ldots,xs}[a_0, \ldots, a_0]) =$

[por hip. ind.]

$= M((C_{x1,\ldots,xs}[a_0, \ldots, a_0])_y[a] =$

$= 1$

··para $a = b_0$:

$N((C_{x1,\ldots,xs}[b_0, \ldots, b_0])_y[a]) =$

$= N(C_{x1,\ldots,xs,y}[b_0, \ldots, b_0, b_0]) =$

$= M(C_{x1,\ldots,xs,y}[a_0, \ldots, a_0, a_0]) =$

[por hip.ind.]

$= 1$

$\Longrightarrow$ para todo $a \in N$,

$N(C_{x1,\ldots,xs}[b_0, \ldots, b_0])_y[b] = 1$

$\Longrightarrow N(\forall y C_{x1,\ldots,xs}[b_0, \ldots, b_0]) = 1$

$\Longrightarrow N(B_{x1,\ldots,xs}[b_0, \ldots, b_0]) = 1.$

4.3.3.- Teorema

Si A es una sentencia consistente de L, tiene un modelo de cardinal 2^n.

Demostración

Es una consecuencia inmediata de los Lemas 4.3.1 y 4.3.2

4.3.4.- Definición

Una L'-estructura M' es adecuada si para cada a' $\in$ M', existe un i $\in$ {1 ,...., n} tal que M'(c_i) = a'.

4.3.5.- Lema

Sea M' una L'-estructura adecuada. Para toda sentencia A de L, M'(A) = M'(F(A)).

Demostración

(Por inducción sobre la longitud de A)

·Si A es atómica, F(A) = A y M'(A) = M'(F(A)).

·Si A es $\neg$B,

$$\begin{aligned} M'(A) = M'(\neg B) &= \\ &= H_{\neg}(M'(B)) = \\ &= H_{\neg}(M'(F(B))) = \quad \text{[hip. de ind.]} \\ &= M'(\neg F(B)) = \\ &= M'(F(\neg B)) = \\ &= M'(F(A)). \end{aligned}$$

·Si A es B & C, si demuestra análogamente.

·Si A es $\forall$xB, se verifica el siguiente Lema:

Lema: Para todo a' $\in$ M', M'(B_x[a']) = 1 sii para todo i $\in$ {1 ,...., n}, M'(B_x[c_i]) = 1.

Usando el lema tenemos:

M'(A) = 1 <===> M'($\forall$xB) = 1

<===> para todo a' $\in$ M', M'(B_x[a']) = 1

<====> para todo i $\in$ {1 ,...., n}, $M'(B_x[c_i]) = 1$

[por el Lema]

<====> $M'(B_x[c_1] \ . \ ... \ . \ B_x[c_n]) = 1$

<====> $M'(F(A)) = 1$

Demostración del Lema

(===>) Sea i $\in$ {1 ,...., n}.

$$M'(B_x[c_i]) = M'(B_x[M'(c_i)]) = 1.$$

(<===) Sea a' $\in$ M'. Existe un i $\in$ {1 ,...., n} tal que $M'(c_i) = a'$. Luego, $M'(B_x[a'] = M'(B_x[c_i]) = 1$.

4.3.6.- Lema

Si A es una sentencia consistente de L, existe una L'-estructura adecuada M' que es un modelo de A.

Demostración

Por el teorema 4.3.3 (aplicado a A como sentencia de L'), existe una L'-estructura M tal que M(A) = 1 y card(M) = 2^m. Sea M = $\{a_i: 1 \leq i \leq 2^m\}$ el universo de M y M' la L'-estructura de universo M definida por

$$M'(c_i) = \begin{cases} M(c_i), & \text{si } 1 \leq i \leq r; \\ a_{i-r}, & \text{si } r+1 \leq i \leq n; \end{cases}$$

$$M'(p_j) = M(p_j), \quad \text{si } 1 \leq j \leq m.$$

M' es adecuada y M'(A) = M(A) = 1.

4.3.7.- Teorema

Una sentencia A de L es válida sii F(A) es una tautología.

Demostración

(===>) Supongamos que F(A) no es una tautología. Existe una valoración v de L' tal que V(F(A)) = 0. Sea M' la L'-estructura de universo M' = $\{c_1,\ldots,c_n\}$ definida por

$M'(c_i) = c_i$, para $1 \leqslant i \leqslant n$;

$M'(p_j) = \{c_i: v(p_jc_i) = 1\}$, para $1 \leqslant j \leqslant m$.

M' es adecuada. Por el Lema 4.3.5,

$$M'(A) = M'(F(A)) = V(F(A)) = 0$$

Por tanto, A no es válida.

(<===) Supongamos que A no es válida. Entonces ¬A es consistente. Por el Lema 4.3.6, existe una L'-estructura adecuada M' tal que M'(¬A) = 1. Sea v la valoración definida por $v(p_ic_j) = M'(p_ic_j)$ para $i \in \{1,\ldots,m\}$ y $j \in \{1,\ldots,n\}$.

Entonces $V(F(A)) = M'(F(A)) =$ [por la def de $\underline{V}$]

$= M'(A) =$ [por el Lema 4.3.5]

$= 0$

Por tanto, F(A) no es una tautología.

4.3.8.- Teorema

Una sentencia A de L es válida sii G(A) --->* 1.

Demostración

A es válida <===> F(A) es una tautología [por 4.1.14]

<===> ST(F(A)) --->* 1 [por 4.2.7]

<===> G(A) --->* 1 [por 4.2.8]

4.3.9.- Ejemplo

Demostrar que la sentencia

$$(\forall x)p_1x \dashrightarrow (\exists x)p_1x$$

es válida.

Demostración

En este caso, L = $\{p_1\}$, m = 1, r = 0 y n = 2. Añadimos dos constantes y formamos L' = L u $\{c_1, c_2\}$. Sea A la sentencia $(\forall x)p_1x \dashrightarrow (\exists x)p_1x$.

G(A) =

$= G((\forall x)p_1x)G((\exists x)p_1x) + G((\forall x)p_1x) + 1 =$

$= (G(p_1c_1).G(p_1c_2))(G(p_1c_1)+G(p_1c_2)+G(p_1c_1).G(p_1c_2))p_1c_1 +$

$+ (G(p_1c_1).G(p_1c_2)) + 1 =$

$= (X_1X_2)(X_1+X_2+X_1X_2) + (X_1X_2) + 1 =$

$= X_1^2 X_2 + X_1X_2^2 + X_1^2 X_2^2 + X_1X_2 + 1 \dashrightarrow^*$

$\dashrightarrow^* X_1X_2 + X_1X_2 + X_1X_2 + X_1X_2 + 1 =$

$= 1.$

4.3.10.- Ejemplo

Demostrar que la sentencia

$$(\exists x)(\forall y)[p_1x \rightarrow p_1y]$$

es válida.

Demostración

Sean L y L' como en el caso anterior y sea A la sentencia $(\exists x)(\forall y)[p_1x \rightarrow p_1y]$.

$G(A) = G((\forall y)[p_1c_1 \rightarrow p_1y]) + G((\forall y)[p_1c_2 \rightarrow p_1y]) +$

$+ G((\forall y)[p_1c_1 \rightarrow p_1y]).G((\forall y)[p_1c_2 \rightarrow p_1y])$

$G((\forall y)[p_1c_1 \rightarrow p_1y]) =$

$= G(p_1c_1 \rightarrow p_1c_1).G(p_1c_1 \rightarrow p_1c_2).$

$G(p_1c_1 \rightarrow p_1c_1) =$

$= G(p_1c_1).G(p_1c_1) + G(p_1c_1) + 1 =$

$= X_1^2 + X_1 + 1 \dashrightarrow^*$

$$\text{---}>^{*} 1.$$

$$G(p_1c_1 \text{ -> } p_1c_2) =$$

$$= G(p_1c_1).G(p_1c_2) + G(p_1c_1) + 1 =$$

$$= X_1X_2 + X_1 + 1.$$

Luego,

$$G((\forall y)[p_1c_1 \text{ -> } p_1y]) \text{ ---}>^{*} X_1X_2 + X_1 + 1.$$

Análogamente,

$$G((\forall y)[p_1c_2 \text{ -> } p_1y]) \text{ ---}>^{*} X_1X_2 + X_2 + 1.$$

Por tanto,

$$G(A) \text{ ---}>^{*} (X_1X_2 + X_1 + 1) + (X_1X_2 + X_2 + 1) +$$

$$(X_1X_2 + X_1 + 1)(X_1X_2 + X_2 + 1) \text{ ---}>^{*}$$

$$\text{---}>^{*} 1.$$

4.3.11.- Ejemplo

Demostrar que la sentencia

$$(\exists x)p_1x \text{ -> } (\forall x)p_1x$$

no es válida.

Demostración

Sean L y L' como en los ejemplos anteriores y sea A la sentencia $(\exists x)p_1x \text{ -> } (\forall x)p_1x$.

$$G(A) =$$

$$= G((\exists x)p_1x)G((\forall x)p_1x) + G((\exists x)p_1x) + 1 =$$

$$= (G(p_1c_1)+G(p_1c_2)+G(p_1c_1).G(p_1c_2)).(G(p_1c_1).G(p_1c_2) +$$

$$+ (G(p_1c_1)+G(p_1c_2)+G(p_1c_1).G(p_1c_2)) + 1 =$$

$$= (X_1+X_2+X_1X_2)(X_1X_2) + (X_1+X_2+X_1X_2) + 1 \text{ ---}>^{*}$$

$$\text{---}>^{*} X_1+X_2+1$$

que es irreducible. Por tanto, A no es válida.

4.4. CARACTERIZACIÓN ALGEBRAICA DE LA DEDUCCIÓN

4.4.1.- Teorema

Sean $A_1,\ldots, A_s$, B sentencias de L. Las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) $\{A_1,\ldots,A_s\} \models B$.

(2) $G(B)+1 \in (G(A_1)+1,\ldots, G(A_s)+1, X_1^2 + X_1,\ldots, X_{mn}^2 + X_{mn})$

Demostración

$\{A_1,\ldots,A_s\} \models B$ <===>

<===> $\models A_1 \&\ldots\& A_s \to B$

<===> $F(A_1 \&\ldots\& A_s \to B)$ es una tautología [por 4.3.7]

<===> $F(A_1) \& \ldots \& F(A_s) \to F(B)$ es una tautología [por 4.2.1 y 4.2.2]

<===> $ST(F(B)) + 1 \in (ST(F(A_1)) + 1, \ldots, ST(F(A_s)) + 1, X_1^2 + X_1,\ldots, X_{mn}^2 + X_{mn})$ [por 3.1.D.4]

<===> $G(B) + 1 \in (G(A_1) + 1,\ldots, G(A_s) + 1, X_1^2 + X_1,\ldots, X_{mn}^2 + X_{mn})$ [por 4.2.8]

4.4.2.- Ejemplo

Demostrar que

$$\{p_1c_1, \neg p_1c_2\} \models \neg(\forall x)(\forall y)[p_1x \leftrightarrow p_1y].$$

Demostración

Sean A_1, A_2 y B las sentencias p_1c_1, $\neg p_1c_2$ y $\neg(\forall x)(\forall y)[p_1x \leftrightarrow p_1y]$, respectivamente. En este caso $L = \{p_1, c_1, c_2\}$, $m = 1$, $r = 2$, $n = 4$ y $L' = L \cup \{c_3, c_4\}$.

Por 4.4.1, tenemos que probar que

$$G(B)+1 \in (G(A_1)+1, G(A_2)+1, X_1^2 + X_1, \ldots, X_4^2 + X_4)$$

Lo haremos calculando una base de Gröbner, F, del ideal

$(G(A_1)+1,\ G(A_2)+1,\ X_1^2 + X_1,\ \ldots,\ X_4^2 + X_4)$ y comprobando que $G(B)+1 \longrightarrow_F^* 0$.

$$G(A_1) + 1 = G(p_1c_1) + 1 = X_1 + 1$$

$$G(A_2) + 1 = G(\neg p_1c_2) + 1 = G(p_1c_2) = X_2$$

$F = \{X_1 + 1,\ X_2,\ X_3^2 + X_3,\ X_4^2 + X_4\}$ es una base del ideal.

Vamos a calcular la forma normal de G(B)+1 respecto de F.

$$G(B)+1 = G((\forall x)(\forall y)[p_1x \leftrightarrow p_1y]) =$$

$$= \prod_{i=1}^{4} G((\forall y)[p_1c_i \leftrightarrow p_1y])$$

$$= \prod_{i=1}^{4}\prod_{j=1}^{4} G(p_1c_i \leftrightarrow p_1c_j) =$$

$$= \prod_{i=1}^{4}\prod_{j=1}^{4} (G(p_1c_i) + G(p_1c_j) + 1) =$$

$$= \prod_{i=1}^{4}\prod_{j=1}^{4} (X_i + X_j + 1) \longrightarrow^*$$

$$\longrightarrow^* 0,$$

puesto que uno de los factores es $X_1 + X_2 + 1$ que se reduce a 0.

4.4.3.- Corolario

Sea $\{A_1,\ldots,A_s\}$ un conjunto de sentencias de L. Son equivalentes:

(1) $\{A_1,\ldots,A_s\}$ es inconsistente.

(2) $1 \in (G(A_1)+1,\ldots,\ G(A_s)+1,\ X_1^2 + X_1,\ldots,\ X_{mn}^2 + X_{mn})$

4.4.4.- Nota

Los algoritmos de deducción son los mismos que los desarrollados para el cálculo proposicional clásico en 3.1.E.

APÉNDICES

El apéndice A es un programa en LE_LISP versión 15 que contiene los algoritmos para el cálculo proposicional clásico y bases de Gröbner en $Z_2[X_1,\ldots,X_n]$.

El apéndice B es una sesión correspondiente al programa anterior.

```
;APÉNDICE A:
;CÁLCULO PROPOSICIONAL CLÁSICO (PROGRAMA)

;NOTACIONES
;variables globales:
;     variables (por defecto (x y z))
;     axiomas (por defecto ())
;     base (por defecto (((2 0 0)(1 0 0)),... )
;parametros usuales:
;     pol:  polinomio usual  (x 2 y 3 + x y 2 + 1), (0), ...
;     lpol: lista de pol's
;     p   : polinomio como lista de exponentes ((2 3 0)(1 2 0)(0 0 0)), (),..
;     m   : monomio como lista de exponentes  (2 3 0)
;     lp    lista de p's
;Las conectivas que usamos son: - (negación), * (disyunción),& (conjunción),
;     (implicación),(-) (equivalencia)
;definición de formula (1) si p es una variable entonces p es una formula
;                      (2) si f1 y f2 son formulas entonces (- f1), (f1 & f2)
;                          (f1 * f2), (f1 -> f2), (f1 <-> f2) tambien lo son
;criterios para eliminar parentesis:
;   (1) escribir p en lugar de (p)
;   (2) jerarquia de conectivas: <->, ->, &, *, -
;   (3) asociación por la derecha (ej (p & q & r) en lugar de ((p) & ((q) & (
;-----------------------------------------------------------------------------
;FUNCIONES DE LECTURA Y ESCRITURA

(setq variables '(x y z))
      ;el valor por defecto si no se usa leevar
(de leevar ()
      ;lee las variables y calcula la base por defecto al cambiar las variabl
      (print "deme la lista de variables")
      (setq variables (read)
            base (mapcar 'leepol (mapcar '(lambda (a)(list a 2 '+ a))variable
      variables )

(de leepol (pol)
  ;transforma un polinomio usual en lista de exponentes
  (cond
    ((equal pol '(0)) ())
    ((null pol) ())
    (t (cons (mapcar '(lambda (a) (cond ((null a) 0)
                                        ((numberp (cadr a)))
                                        (t 1) ))
                     (mapcar '(lambda (a)
                                (member a
                                        (firstn (- (length pol)
                                                   (length (member '+ pol) )
                                                pol ) ) )
                              variables ) )
             (leepol (cdr (member '+ pol))) )) ) )

(de escribep (p)
      ;inversa de leepol
(if (null p) '(0)
 (cdr (apply
      'append
       (pairlis
        (makelist (length p) '+)
        (mapcar
         '(lambda (l)
           (or (apply 'append (mapcar '(lambda (a)
                                        (cond ((= 0 (cdr a)) ())
                                              ((= 1 (cdr a)) (list (car a)))
                                              (t (list (car a) (cdr a))) ) )
                                      l) )
               '(1)) )
         (mapcar '(lambda (m) (pairlis variables m ())) p) )
```

```
        ()) ))))

(de pp (f)
      ;pone los parentesis de f eliminados por la jerarquia de las conectivas
      (cond ((null f) ())
            ((atom f) f)
            ((= 1 (length f)) (pp (car f)))
            ((member '<-> f)
             (list (pp (firstn (- (length f)(length (member '<-> f))) f))
                   '<->
                   (pp (cdr (member '<-> f)))))
            ((member '-> f)
             (list (pp (firstn (- (length f)(length (member '-> f))) f))
                   '->
                   (pp (cdr (member '-> f)))))
            ((member '& f)
             (list (pp (firstn (- (length f)(length (member '& f))) f))
                   '&
                   (pp (cdr (member '& f)))))
            ((member '* f)
             (list (pp (firstn (- (length f)(length (member '* f))) f))
                   '*
                   (pp (cdr (member '* f)))))
            ((member '- f) (list '- (pp (cdr f))))
            (t 'formula_erronea)))

;-----------------------------------------------------------------------
;ARITMETICA DE POLINOMIOS EN Z2[X1,...,XN]

(de mayor-orden-lex (m1 m2)
      ;t, si m1 > m2 en el orden lexicografico y () en caso contrario
      (cond ((equal m1 m2) ())
            (() (car m1)(car m2)) t)
            ((< (car m1)(car m2)) ())
            (t (mayor-orden-lex (cdr m1) (cdr m2))) ))

(de mayor (m1 m2)
      ;t, si m1 > m2 en el orden diagonal y () en caso contrario
      (let  ((g1 (apply '+ m1))
             (g2 (apply '+ m2)))
            (cond (() g1 g2) t)
                  ((< g1 g2) ())
                  (t (mayor-orden-lex m1 m2)) )))

(de suma (p1 p2)
      ;suma polinomios ordenados por mayor
      (cond ((null p1) p2)
            ((null p2) p1)
            ((equal (car p1)(car p2)) (suma (cdr p1)(cdr p2)))
            ((mayor (car p1)(car p2)) (cons (car p1)(suma (cdr p1) p2)))
            (t (cons (car p2) (suma p1 (cdr p2)))) ) )

(de producto (p1 p2)
      ;multiplica polinomios ordenados por mayor
      (cond ((or (null p1)(null p2)) ())
            (t (suma (mapcar '(lambda (a) (mapcar '* a (car p1))) p2)
                     (producto (cdr p1) p2) )) ) )

;-----------------------------------------------------------------------
;ALGORITMO DE BASE DE GROBNER

(de sp-pc (p1 p2)
      ;Lema 2.6.3
      (lets ((m1 (car p1))(m2 (car p2))(u (mapcar 'max m1 m2)))
            (suma (producto (list (mapcar '- u m1)) p1)
                  (producto (list (mapcar '- u m2)) p2) ) ) )
```

```
(de selector (p lp)
      ;selecciona un sucesor (Lema 2.8.3)
      (suma p
            (any '(lambda (pp)
                    (any '(lambda (m)
                            (if (every '(= (car pp) m)
                                (producto (list (mapcar '- m (car pp))) pp) )
                          p) )
                  lp) ) )

(de fn (p lp)
      ;forma normal de p respecto de lp (Lema 2.8.5)
      (let ((s (selector p lp)))
           (if (equal p s) p (fn s lp))))

(de pares (lp)
      ;los pares no-ordenados de elementos de lp
      (if lp (append (mapcar '(lambda (a) (list (car lp) a)) (cdr lp))
                     (pares (cdr lp)))))

(de lid-prim (par)
      ;0, si los líderes de los elementos de par son primos relativos;
      ;(), si no lo son
      (every 'zerop (mapcar '* (caar par) (caadr par))) )

(de bg (lpol)
    ;base de Grobner del ideal generado por lpol (algoritmo 2.9.3)
    (mapcar 'escribep
       (prog (b g h)
            (setq g (mapcar '(lambda (p) (sort 'mayor p))
                            (mapcar 'leepol lpol))
                  b (pares g))
            etiq1
            (if (null b)(return g))
            (when (lid-prim (car b))(setq b (cdr b))(go etiq1))
            (setq h (fn (apply 'sp-pc (car b)) g) b (cdr b))
            (if (null h) (go etiq1))
            (setq b (append b (mapcar '(lambda (a) (list h a)) g) )
                  g (cons h g) )
            (go etiq1) ) ) )

;-----------------------------------------------------------------------
;BASE DE GROBNER REDUCIDA

(de elimina (l)
      ;elimina las repeticiones y los elementos ()
      (cond ((null l)())
            ((or (null (car l)) (member (car l) (cdr l)))
             (elimina (cdr l)))
            (t (cons (car l) (elimina (cdr l))))))

(de dif (l1 l2)
      ;diferencia de los conjuntos l1 y l2
      (cond ((null l1) ())
            ((member (car l1) l2) (dif (cdr l1) l2))
            (t (cons (car l1) (dif (cdr l1) l2)))))

(de reduce (lp)
    ;da un sistema irreducible de generadores del ideal generado por lp
    (prog (f lpinicial lpreducida)
          (setq f lp)
          etiq1
          (setq lpinicial (copy f) lpreducida ())
          (while f
                 (setq lpreducida (cons (fn (car f)(append lpreducida (cdr f)
                                                           lpreducida)
                       f (cdr f)))
          (setq lpreducida (reverse (elimina lpreducida)))
```

```
          (if (equal lpinicial lpreducida) lpreducida
              (setq f (copy lpreducida))
              (go etiq1))))

(de bg-r (lpol)
    ;base de Grobner reducida del ideal generado por lpol
    (mapcar 'escribep
     (reduce
      (prog (b g h)
            (setq g (reduce (mapcar '(lambda (p) (sort 'mayor p))
                                    (mapcar 'leepol lpol)))
                  b (pares g))
            etiq1
            (if (null b)(return g))
            (when (lid-prim (car b))(setq b (cdr b))(go etiq1))
            (setq h (fn (apply 'sp-pc (car b)) g)
                  b (cdr b))
            (if (null h) (go etiq1))
            (setq b (append b (mapcar '(lambda (a) (list h a)) g) )
                  g (cons h g) )
            (go etiq1) ) ) ) )

;-----------------------------------------------------------------------
;DEDUCCIÓN

(de st1 (f)
      ;polinomio correspondiente a la formula f (escrita sin suprimir parente
      (cond ((atom f) (leepol (list f)))
            ((equal (car f) '-)(suma (st1 (cadr f))(leepol '(1))))
            ((equal (cadr f) '&)(producto (st1 (car f))(st1 (caddr f))))
            ((equal (cadr f) '#)(suma (suma (st1 (car f))(st1 (caddr f)))
                                      (producto (st1 (car f))(st1 (caddr f)))
            ((equal (cadr f) '->)(suma (producto (st1 (car f))(st1 (caddr f))
                                       (suma (st1 (car f))(leepol '(1)))))
            ((equal (cadr f) '<->)(suma (suma (st1 (car f))(st1 (caddr f)))
                                        (leepol '(1))))
            (t (print "formula erronea"))))

(de st (f) (st1 (pp f)))
      ;polinomio correspondiente a la formula f

(setq axiomas () ;el valor por defecto si no se usa leeax
      base (mapcar 'leepol (mapcar '(lambda (a) (list a 2 '+ a)) variables) )

(de leeax ()
      ;lee los axiomas y calcula la base
      (print "deme la lista de axiomas")
      (setq axiomas (eval (read))
            base (mapcar 'leepol
                    (let ((ff (mapcar '(lambda (a) (list a 2 '+ a)) variables
                          (if (null axiomas)  ff
                              (bg-r


             (append
                                          (mapcar '(lambda (f)
                                                     (escribep (st (list '- f))
                                                  axiomas)
                                        ff))))))
      axiomas)

(de esde (f)
      ;determina si f es deducible (Algoritmo 3.1.E.1)
      (if (null (fn (st (list '- f)) base))
          'es_deducible
          'no_es_deducible))
```

APÉNDICE B:
CÁLCULO PROPOSICIONAL CLÁSICO (SESIÓN)

```
? ;EJEMPLO 2.8.9: Calcular una base de Gröbner del ideal de
? ;de Z2[a,b,c,d] generado por
? ;{bd + b + d + 1, cd + d, ab + b}
?
? (leevar)
deme la lista de variables
? (a b c d)
= (a b c d)
? (bg '((b d + b + d + 1) (c d + d) (a b + b)))
= ((a c + a + c + 1) (a d + a + d + 1) (b c + b + c + 1)
(b d + b + d + 1) (c d + d) (a b + b))
? (bg-r '((b d + b + d + 1) (c d + d) (a b + b)))
= ((a c + a + c + 1) (a d + a + d + 1) (b c + b + c + 1)
(b d + b + d + 1) (c d + d) (a b + b))
? ;-----------------------------------------------------
? ; EJEMPLO 3.1.C.8: Estudiar la validez de la fórmula
? ; (x1 -> x2) v (x2 -> x1)
?
? (leevar)
deme la lista de variables
? (x1 x2)
= (x1 x2)
? (esde '((x1 -> x2) * (x2 -> x1)))
= es_deducible
```

```
? ;el polimomio asociado por ST a la fórmula anterior es
? (escribep (st '((x1 -> x2) * (x2 -> x1))))
= (x1 2 x2 2 + x1 2 x2 + x1 x2 2 + x1 x2 + 1)
? ;-----------------------------------------------------------
? ;EJEMPLO 3.1.C.10: Estudiar la validez de la fórmula
? ;(x1 <-> x2) & (x1 <-> ¬ x2)
?
? (esde '((x1 <-> x2) & (x1 <-> - x2)))
= no_es_deducible
? ;el polimomio asociado por ST a la fórmula anterior es
? (escribep (st '((x1 <-> x2) & (x1 <-> - x2))))
= (x1 2 + x2 2 + x1 + x2)
? ;la forma irreducible del polinomio anterior es
? (escribep (fn (st '((x1 <-> x2) & (x1 <-> - x2))) base))
= (0)
? ;por tanto, la fórmula es una contradicción
? ;-----------------------------------------------------------
? ;EJEMPLO 3.1.C.13: Estudiar la validez de la fórmula
? ;(x1 <-> x2) & (x1 <-> x3)
?
? (leevar)
deme la lista de variables
? (x1 x2 x3)
= (x1 x2 x3)
? (esde '((x1 <-> x2) & (x1 <-> x3)))
= no_es_deducible
```

```
? ;el polimomio asociado por ST a la fórmula anterior es
? (escribep (st '((x1 <-> x2) & (x1 <-> x3))))
= (x1 2 + x1 x2 + x1 x3 + x2 x3 + x2 + x3 + 1)
? ;la forma irreducible del polinomio anterior es
? (escribep (fn (st f13) base))
= (x1 x2 + x1 x3 + x2 x3 + x1 + x2 + x3 + 1)
? ;por tanto, la fórmula es contingente; un modelo es
? ;v(x1) = v(x2) = v(x3) = 0 y un contramodelo es
? ;v'(x1) = v'(x2) = 0, v'(x3) = 1
? ;-----------------------------------------------------------
? ;EJEMPLO 3.1.E.2: Dado el conjunto de axiomas
? ;AX = {a -> b, b -> e, c v d, ¬ (c & d)}, decidir si las
? ;fórmulas Q1 = ¬e -> ¬a & ¬b y Q2 = a -> (b <-> c) son
? ;consecuencias de AX.
?
? (leevar)
deme la lista de variables
? (a b c d e)
= (a b c d e)
? (leeax)
deme la 'lista de axiomas
? '((a -> b)(b -> e)(c * d)(- (c & d)))
= ((a -> b) (b -> e) (c * d) (- (c & d)))
? (esde '(- e -> (- a & - b)))
= es_deducible
? (esde '(a -> (b <-> c)))
= no_es_deducible
?
```

```
? ;la base de Gröbner de correspondiente al conjunto de
? ;axiomas anterior es
? (mapcar 'escribep base)
= ((a e + a) (a b + a) (b e + b) (c + d + 1) (a 2 + a)
(b 2 + b) (d 2 + d) (e 2 + e))
? ;la forma irreducible de ST(Q2) respecto de la base
? ;anterior es
? (escribep (fn (st '(a -> (b <-> c))) base))
= (a d + 1)
? ;por tanto, la formula (a -> (b <-> c)) es equivalente
? ;respecto de AX con la formula ¬(a & d). Vamos a
? ;comprobarlo
? (esde '((a -> (b <-> c)) <-> - (a & d)))
= es_deducible
? ;-----------------------------------------------------
? ;EJEMPLO 3.1.E.5: Decidir la consistencia del siguiente
? ;conjunto de axiomas
? ;{b -> a & b, ¬ c v b, ¬ a v ¬ d, c & d}
?
? (leevar)
deme la lista de variables
? (a b c d)
= (a b c d)
? (leeax)
deme la 'lista de axiomas
? '((b -> a & b)(- c * b)(- a * - d)(c & d))
= ((b -> a & b) (- c * b) (- a * - d) (c & d))
```

```
? ;la base de Gröbner correspondiente al conjunto de axiomas
? ;anterior es
? (mapcar 'escribep base)
= ((1))
? ;por tanto, el conjunto de axiomas es inconsistente
? ;-----------------------------------------------------
? ;EJEMPLO 3.1.E.9: Decidir la equivalencia de los siguien-
? ;tes conjuntos de fórmulas:
? ;AX  = {¬ e -> ¬ a & ¬ b & (c v d), a & (¬ b v ¬ c) -> d,
? ;        ¬ b -> - a, c <-> ¬ d}
? ;AX' = {a -> b, b -> e, c v d, ¬ (c & d)}
? (leevar)
deme la lista de variables
? (a b c d e)
= (a b c d e)
? (leeax)
? '((- e -> - a & - b & (c * d)) (a & (- b * - c) -> d)
(- b -> - a) (c <-> - d))
= ((- e -> - a & - b & (c * d)) (a & (- b * - c) -> d)
(- b -> - a) (c <-> - d))
? ;la base de Gröbner correspondiente a AX es
? (mapcar 'escribep base)
= ((a e + a) (b e + b) (a b + a) (c + d + 1) (a 2 + a)
(b 2 + b) (d 2 + d) (e 2 + e))
? (leeax)
deme la 'lista de axiomas
? '((a -> b)(b -> e)(c * d)(- (c & d)))
= ((a -> b) (b -> e) (c * d) (- (c & d)))
```

```
? ;la base de Gröbner correspondiente a AX' es
? (mapcar 'escribep base)
= ((a e + a) (a b + a) (b e + b) (c + d + 1) (a 2 + a)
(b 2 + b) (d 2 + d) (e 2 + e))
? ;puesto que coincide con la base anterior, AX y AX' son
? ;equivalentes
```

BIBLIOGRAFIA

ACKERMAN, R.

[1967] *Introduction to Many Valued Logics*
Routledge & Kegan Paul Ltd.

ALONSO, J.A.; BRIALES, E. Y RISCOS, A.

[19--] Demostración automática de teoremas en lógicas no-clásicas.
Congress on Computational Geometry and Topology and Computation in Teaching Mathematics, Sevilla, Septiembre 1986.

BOOLOS, G. y JEFFREY, R.

[1974] *Computability and Logic*
Cambridge University Press.

BUCHBERGER, B.

[1979] A Criterion for Detecting Unnecessary Reductions in the Construction of Gröbner-Bases.
Proc. EUROSAM 79, Marseille, June 1979, (ed. W. Ng), Springer-Verlag.
LNCS Vol. 72, pp. 3-21.

[1985] Basic Features and Development of the Critical-pair/completion procedure.
Proc. 1st Conf. on Rewriting Techniques and Applications, Dijon, May 1985 (ed. J.P. Jouannaud), Springer-Verlag.
LNCS Vol. 202, pp. 1-45.

[1985] Gröbner-Bases: An Algorithmic Method in Polynomial Ideal Theory.
Recent Trends in Multidimensional Systems theory (ed. N.K. Bose), Reidel, pp. 184-231.

BUCHBERGER, B. y LOOS, R.

[1982] Algebraic Simplification
Computer Algebra: Symbolic and Algebraic Computation, (ed. B. Buchberger, G.E. Collins y R. Loos), Springer-Verlag, pp. 11-43.

CAVINESS, B.F.

[1985] Computer Algebra: Past and Future
Journal of Symbolic Computation, Vol 2 (1986), pp. 217-236

CHAILLOUX, J.

[1985] *Le_Lisp de l'INRIA. Version 15. Manuel de référence*

CHANG, C.L. y LEE, R.C.T.

[1983] *Symbolic Logic and Mechanical Theorem Proving*
Academic Press.

CHAZARAIN, J.

[1986] The Lady, the Tiger and the Gröbner Basis.
Prepublication de l'Université de Nice, nº 100.

CHAZARAIN, J. y RISCOS, A.

[19--] Multivalued Logic and Gröbner Basis (with application to modal logic).
No publicado.

DUNHAM, B. y WANG, H.

[1976] Towards Feasible Solutions of th Tautology Problem
Annals of Mathematical Logic, Vol 10 (1976), pp. 117-154.

HSIANG, J.

[1985] Refutational Theorem Proving Using Term-Rewriting Systems.
Artificial Intelligence, Vol 25 (1985), pp 255-300

[1985] Two Results in Term Rewriting Theorem Proving.
Proc. 1st Conf. on Rewriting Techniques and Applications, Dijon, May 1985 (ed. J.P. Jouannaud), Springer-Verlag.
LNCS Vol. 202, pp. 301-324.

HSIANG, J. y DERSHOWITZ, N.

[1983] Rewrite Methods for Clausal and Non-clausal Theorem Proving.
Proc. ICALP 83, 10th Colloquium, Barcelona, Springer-Verlag.
LNCS Vol. 154, pp. 331-346.

HUET, G.

[1980] Confluent Reductions: Abstract Properties and Applications to Term Rewriting Systems.
Journal of the Association for Computing Machinery Vol 27 (1980), pp. 797-821.

[1986] Deduction and Computation
Fundamentals of Artificial Intelligence (ed. W. Bibel y Ph. Jorrand), Springer-Verlag, pp. 39-74

HUET, G. y OPPEN, D.C.

[1980] Equations and Rewrite Rules.
Formal Language Theory: Perspective and Open Problems (ed. R.V. Book), Academic Press, pp. 345-405.

JOUANNAUD, J.P. y LESCANNE,P.

[1986] La Réécriture
Technique et Science Informatiques, Vol 5, no 6, pp. 433-452.

KANDRY-RODY, A. y KAPUR, D.

[1984] Algorithms for Computing Gröbner Bases for Polynomials over various Euclidean Rings.
Proc. EUROSAM 84, Cambridge (ed. J. Fitch), Springer-Verlag.
LNCS Vol 174, pp. 195-206.

[1984] Computing the Gröbner Basis of an Ideal in Polynomial Rings over the Integers.
3rd MACSYMA Users Conf., Schenectady, New York.

KAPUR, D. y NARENDRAM,

[1985] An Equational Approach to Theorem Proving in First-Order Predicate Calculus.
Rep. no. 84CRD322, General Electric, Schenectady, New York.

KNUTH, E. y BENDIX, B.

[1970] Simple Word Problem in Universal Algebra.
Proc. of the Conf. on Computational Problems in Abstract Algebra, Oxford (ed. J. Leech), Pergamon Press, pp. 263-298.

KÜCHLIN, W.

[1985] A Confluence Criterion Based on the Generalised Newman Lemma.
Proc. EUROCAL 85, Linz, (ed. B.F. Caviness) Springer-Verlag.
LNCS Vol 204, pp. 390-399.

LOOS, R.

[1983] Introducción (Computer Algebra Symbolic and Algebraic Computation)
Computer Algebra: Symbolic and Algebraic Computation, (ed. B. Buchberger, G.E. Collins y R. Loos), Springer-Verlag, pp. 11-43.

LOVELAND, D.W.

[1978] *Automated Theorem Proving: A Logical Basis.*
North-Holland.

[1983] Automated Theorem Proving: A Quarter Century Review.
Automated Theorem Proving: After 25 Years (ed. W.W. Bledsoe y D:W: Loveland), American Mathematical Society.
Contemporary Mathematics, Vol 29, pp. 1-46.

MOISIL, GR.C.

[1969] *The Algebraic Theory of Switching Circuits*
Pergamon Press.

MUSSER, D.R. y KAPUR, D.

[1982] Rewrite Rules Theory and Abstract Data Type Analysis.
Proc. EUROCAM 82, Marseille (ed. J. Calmet), Springer-Verlag.
LNCS Vol 144, pp. 77-90.

QUEINNEC,C.

[1984] *LISP, mode d'emploi*
Eyrolles.

RESCHER, N.

[1969] *Many-valued Logic*
McGraw-Hill.

ROBINSON, J.A.

[1965] A Machine-Oriented Logic Based on the Resolution Principle.
Journal of the Association for Computing Machinery Vol 12 (1965), pp. 23-41.

ROY, J-P y KIREMITDJIAN, g

[1985] *Lire LISP (le langage de l'intelligence artificielle.*
Cedic Nathan.

SCHOENFIELD, J.R.

[1967] *Mathematical Logic*
Addison Wesley.

SIEKMANN,J. y WRICHTSON, G. (Eds.)

[1983] *The Automation of Reasoning,* Vol I y II.
Springer-Verlag.

TURNER, R.

[1984] *Logics for Artificial Intelligence.*
Ellis Horwood Limited.

WATTS, D.E. y COHEN, J.K.

[1980] Computer-Implemented Set Theory.
Amer. Math. Monthly, Vol 87 (7), pp. 557-560.

WINKLER, F. y BUCHBERGER, B.

[1983] A Criterion for Eliminating Unnecessary Reductions in the Knuth-Bendix Algorithm.
Proc. Colloquium on Algebra, Combinatorics and Logic in Computer Science, Györ, 1983, Colloquia Mathematica Societatis J. Bolyai, J. Bolyai Math. and North-Holland.

WOS, L.

[1985] Automated Reasoning.
Amer. Math. Monthly, Vol 92 (1985), pp. 85-92.

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Reunido el Tribunal designado por los abajo firmantes en el día de la fecha, para juzgar la Tesis Doctoral de D. José Antonio Alonso Jiménez titulada Métodos algebraicos de razonamiento automático acordó otorgarle la calificación de APTO CUM LAUDE

Sevilla, 5 de julio 1.9 89

El Vocal, El Vocal, El Vocal,

El Presidente El Secretario, El Doctorado,