Ejercicios de “Teoría de conjuntos”

José A. Alonso Jiménez
Mario J. Pérez Jiménez
Sevilla, Octubre de 1993

Dpto. de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial
UNIVERSIDAD DE SEVILLA

TEORÍA DE CONJUNTOS

Álgebra II– Segundo cuatrimestre. Curso 93–94.

Tema 1 : Conjuntos y clases

1.- Demostrar que $\neg(\exists y)(\forall x)[x \in y \leftrightarrow \neg(\exists z)[x \in z \wedge z \in x]$.

2.- Demostrar que la clase $\{x : \neg(\exists z)[x \in z \wedge z \in x]\}$ es propia.

3.- Probar que para cada conjunto x, existe alg£n y tal que $y \notin x$.

4.- Se definen $0 = \emptyset$, $1 = 0 \cup \{0\}$, $2 = 1 \cup \{1\}$, $3 = 2 \cup \{2\}$.

1. Probar que $0, 1, 2, 3$ son conjuntos.
2. Sea $x = \{\{\{1, 2\}, \{1\}\}, \{2\}\}$. Calcular:

$$\bigcup x, \qquad \bigcup\bigcup x, \qquad \bigcap x, \qquad \bigcap\bigcap x, \qquad \bigcap\bigcup x, \qquad \bigcup\bigcap x$$

3. Sea $x = \{1, 2\}$. Calcular:

$$\bigcup\bigcup x, \qquad \bigcap\bigcap x, \qquad \left(\bigcap\bigcup x\right) \cup \left(\bigcup\bigcup x - \bigcup\bigcap x\right), \qquad \bigcup\left(\bigcup x - \bigcap x\right)$$

5.- Demostrar que:
(1) $b \in a \to \cap a \subseteq b \subseteq \cup a$ (2) $a \subseteq b \to \cup a \subseteq \cup b$ (3) $(\forall c \in a)[c \subseteq b] \to \cup a \subseteq b$

6.- Demostrar que

1. $\bigcup(a \cup b) = (\bigcup a) \cup (\bigcup b)$.
2. Si a y b son no conjuntos vac¡os, entonces $\bigcap(a \cup b) = (\bigcap a) \cap (\bigcap b)$. ¨Qu podemos asegurar si a **?** b es el conjunto vacio?

7.- Sea $a \neq \emptyset$. Demostrar que:
(1) $\bigcap\{b \cup c : b \in a\} = c \cup (\bigcap a)$ (2) $\bigcup\{b \cap c : b \in a\} = c \cap (\bigcup a)$

8.- Sean a y b conjuntos. Estudiar en qu condiciones es cierta la siguiente igualdad:

$$a \cup (\bigcup b) = \bigcup\{a \cup c : c \in b\}$$

9.- Probar que si a, b y c son conjuntos, entonces:

$$\begin{array}{ll}
a \cup a = a \cap a = a & a \cup b = b \cup a \quad a \cap b = b \cap a \\
a \cup (b \cup c) = (a \cup b) \cup c & a \cap (b \cap c) = (a \cap b) \cap c \\
a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c) & a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c) \\
a \cap (a \cup b) = a \cup (a \cap b) = a & (a - b) - c = a - (b \cup c) \\
c - (a \cap b) = (c - a) \cup (c - b) & c - (a \cup b) = (c - a) \cap (c - b) \\
a - (b - c) = (a - b) \cup (a \cap c) & (a \cup b) - c = (a - c) \cup (b - c)
\end{array}$$

10.- Sean a, b y c conjuntos tales que $a \cup b = a \cup c$ y $a \cap b = a \cap c$. Demostrar que $b = c$.

11.- Sean a y b dos conjuntos. Se define la diferencia simtrica de a y b como sigue:

$$a \triangle b = (a - b) \cup (b - a)$$

Probar que:

1. $a \triangle b$ es un conjunto
2. $a \triangle b = (a \cup b) - (a \cap b)$
3. $a \triangle b = b \triangle a$ [Conmutativa]
4. $a \triangle (b \triangle c) = (a \triangle b) \triangle c$ [Asociativa]
5. $a \cap (b \triangle c) = (a \cap b) \triangle (a \cap c)$ [Distributiva]
6. $a \triangle \emptyset = a$ [Elemento neutro]
7. $a \triangle a = \emptyset$ [Elemento simtrico]
8. $a \triangle b = c \triangle b \quad \Longrightarrow \quad a = c$ [Cancelativa]
9. $a \triangle b = \emptyset \quad \Longrightarrow \quad a = b$
10. $(a \cup c) \triangle (b \cup c) = (a \triangle b) - c$
11. $a \cup c = b \cup c \quad \Longrightarrow \quad a \triangle b \subseteq c$
12. $(\forall a)(\forall b)(\exists! c)[a \triangle c = b]$
13. a, b disjuntos $\quad \Longrightarrow \quad a \cup b = a \triangle b$
14. $a \cup b = a \triangle b \triangle (a \cap b)$

12.- Sea a un conjunto no vac¡o. Estudiar en qu condiciones, las siguientes clases son propias:

1. $\{x : (\exists y)[y \in a \wedge x \notin y]\}$
2. $\{x : (\exists y)(\exists z)[y \in a \wedge z \in y \wedge x \notin z]\}$

13.- Sean a y b conjuntos. Probar que : $a \subseteq b \Longleftrightarrow a \cup b = b \Longleftrightarrow a \cap b = a \Longleftrightarrow a - b = \emptyset$.

14.- Calcular:

1. $\mathbf{P}(0)$, $\mathbf{P}(\mathbf{P}(0))$, $\mathbf{P}(\mathbf{P}(\mathbf{P}(0)))$.
2. $\mathbf{P}(1)$, $\mathbf{P}(\mathbf{P}(1))$, $\bigcap\{\mathbf{P}(1), \mathbf{P}(\mathbf{P}(1)), \mathbf{P}(\mathbf{P}(\mathbf{P}(1)))\}$.
3. $\mathbf{P}(2)$, $\mathbf{P}(\mathbf{P}(2))$.
4. $\bigcap \bigcup (\mathbf{P}(2) - 2)$.

15.- Probar que :

1. $\bigcup \mathbf{P}(a) = a$.
2. $a \subseteq \mathbf{P}(\bigcup a)$. ¨Cu?ndo se verifica la igualdad?.
3. Si $a \in b$, entonces $\mathbf{P}(a) \in \mathbf{P}(\mathbf{P}(\cup b))$.
4. $\mathbf{P}(a) = \mathbf{P}(b) \quad \Longleftrightarrow \quad a = b$.
5. No existe un conjunto a tal que $\mathbf{P}(a) \subseteq a$.

16.- Demostrar que :

1. si $a \neq \emptyset$, entonces $\mathbf{P}(\bigcap a) = \bigcap\{\mathbf{P}(c) : \ c \in a\}$.
2. $\bigcup\{\mathbf{P}(c) : \ c \in a\} \subseteq \mathbf{P}(\cup a)$. ¨Cu?ndo se verifica la igualdad?

17.- Sean a y b conjuntos. Demostrar que las siguientes clases son conjuntos:
(1) $\{\{\{c\}\} : c \in a \cup b\}$ (2) $\{a \cup c : c \in b\}$ (3) $\{\mathbf{P}(c) : c \in a\}$ (4) $\{c \cup d : c \in a \wedge d \in b\}$

Tema 2 : Relaciones y aplicaciones

18.- Sean a y b conjuntos. Probar que:

1. $\bigcap\bigcap\langle a, b\rangle = a = \bigcap\bigcap\bigcap\{\langle a, b\rangle\}$.
2. $a \neq b \quad \Longrightarrow \quad \bigcap(\bigcup\langle a, b\rangle - \bigcap\langle a, b\rangle) = b$.
3. $(\bigcap\bigcup\langle a, b\rangle) \cup (\bigcup\bigcup\langle a, b\rangle - \bigcup\bigcap\langle a, b\rangle) = b$.
4. $(\bigcap\bigcup\langle a, b\rangle) \cup (\bigcup\bigcup\langle a, b\rangle - \bigcap\bigcup\langle a, b\rangle) = a \cup b$.

19.- Demostrar que $\{z : (\exists x)(\exists y)[z = \langle x, y\rangle]\}$ es una clase propia.

20.- Si a, b y c son conjuntos, probar que:

1. $a \times (b \cup c) = (a \times b) \cup (a \times c)$
2. $a \times (b - c) = (a \times b) - (a \times c)$
3. $a \times (b \cap c) = (a \times b) \cap (a \times c)$

21.- Dar ejemplos de conjuntos a, b, c tales que

1. $a \times b \neq b \times a$
2. $a \times (b \times c) \neq (a \times b) \times c$
3. $a \cup (b \times c) \neq (a \cup b) \times (a \cup c)$

22.- Sea $a \neq \emptyset$. Probar que : $b \subseteq c \iff a \times b \subseteq a \times c \iff b \times a \subseteq c \times a$

23.- Probar que :

1. $a \times a = b \times b \quad \iff \quad a = b$.
2. Si $a \times b = a \times c$ y $a \neq \emptyset$, entonces $b = c$.

24.- Sean a y b conjuntos. Probar que $\{\{z\} \times b : z \in a\}$ es un conjunto.

25.- Demostrar que si x es un conjunto, entonces $\{r : r$ es una relaci?n en $x\}$ es un conjunto.

26.- Probar que:

1. $(a \cup b)^{-1} = a^{-1} \cup b^{-1}$
2. $(a \cap b)^{-1} = a^{-1} \cap b^{-1}$
3. $(a - b)^{-1} = a^{-1} - b^{-1}$

27.- Probar que $(r \circ s)^{-1} = s^{-1} \circ r^{-1}$.

28.- Calcular todos los pares ordenados de $\mathbf{P}(2)$, y el conjunto $\mathbf{P}(2)^{-1} \circ (\mathbf{P}(2) \restriction 1)$.

29.- Demostrar que :

1. $r \restriction a = r \cap (a \times \text{rango}(r))$
2. $r \restriction (b \cup c) = (r \restriction b) \cup (r \restriction c)$

30.- Demostrar que $A = \{f : f$ es una aplicaci?n$\}$ es una clase propia.

31.- Sean a y b conjuntos y F una función. Probar que:

1. $F^{-1}[\cup a] = \bigcup\{F^{-1}[c] : c \in a\}$.
2. $a \neq \emptyset \quad \Longrightarrow \quad F^{-1}[\cap a] = \bigcap\{F^{-1}[c] : c \in a\}$.
3. $F^{-1}[a - b] = F^{-1}[a] - F^{-1}[b]$.

Tema 3 : Relaciones de orden

32.- Determinar si las siguientes relaciones son ?rdenes parciales, ?rdenes totales o buenos ?rdenes en A.

1. $xRy \iff x < y$, siendo $A = \omega$ o bien $A = \mathbb{Z}$.
2. $A = \omega, \quad xRy \iff (x \text{ divide a } y) \wedge x \neq y$.
3. $R = \emptyset$, siendo $A = \emptyset$ o bien $A \neq \emptyset$.
4. $A = 2^{\omega}, \quad fRg \iff \exists n \in \omega\ [f(n) < g(n) \wedge\ \forall m < n\ (f(m) = g(m))]$.

33.- En $\mathbf{P}(\omega)$ definimos la relaci?n R como sigue: $aRb \Longleftrightarrow \exists n \in \omega\ (n \cap a = n \cap b \wedge n \in a \wedge n \notin b)$. Probar que $\langle P(\omega), R\rangle$ es un conjunto totalmente ordenado, pero no bien ordenado.

34.- Consideremos la aplicaci?n $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida como sigue :

$$f(n) = \begin{cases} n \text{ si } n \leq 1 \\ \text{n£mero de factores primos de } n \text{ si } n > 1 \end{cases}$$

Sea $<$ la ordenaci?n usual de $\mathbb{N}$ y consideremos la relaci?n R definida por :

$$pRq \Longleftrightarrow f(p) < f(q) \vee (f(p) = f(q) \wedge p < q)$$

1. Probar que $\langle \omega, R\rangle$ es un conjunto bien ordenado.
2. Demostrar que $\langle \omega <\rangle \ncong \langle \omega R\rangle$.

35.- Sean A y B conjuntos, $S \subseteq B \times B$, $F : A \to B$ una aplicaci?n inyectiva y S la relaci?n definida en A por: $xRy \Longleftrightarrow F(x)SF(y)$. Demostrar que si S es un orden parcial (respectivamente, total o buen orden) en B, entonces R es un orden parcial (respectivamente, total o buen orden) en A.

36.- Sean $\langle A, R\rangle$ y $\langle B, S\rangle$ dos conjuntos bien ordenados tales que $A \cap B = \emptyset$. Sea $R \oplus S = R \cup S \cup (A \times B)$. Demostrar que $\langle A \cup B, R \oplus S\rangle$ es un conjunto bien ordenado. $[\![$ diremos que $R \oplus S$ es la ordenaci?n **suma lexicogr?fica** de R y S y notaremos $\langle A \cup B, R \oplus S\rangle = \langle A, R\rangle \oplus \langle B, S\rangle]\!]$

37.- Sean $\langle A, R\rangle, \langle B, S\rangle, \langle C, T\rangle$ conjuntos bien ordenados.

1. Probar que si los conjuntos A, B, C son disjuntos dos a dos, entonces
$$[\langle A, R\rangle \oplus \langle B, S\rangle] \oplus \langle C, T\rangle = \langle A, R\rangle \oplus [\langle B, S\rangle \oplus \langle C, T\rangle]$$
2. Sean $\langle A_1, R_1\rangle, \langle B_1, S_1\rangle$ conjuntos bien ordenados tales que $A \cap B = \emptyset = A_1 \cap B_1$ y
$$\langle A, R\rangle \cong \langle A_1, R_1\rangle \text{ y } \langle B, S\rangle \cong \langle B_1, S_1\rangle$$
Probar que $\langle A \cup B, R \oplus S\rangle \cong \langle A_1 \cup B_1, R_1 \oplus S_1\rangle$.

38.- Sean $\langle A, R\rangle$ y $\langle B, S\rangle$ dos conjuntos bien ordenados. Definimos la relaci?n $R \otimes S$ en el conjunto $A \times B$ como sigue: $< x, y > R \otimes S < z, t > \Longleftrightarrow ySt \vee (y = t \wedge xRz)$. Demostrar que $\langle A \times B, R \otimes S\rangle$ es un conjunto bien ordenado. $[\![$ diremos que $R \otimes S$ es la ordenaci?n **producto lexicogr?fico hebreo** de R y S y notaremos $\langle A \times B, R \otimes S\rangle = \langle A, R\rangle \otimes \langle B, S\rangle]\!]$

39.- Sean $\langle A, R\rangle, \langle B, S\rangle, \langle A_1, R_1\rangle, \langle B_1, S_1\rangle$ conjuntos bien ordenados tales que

$$\langle A, R\rangle \cong \langle A_1, R_1\rangle \text{ y } \langle B, S\rangle \cong \langle B_1, S_1\rangle$$

Probar que $\langle A \otimes B, R \otimes S\rangle \cong \langle A_1 \otimes B_1, R_1 \otimes S_1\rangle$.

40.- Sean $\langle a, <\rangle$ un conjunto totalmente ordenado y $A = \{s \subseteq a : s \text{ segmento de } a\}$. Probar que:

1. $s, s' \in A \quad \Longrightarrow \quad s \subseteq s' \vee s' \subseteq s.$

2. $x, y \in a \wedge x \neq y \quad \Longrightarrow \quad \exists s \in A\ [(x \in s \wedge y \notin s) \vee (x \notin s \wedge y \in s)]$

3. $b \subseteq A \quad \Longrightarrow \quad \bigcup b \in A.$

4. $b \subseteq A \quad \Longrightarrow \quad a \cap (\bigcap b) \in A.$

41.- Sea $B \subseteq \mathbf{P}(A)$ tal que:

$$\begin{array}{l} \forall s, s' \in B\ (s \subseteq s' \vee s' \subseteq s) \\ \forall x, y \in A\ [x \neq y \rightarrow \exists s \in B\ [(x \in s \wedge y \notin s) \vee (x \notin s \wedge y \in s)] \end{array}$$

1. Probar que existe una £nica relaci?n de orden total, $<$, sobre A tal que:

$$\forall s \in B\ (s \text{ es un segmento de } \langle A, < \rangle)$$

2. Supongamos que $C \subseteq B \quad \Longrightarrow \quad \bigcup C \in B$ y $C \subseteq B \quad \Longrightarrow \quad A \cap (\bigcap C) \in B$. Probar que, si $<$ es la relación de orden total sobre A considerada en el apartado (1), entonces $A = \{s : s \text{ es un segmento de } \langle A, < \rangle\}$.

3. Buscar ejemplos que prueben que las condiciones (2.a) y (2.b) son necesarias para la igualdad anterior.

42.- Para cada una de las siguientes condiciones, hallar un conjunto totalmente ordenado $\langle A < \rangle$ que la verifique.

1. A tiene un segmento inicial B tal que $A \neq B$ y B no es una secci?n inicial de A.

2. Existe una aplicaci?n $F : A \rightarrow A$ creciente tal que $F(x) < x$, para alg£n $x \in A$.

3. Existe $x \in A$ tal que $\langle A < \rangle \ \cong\ \langle A_x < \rangle$.

4. Existe $F : \langle A < \rangle \ \cong\ \langle A < \rangle$ tal que $F \neq I_A$.

43.- Demostrar que :

1. Si $a \times a$ es un conjunto bien ordenable, entonces a tambin lo es.

2. Si $\mathbf{P}(a)$ es un conjunto bien ordenable, entonces a tambin lo es.

Tema 4 : Ordinales

44.- Sea a un conjunto transitivo. Probar que los conjuntos $\bigcup a$ y $\mathbf{P}(a)$ tambin son transitivos. ¨Puede afirmarse que si $\bigcup a$ o $\mathrm{P}(a)$ es transitivo, lo sea el conjunto a?

45.- Sea a un conjunto. Demostrar que: a es transitivo $\Longleftrightarrow \bigcup a^{+} = a$.

46.- Dar ejemplos de: (1) Un conjunto transitivo que no sea un ordinal. (2) Un conjunto bien ordenado por la relaci?n de pertenencia que no sea un ordinal.

47.- Demostrar que si a es un conjunto, entonces son equivalentes:

1. a es un ordinal.

2. $\in_a$ es un buen orden en a y $\forall x \in a\ (x = \{y \in a : y \in x\})$.

3. Existe un buen orden R en a tal que $\forall x \in a\ (x = \{y \in a : yRx\})$.

4. $\subset_a = \{< x, y > \in a \times a : x \subset y\}$ es un buen orden en a y $\forall x \in a\ (x = \{y \in a : y \subset x\})$.

48.- Demostrar que si α y β son ordinales tales que $\alpha < \beta$, entonces $\alpha^+ < \beta^+$.

49.- Sean a , $b \subseteq$ Ord. Demostrar que si $\forall \alpha \in a \exists \beta \in b\ (\alpha < \beta)$, entonces $\bigcup a \in \bigcup b$ **?** $\bigcup a = \bigcup b$.

Tema 5 : Clases bien ordenadas y ordinales

50.- Sean a y b conjuntos. Usando el axioma de reemplazamiento, probar que las siguientes clases son conjuntos:
(1) $\{\{\{c\}\} : c \in a \cup b\}$ (2) $\{a \cup c : c \in b\}$ (3) $\{\mathbf{P}(c) : c \in a\}$ (4) $\{c \cup d : c \in a \wedge d \in b\}$

51.- Demostrar que si F es una aplicaci?n, entonces F es un conjunto si y s?lo s¡ dom(F) es un conjunto.

52.- Sea F una aplicaci?n. Demostrar o refutar:

1. Si x es un conjunto, entonces $F^{-1}[x]$ es un conjunto.

2. Si x es un conjunto y F es inyectiva, entonces $F^{-1}[x]$ es un conjunto.

53.- Demostrar que si $\langle a, < \rangle$ es un conjunto bien ordenado y $a \neq \emptyset$, entonces

$$t.o.(\langle a, < \rangle) = \{t.o.(\langle a_x, < \rangle) : x \in a\}$$

54.- Sea R la relaci?n definida en $\mathbb{Z}$ por $xRy \iff |x| < |y| \vee (|x| = |y| \wedge x < y)$.

1. Demostrar que R es un buen orden en $\mathbb{Z}$.

2. Calcular $t.o.(\langle S_x, R \rangle)$.

55.- Sea R la relaci?n definida en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ por

$$< x, y > R < x', y' > \iff x + y < x' + y' \vee (x + y = x' + y' \wedge x < x')$$

1. Demostrar que R es un buen orden en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

2. Probar que la aplicaci?n $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $f(< x, y >) = \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} + x$ es un isomorfismo de $\langle \mathbb{N} \times \mathbb{N}, R \rangle$ en $\langle \mathbb{N}, < \rangle$.

3. Calcular $t.o.(\langle S_{<x,y>}, R \rangle)$.

56.- Sea R la relaci?n definida en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ por

$$< x, y > R < x', y' > \iff \begin{cases} max(x,y) < max(x',y') \vee \\ (max(x,y) = max(x',y') \wedge x < x') \vee \\ (max(x,y) = max(x',y') \wedge x = x' \wedge y < y') \end{cases}$$

1. Demostrar que R es un buen orden en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
2. Calcular $t.o.(\langle S_{<0,y>}, R\rangle)$.
3. Calcular $t.o.(\langle S_{<x,y>}, R\rangle)$.

Tema 6 : Ordinales finitos (n£meros naturales)

57.- Sea $\langle a, <\rangle$ un conjunto bien ordenado no vac¡o y $\alpha = t.o.(\langle a, <\rangle)$. Demostrar que el ordinal α es l¡mite si y s?lo s¡ $\langle a, <\rangle$ carece de elemento maximo.

58.- Sea a un conjunto no vac¡o de ordinales. Demostrar o refutar:

1. Si los elementos de a son l¡mites, entonces $\bigcup a$ es l¡mite.
2. Si los elementos de a son sucesores, entonces $\bigcup a$ es sucesor.

59.- Si a un conjunto inductivo, probar que los siguientes conjuntos tambien lo son:

1. $\{x \in a : x \text{ transitivo}\}$
2. $\{x \in a : x \text{ transitivo} \wedge x \notin x\}$
3. $\{x \in a : x = 0 \vee (x \text{ sucesor})\}$

60.- Demostrar que un ordinal es l¡mite si y s?lo s¡ es un conjunto inductivo.

61.- Dar un ejemplo de un conjunto inductivo que no sea un ordinal.

62.- Sean R y S las relaciones sobre $2 \times \mathbb{N}$ definidas por

$$< x, y > R < x', y' > \leftrightarrow x + y < x' + y' \vee (x + y = x' + y' \wedge x < x')$$
$$< x, y > S < x', y' > \leftrightarrow x < x' \vee (x = x' \wedge y < y')$$

Demostrar que :

1. $t.o.(\langle 2 \times \mathbb{N}, R\rangle) = \omega$
2. $t.o.(\langle 2 \times \mathbb{N}, S\rangle)$ es un ordinal l¡mite.
3. $t.o.(\langle 2 \times \mathbb{N}, S\rangle) > \omega$.

63.- Demostrar que todo subconjunto no vac¡o de $\mathbb{N}$ acotado superiormente posee elemento m?ximo.

64.- Demostrar que un ordinal α es un n£mero natural si y s?lo s¡ todo subconjunto no vac¡o de α posee elemento m?ximo.

Tema 7 : Teoremas de inducci?n y recursi?n

65.- Demostrar que si a es un conjunto y $G : V \times V \rightarrow V$, entonces existe una £nica aplicaci?n $f : \omega \rightarrow V$ tal que

$$\begin{array}{l} f(0) = a \\ \forall n \ (f(n+1) = G(< f(n), n >)) \end{array}$$

66.- Sean a un conjunto y $G, H : V \rightarrow V$. Demostrar que existe una £nica aplicaci?n $F : \mathbf{Ord} \rightarrow V$ tal que

$$F(\alpha) = \begin{cases} a, & \text{si } \alpha = 0; \\ G(F(\beta)), & \text{si } \alpha = \beta + 1; \\ H(F(\upharpoonright \alpha)), & \text{si } \alpha \text{ es l¡mite} \end{cases}$$

67.- Demostrar que si $G : V \times V \rightarrow V$, entonces existe una £nica aplicaci?n $F : V \times \mathbf{Ord} \rightarrow V$ tal que

$$\forall a \forall \alpha \ (F(a, \alpha) = G(a, F_a \upharpoonright \alpha)),$$

donde $F_a : \mathbf{Ord} \rightarrow V$ est? definida por $F_a(\beta) = F(a, \beta)$.

68.- Sean a un conjunto, $G : V \rightarrow V$ y $f : \omega \rightarrow V$ definida por

$$\begin{array}{l} f(0) = a \\ \forall n \ (f(n+1) = G(f(n))) \end{array}$$

Demostrar que si G es inyectiva y $a \notin \text{rango}(G)$, entonces f es inyectiva.

69.- Sea $m \in \mathbb{N}$ y notemos $[m, \rightarrow [= \{x \in \mathbb{N} : m \leq x\}$. Sea B un conjunto no vac¡o y $a \in B$. Sea g una aplicaci?n de B en B. Demostrar que existe una £nica aplicaci?n $\Phi : [m, \rightarrow [\ \rightarrow B$ tal que

$$\begin{array}{l} \Phi(m) = a \\ \forall x \in [m, \rightarrow [\ (\Phi(x+1) = g(\Phi(x)) \end{array}$$

70.- (**Suma de n£meros naturales**)

1. Demostrar que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe una £nica aplicaci?n $\varphi_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{array}{l} \varphi_n(0) = n \\ \forall x \ (\varphi_n(x+1) = \varphi_n(x) + 1) \end{array}$$

2. Demostrar que existe una £nica $\varphi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{array}{l} \forall m \ (\varphi(m, 0) = m) \\ \forall m \forall n \ (\varphi(m, n+1) = \varphi(m, n) + 1) \end{array}$$

71.- (**Producto de n£meros naturales**)

1. Demostrar que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe una £nica aplicaci?n $\psi_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{array}{l} \psi_n(0) = 0 \\ \forall x \ (\psi_n(x+1) = n + \psi_n(x)) \end{array}$$

2. Demostrar que existe una £nica $\psi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{array}{l} \forall m \ (\psi(m,0) = 0) \\ \forall m \forall n \ (\psi(m,n+1) = m + \psi(m,n)) \end{array}$$

72.- (La funci?n factorial) Demostrar que existe una £nica aplicaci?n $f : \omega \to \omega$ tal que

$$f(0) = 1 \quad \text{y} \quad (\forall n) \ (f(n+1) = (n+1)f(n))$$

73.- (La funci?n de Fibonacci) Demostrar que existe una £nica aplicaci?n $f : \omega \to \omega$ tal que

$$f(0) = 1 \quad f(1) = 1 \quad \text{y} \quad (\forall n) \ (f(n+2) = f(n) + f(n+1))$$

74.- Demostrar que las siguientes clases son conjuntos:

1. $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \ldots\}$
2. $\{\emptyset, \mathbf{P}(\emptyset), \mathbf{P}(\mathbf{P}(\emptyset)), \ldots\}$
3. $\{0, 1, 2, \ldots, \omega, \omega^+, \omega^{++}, \ldots\}$

Tema 8 : Aritmtica ordinal

75.- Determinar cu?les de las siguientes funciones $F_i : \mathbf{Ord} \to \mathbf{Ord}$ son normales:

1. $F_1(\alpha) = \alpha + 1$
2. $F_2(\alpha) = \begin{cases} \alpha, & \text{si } \alpha < \omega; \\ \omega, & \text{si } \omega \geq \omega. \end{cases}$
3. $F_3(\alpha) = \begin{cases} \alpha + 1, & \text{si } \alpha \text{ no es l¡mite}; \\ \alpha, & \text{si } \alpha \text{ es l¡mite}. \end{cases}$
4. $F_4(\alpha) = \bigcup \alpha$

76.- Probar que la clase $\{\alpha \in \mathbf{Ord} : \alpha \text{ es l¡mite}\}$ es una clase propia.

77.- ¨Existe alg£n ordinal α tal que $\alpha + \omega = \alpha^+$?.

78.- Calcular $\alpha + \beta + \gamma$, siendo $\{\alpha, \beta, \gamma\} = \{1, 2, \omega\}$.

79.- Dar ejemplos de ordinales α, β tales que

$$(1) \ \alpha < \beta \text{ y } \alpha + \beta < \beta + \alpha \qquad \alpha < \beta \text{ y } \beta + \alpha < \alpha + \beta$$

80.- Hallar una permutaci?n de los ordinales $1, 2, \omega$ tal que su suma sea, respectivamente:

$$\omega, \quad \omega + 1, \quad \omega + 2, \quad \omega + 3$$

81.- Sea $\mathbf{Ord}^{<\omega} = \bigcup\{\mathbf{Ord}^n : n \in \omega\}$, siendo $\mathbf{Ord}^n = \{f : \exists n \in \omega (f \text{ es una aplicaci?n de } n \text{ en } \mathbf{Ord})\}$.

1. Demostrar que $\mathbf{Ord}^{<\omega}$ es una clase propia.

2. En $\mathbf{Ord}^{<\omega}$ definimos la siguiente relación, $\lhd$. Si $s, t \in \mathbf{Ord}^{<\omega}$, entonces

$$s \lhd t \leftrightarrow \begin{cases} \sup(\text{rang}(s)) < \sup(\text{rang}(t)) \\ \vee \\ (\sup(\text{rang}(s)) = \sup(\text{rang}(t)) \wedge \text{dom}(s) < \text{dom}(t)) \\ \vee \\ \begin{cases} (\sup(\text{rang}(s)) = \sup(\text{rang}(t)) \wedge \ \text{dom}(s) = \text{dom}(t) \\ \wedge \\ (\exists k \in \text{dom}(s))[s \restriction k = t \restriction k \wedge s(k) < t(k)]) \end{cases} \end{cases}$$

Probar que:

(a) Para todo $t \in \mathbf{Ord}^{<\omega}$, $\{s \in \mathbf{Ord}^{<\omega} : s \lhd t\}$ es un conjunto.

(b) $\lhd$ es un buen orden sobre $\mathbf{Ord}^{<\omega}$.

(c) Existe un £nico isomorfismo $F : \mathbf{Ord} \to \mathbf{Ord}^{<\omega}$.

(d) Calcular $F(0)$, $F(\omega)$ y $F(\omega + \omega)$.

82.- Dar ejemplos de un conjunto $A \subseteq \mathbb{Q}$ tal que el tipo ordinal de $\langle A, <_{\mathbb{Q}} \rangle$ sea, respectivamente:

$$\omega + 1, \quad \omega + n \text{ (con } n > 0), \quad \omega + \omega$$

83.- Sean $\alpha, \beta \in \mathbf{Ord}$ con $\beta \neq 0$. Demostrar que $\alpha + \beta$ es l¡mite si y s?lo si β es l¡mite.

84.- Para cada $n \in \omega$, se definen $A_n = \{\alpha : n + \alpha = \alpha\}$ $\quad A'_n = \{\alpha : n \cdot \alpha = \alpha\}$. Demostrar que:

1. $A_0 = \mathbf{Ord} = A'_1$ y $A'_0 = 1$.
2. Si $n \neq 0$, entonces $A_n = \mathbf{Ord} - \omega$.
3. Si $n > 1$, entonces $A'_n = \{\omega \cdot \beta : \beta > 0\}$.

85.- Determinar una permutaci?n de los ordinales $\omega, \omega + 1$ y $\omega \cdot 2 + 1$ tales que su suma sea, respectivamente: $\omega \cdot 4$, $\quad \omega \cdot 4 + 1$.

86.- Probar que:

1. $(\omega \cdot 3 + 2) + (\omega + 1) = \omega \cdot 4 + 1$.
2. $(\omega \cdot 2 + 1) + (\omega \cdot 2 + \omega \cdot 4) = \omega \cdot 8$.

87.- Sean $p, q, n \in \omega$. Demostrar que:

$$(\omega \cdot p + q) \cdot n \ = \begin{cases} q \cdot n & \text{si } p = 0 \\ 0 & \text{si } p \neq 0 \wedge n = 0 \\ \omega \cdot p \cdot n + q & \text{si } p \neq 0 \wedge n \neq 0 \end{cases}$$

[[**Indicaci?n :** Para $p > 0$ prubese el resultado por inducci?n sobre n.]]

88.- Sea $\alpha \in \mathbf{Ord}$. Probar que: $\alpha + 1 + \alpha = 1 + \alpha \cdot 2$.

89.- Dar ejemplos de un conjunto $A \subseteq \mathbb{Q}$ tal que el tipo ordinal de $\langle A, <_{\mathbb{Q}} \rangle$ sea, respectivamente:

$$\omega \cdot 2, \quad \omega \cdot 3, \quad \omega \cdot \omega$$

90.- Demostrar que si $\alpha < \beta$ y γ es sucesor, entonces $\alpha \cdot \gamma < \beta\gamma$.

91.- Demostrar que si $\alpha > 1$ y $\beta > 1$, entonces $\alpha + \beta \leq \alpha \cdot \beta$.

92.- Demostrar que $\alpha \cdot \beta = \sup\{\alpha \cdot \gamma + \alpha : \gamma < \beta\}$.

93.- Hallar, en cada caso, el cociente y el resto de dividir α por β:
(1) $\alpha = \omega^2 + \omega \cdot 5 + 3, \quad \beta = \omega^2 + 1$ (2) $\alpha = \omega^\omega + \omega^3 + \omega \cdot 3 + 2, \quad \beta = \omega^5$

94.- Si $p, q \in \omega, p > 0$ y α es l¡mite, probar que $p \cdot (\alpha + q) = \alpha + p \cdot q$.

95.- Demostrar que si $\alpha > 0$ y β es l¡mite, entonces $(\alpha + 1)\beta = \alpha\beta$.

96.- Probar que las siguientes funciones F_i : **Ord** $\to$ **Ord** son crecientes y no cont¡nuas:

$$F_1(\alpha) = \alpha^2, \quad F_2(\alpha) = \omega^\alpha + \omega$$

97.- Demostrar que si $n > 1$, entonces $n^\omega = \omega$.

98.- Demostrar:

1. Si $\alpha > 1$ y β es l¡mite, entonces α^β es l¡mite.
2. Si α es l¡mite y $\beta > 0$, entonces α^β es l¡mite.

99.- Demostrar que si $\alpha > 1$, entonces $\beta \leq \alpha^\beta$.

100.- Sean $\alpha, \beta \in$ **Ord** tales que $\alpha < \beta$. Sean $p, q \in \omega$ tales que $q > 0$. Probar que:

$$\omega^\alpha \cdot p + \omega^\beta \cdot q = \omega^\beta \cdot q$$

101.- Simplificar las siguientes expresiones:
(1) $(\omega^2 + \omega \cdot 2 + 2) + (\omega + 1)$ (2) $(\omega^7 + \omega^5 + \omega^3 \cdot 2 + \omega \cdot 10 + 3) + (\omega^4 + \omega^2 \cdot 2 + 2)$

102.- Sean $k \in \omega - \{0\}$, $\gamma_o, \ldots, \gamma_k \in$ **Ord** y $n_0, \ldots, n_k \in \omega$ tales que $\gamma_0 > \ldots > \gamma_k$ y $n_i > 0$ $(\forall i \leq k)$. Demostrar que :

1. Si $p > 0$, entonces $(\omega^{\gamma_0} \cdot n_0 + \cdots + \omega^{\gamma_k} \cdot n_k) \cdot p = \omega^{\gamma_0} \cdot n_0 \cdot p + \omega^{\gamma_1} \cdot n_1 \cdots + \omega^{\gamma_k} \cdot n_k$.
2. Si $\gamma > 0$, entonces $(\omega^{\gamma_0} \cdot n_0 + \cdots + \omega^{\gamma_k} \cdot n_k) \cdot \omega^\gamma = \omega^{\gamma_0 + \gamma}$

103.- Expresar los siguientes ordinales en la forma normal de Cantor:
(1) $(\omega + 1)^2$ (2) $(\omega + 1)(\omega^2 + 1)$ (3) $(\omega^2 + 1)(\omega + 1)$ (4) $(\omega^3 + \omega)^5$
(5) $(\omega^5 + \omega^3)^3$ (6) $(\omega^3.4 + \omega^2.5 + 2)^2 + \omega^5 + 3$

104.- Probar la veracidad o falsedad de las siguientes f?rmulas:

1. $(\forall \alpha)[\alpha < \omega^2 \to \alpha + \omega^2 = \omega^2]$.
2. $(\forall \alpha)[\alpha < \omega^2 + 1 \to \alpha + \omega^2 + 1 = \omega^2 + 1]$.

105.- Probar que: min $\{\alpha > 0 : \omega \cdot \alpha = \alpha\} = \omega^\omega$.

106.- Demostrar que dados tres ordinales cualesquiera, el n£mero de sumas de todas sus permutaciones es menor que 6.

107.- Determinar todos los ordinales α tales que $\omega \leq \alpha < \omega^3$ y $\alpha = \beta^2$ para alg£n β.

108.- Sea $F : \mathbf{Ord} \to \mathbf{Ord}$ la aplicaci?n definida por $F(\alpha) = \omega.\alpha$ y $A = \{\alpha : F(\alpha) = \alpha\}$.

1. Probar que existe un £nico isomorfismo $G : \langle \mathbf{Ord}, \in \rangle \;\cong\; \langle A, \in \rangle$.
2. Hallar $G(0)$, $G(1)$ y probar que $G(n) = \omega^\omega \cdot n (\forall n \in \omega)$.
3. Probar que G es normal y calcular $G(\omega)$.
4. Demostrar que $G(\alpha) = \omega^\omega \cdot \alpha (\forall \alpha \mathbf{Ord})$ y hallar el menor punto fijo no nulo de G.

109.- Sean $\alpha, \beta \in \mathbf{Ord}$. Notemos $<_1, <_2$ las ordenaciones transportadas de las usuales de α y β por las aplicaciones biyectivas $f : \alpha \to (\alpha \times \{0\})$ y $g : \beta \to (\beta \times \{1\})$ definidas por $f(x) =< x, 0 >$ y $g(x) =< x, 1 >$, respectivamente.

1. Probar que la ordenaci?n $<_1 \oplus <_2$ en el conjunto $(\alpha \times \{0\}) \cup (\beta \times \{1\})$ est? caracterizada por la siguiente condici?n: $< x, y > <_1 \oplus <_2 < z, t > \iff y < t \vee (y = t \wedge x < z)$.
2. Probar que t.o $(\langle(\alpha \times \{0\}) \cup (\beta \times \{1\}), <_1 \oplus <_2\rangle) = \alpha + \beta$.

110.- Sean $\alpha, \beta \in \mathbf{Ord}$. Notemos por $<$ las ordenaciones usuales de α y β, respectivamente.

1. Probar que la ordenaci?n $R =< \otimes <$ en $\alpha \times \beta$ est? caracterizada por la condici?n:

$$< x, y > R < z, t > \iff y < t \vee (y = t \wedge x < z)$$

2. Probar que t.o $(\langle \alpha \times \beta, R\rangle) = \alpha \cdot \beta$.

111.- Sean $\alpha, \beta \in \mathbf{Ord}$. Consideremos el conjunto $a = \{f : (f : \beta \to \alpha) \wedge (\{\delta \in \beta : f(\delta) \neq 0\}$ es finito$)\}$ y la relaci?n R en a definida por $fRg \leftrightarrow (\exists \gamma)[\gamma = \sup\{\delta \in \beta : f(\delta) \neq g(\delta)\} \wedge f(\gamma) < g(\gamma)]$. Demostrar que:

1. $\langle a, R\rangle$ es un conjunto bien ordenado.
2. $t.o.(\langle a, R\rangle) = \alpha^\beta$.

Tema 9 : El teorema del buen orden

112.- Demostrar que son equivalentes:

1. El axioma de elecci?n.

2. Para cada familia $(a_i)_{i\in I}$ de conjuntos no vac¡os, el producto cartesiano $\prod_{i\in I} a_i$ es no vac¡o.

113.- Demostrar que son equivalentes:

1. El axioma de elecci?n.
2. Si a es un conjunto, entonces para cada partici?n de a existe un conjunto b que tiene uno y s?lo un elemento en com£n con cada conjunto de la partici?n.

114.- Demostrar que son equivalentes:

1. El axioma de elecci?n.
2. Si a es un conjunto y R es una relaci?n de equivalencia en a, entonces existe un conjunto b que tiene uno y s?lo un elemento en com£n con cada clase de equivalencia de a $[\![b$ se denomina un **conjunto de Zermelo** de $a]\!]$.

115.- Demostrar que son equivalentes:

1. El axioma de elecci?n.
2. Toda relaci?n binaria contiene una aplicaci?n con el mismo dominio.

116.- Sean a, b conjuntos y f una aplicaci?n de a en b. Demostrar que f es suprayectiva si y s?lo si existe una aplicaci?n h de b en a tal que $f \circ h = I_b$, siendo I_b la aplicaci?n identidad en el conjunto b.

117.- Sea $\langle A, <\rangle$ un conjunto ordenado. Demostrar que son equivalentes:

1. Todo subconjunto no vac¡o de A posee alg£n elemento minimal.
2. No existe una aplicaci?n $f : \omega \to A$ tal que $\forall n \in \omega\ (f(n+1) < f(n))$.

Indicaci?n: Probar (2) $\Longrightarrow$ (1) por el contrarrec¡proco, utilizando el teorema de recursi?n sobre ω.

Tema 10 : Conjuntos finitos y numerables

118.- Demostrar que si $x \sim y$, entonces $\mathbf{P}(x) \sim \mathbf{P}(y)$.

119.- Demostrar o refutar: $y \subseteq x \wedge z \subseteq x \wedge y \sim z \to x - y \sim x - z$.

120.- Sea a un conjunto. Demostrar que a es finito si y s?lo si existen $n \in \omega$ y una aplicaci?n aplicaci?n suprayectiva de n en a.

121.- Sea a un conjunto finito y f una aplicaci?n de a en un conjunto b. Demostrar que el conjunto $f[a]$ es finito.

122.- Sea a un conjunto finito no vac¡o y R un orden total en a. Probar que $\langle a, R\rangle$ posee elemento m?ximo y elemento m¡nimo.

123.- Sea a un conjunto. Demostrar que a es finito si y s?lo si existe un buen orden R en a tal que R^{-1} es un buen orden en a.

124.- Demostrar que si a es un conjunto finito, entonces $P(a)$ es un conjunto finito y, adem?s, $|P(a)| = 2^{|a|}$

125.- Sea $\langle a, <\rangle$ un conjunto totalmente ordenado tal que todo subconjunto de a acotado superiormente es finito. Demostrar que $\langle a, <\rangle$ es un conjunto bien ordenado.

126.- Probar que si a es un conjunto numerable y R es una relaci?n de equivalencia en a, entonces el conjunto cociente a/R es numerable.

127.- Demostrar que el producto cartesiano de dos conjuntos numerables es un conjunto numerable.

128.- Demostrar que la uni?n de una familia finita o numerable de conjuntos numerables es un conjunto numerable.

129.- Demostrar que el conjunto$\mathbb{Z}[x]$ de polinomios con coeficientes en $\mathbb{Z}$, es numerable.

130.- Diremos que un n£mero real b es **algebraico** si es raiz de alg£n polinomio perteneciente a $\mathbb{Z}[x]$. Probar que el conjunto de los n£meros algebraicos es numerable.

131.- Demostrar que son equipotentes los siguientes intervalos:

(1) $[0,1]$ y $]0,1[$ (2) $[0,1]$ y $[0,1[$ (3) $[0,1[$ y $]0,1]$

132.- Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$. Demostrar que los intervalos $[a,b]$, $]a,b[$,$[a,b[$ y $]a,b]$ son equipotentes.

133.- Demostrar que son equipotentes:

1. $[0,1[$ y $[0,+\infty[$; $]-1,0]$ y $]-\infty,0]$; $]-1,1[$ y $\mathbb{R}$.
2. $[a,b]$ y $\mathbb{R}$, siendo $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$.

134.- Demostrar que $]0,1[\sim {}^{\omega}2$.

135.- Definir una aplicaci?n biyectiva de $[0,1[^2$ en $[0,1[$.

136.- Demostrar que $\mathbb{R}^2 \sim \mathbb{R}$.

137.- Sea $a \subseteq \mathbb{R}^2$. Probar que si a es numerable, entonces $\mathbb{R}^2 - a \sim \mathbb{R}$.

138.- Sea $a \subseteq \mathbb{R}$. Probar que si a es numerable, entonces $\mathbb{R} - a \sim \mathbb{R}$.

139.- Sea a un conjunto. Consideremos el conjunto

$$P_F(a) = \{b : b \in P(a) \wedge b \text{ es un conjunto finito}\}$$

Demostrar que si a es numerable, entonces $P_F(a)$ es numerable.

140.- Probar que el conjunto

$$a = \{f \in \omega^{\omega} : \{n \in \omega : f(n) \neq 0\} \text{ es finito }\}$$

es numerable.

Tema 11 : Cardinales

141.- Calcular el cardinal de cada uno de los siguientes conjuntos: $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}$.

142.- Hallar el cardinal del conjunto de sucesiones finitas de n£meros naturales.

143.- Hallar el cardinal del conjunto de sucesiones infinitas de n£meros naturales.

144.- Hallar el cardinal del conjunto de sucesiones infinitas de n£meros reales.

145.- Diremos que un n£mero real a es **trascendente** si y s?lo si no es algebraico. Hallar el cardinal del conjunto de los n£meros trascendentes.

146.- Demostrar que si $|a| \geq \aleph_0$, $b \subseteq a$ y $|b| < |a|$, entonces $|a - b| = |a|$.

147.- Calcular el cardinal de cada uno de los siguientes conjuntos:

1. El conjunto de las aplicaciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.
2. El conjunto de las funciones cont¡nuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.
3. El conjunto de las funciones discontinuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

148.- Probar que:
(1) $|\{\alpha \in \mathbf{Ord} : |\alpha| < \aleph_0\}| = \aleph_0$ (2) $|\{\alpha \in \mathbf{Ord} : |\alpha| \leq \aleph_0\}| = |\{\alpha \in \mathbf{Ord} : |\alpha| = \aleph_0\}| = \aleph_1$

149.- Sea $\alpha \in \mathbf{Ord}$. Probar que

1. Para cada $\beta \in \mathbf{Ord}$ se verifica: $\aleph_\alpha \leq \beta < \aleph_{\alpha+1} \Longrightarrow |\beta| = \aleph_\alpha$.
2. $|\{\beta \in \mathbf{Ord} : |\beta| = \aleph_\alpha\}| = \aleph_{\alpha+1}$.

150.- Demostrar que todo cardinal infinito es **primo** (es decir, no es el producto de dos cardinales primos menores).

151.- Sean $\alpha, \beta \in \mathbf{Ord}$ tales que $|\alpha| \leq \beta \leq \alpha$. Probar que $|\beta| = |\alpha|$.

152.- Si $\alpha \in \mathbf{Ord}$, probar que $\aleph_\alpha \geq \alpha$.

153.- Probar que si α es un ordinal l¡mite, entonces $\aleph_\alpha$ es un ordinal l¡mite.

154.- Sea f una funci?n y a un conjunto. Probar que $|f[a]| \leq |a|$.

Algunos problemas de examen de Algebra II (Segundo cuatrimestre)

155.- Consideremos la funci?n $F : \mathrm{Ord} \to \mathrm{Ord}$ definida por $F(\alpha) = \omega^3 + \omega^2\alpha$. Se pide:

1. Probar que F es una funci?n normal.
2. Hallar el menor punto fijo de F.
3. Sea G el £nico isomorfismo de $\langle \mathrm{Ord}, \in \rangle$ en $\langle A, \in \rangle$, siendo $A = \{\alpha : F(\alpha) = \alpha\}$. Hallar $G(\omega)$.

156.-

1. Sea a un conjunto. Estudiar en qu condiciones es conjunto la clase

$$B = \{x : \text{ Existe una aplic. supray. no inyect. de } x \text{ en } a \ \}$$

2. Probar que existe un orden total en ω, respecto del cual cada n£mero natural carece de elemento siguiente.

157.- Sea A un conjunto no vac¡o y $a \in A$. Sea f una aplicaci?n inyectiva de A en A verificando:

1. $a \notin f[A]$.

2. Si $B \subseteq A$ es tal que $a \in B$ y $f[B] \subseteq B$, entonces $B = A$.

Se pide:

a) Probar que existe una £nica aplicaci?n $g : \omega \to A$ que satisface

- $g(0) = a$.
- $\forall n \in \omega \ (g(n+1) = f(g(n)))$.

b) Probar que la aplicaci?n g del apartado a) es biyectiva.

158.- Sea a un conjunto. Determinar en qu condiciones son conjuntos las siguientes clases:

$$\begin{array}{rcl} B & = & \{x : \text{ existe una aplicaci?n biyectiva de } a \text{ en } x\} \\ C & = & \{x : a \cap x = \emptyset\} \end{array}$$

159.- En $\omega \times \omega$ consideramos la relaci?n R definida como sigue:

$$\begin{array}{rcl} < x, y > R < z, t > & \leftrightarrow & (x = z = 0 \wedge y < t) \vee \\ & & (y = t = 0 \wedge x < z) \vee \\ & & (x \cdot y < z \cdot t) \vee \\ & & (x \cdot y = z \cdot t \wedge x < z) \vee \\ & & (x \cdot y = z \cdot t \wedge x = z \wedge y < t) \end{array}$$

Se pide:

1. Probar que $< \omega \times \omega, R >$ es un conjunto bien ordenado.

2. Hallar el tipo ordinal de $< S_{<x,0>}, R >$, para cada $x \in \omega$.

3. Hallar una secci?n inicial de $< \omega \times \omega, R >$ cuyo tipo ordinal sea $\omega \cdot 2 + 3$.

4. Justificar razonadamente, de manera informal, cual es el tipo ordinal de $< \omega \times \omega, R >$.

5. Hallar $A \subseteq \mathbb{Q}$ tal que $< A, <_{\mathbb{Q}}>$ sea un conjunto bien ordenado y, adem?s, $< A, <_{\mathbb{Q}}> \cong < \omega \times \omega, R >$.

160.- Sean

A el conjunto de las sucesiones finitas de n£meros naturales.
B el conjunto de las sucesiones finitas de n£meros naturales no decrecientes.
C el conjunto de las sucesiones finitas de n£meros naturales crecientes.
D el conjunto de las partes finitas de ω.

Demostrar, dando expl¡citamente una biyecci?n, que

1. $A \sim B$.
2. $B \sim C$.
3. $C \sim D$.
4. $D \sim \omega$.

161.- Sea $< A, <>$ un conjunto ordenado. Demostrar que son equivalentes:

1. Todo subconjunto no vac¡o de A posee alg£n elemento minimal.
2. No existe una aplicaci?n $f : \omega \to A$ tal que

$$\forall n \in \omega \ (f(n+1) < f(n))$$

<u>Indicaci?n</u> : *Probar (2) $\Longrightarrow$ (1) por el contrarrec¡proco, utilizando el teorema de recursi?n sobre ω.*

162.- Sea α un ordinal l¡mite, $\beta > 0$ y $m \in \omega - \{0\}$. Demostrar que:

1. Si γ es sucesor, entonces $(\alpha^\beta \cdot m)^\gamma = (\alpha)^{\beta \cdot \gamma} \cdot m$.
2. Si γ es l¡mite, entonces $(\alpha^\beta \cdot m)^\gamma = (\alpha)^{\beta \cdot \gamma}$.

<u>Indicaci?n</u> : *Prubense las dos relaciones simult?neamente.*

163.- Sea $\langle A, < \rangle$ un conjunto totalmente ordenado tal que

1. $\langle A, < \rangle$ posee elemento m¡nimo.
2. Todo subconjunto no vac¡o de A acotado superiormente, posee supremo.
3. $\forall x \in A \exists y \in A (x < y \wedge]x, y[= \emptyset)$.

Demostrar que $\langle A, < \rangle$ es un conjunto bien ordenado. ¨Es cierto el rec¡proco?.

164.-

1. Sea A un conjunto de cardinales bien ordenables. Probar que el conjunto $\bigcup A$ es un cardinal bien ordenable.
2. Dar ejemplo de un conjunto A de ordinales tal que el conjunto $\bigcup A$ no sea un cardinal bien ordenable.

165.- Sean $P = \{2^n : n \in \omega\}$ y f una aplicaci?n inyectiva no suprayectiva de ω en ω tal que $P \subset \text{rang}(f)$ (inclusi?n estricta). Consideremos en ω, la relaci?n R_f definida como sigue:

$$\begin{array}{rcll} xR_fy & \leftrightarrow & (x \neq y)\wedge & [(x \in P \wedge y \notin P)\vee \\ & & & (x, y \in P \wedge f(x) < f(y))\vee \\ & & & (x \in \text{rang}(f) - P \wedge y \in \omega - \text{rang}(f))\vee \\ & & & (x, y \in \text{rang}(f) - P \wedge x < y)\vee \\ & & & (x, y \in \omega - \text{rang}(f) \wedge x < y)] \end{array}$$

1. Sabiendo que $\langle \omega, R_f \rangle$ es un conjunto parcialmente ordenado, probar que es bien ordenado.
2. Sea A la clase de los ordinales α tales que, existe una aplicaci?n f verificando las condiciones del enunciado y tal que t.o.$(\langle \omega, R_f \rangle) = \alpha$.
   (a) Calcular el menor y el mayor elemento de A, explicitando, en cada caso, una aplicaci?n f correspondiente.
   (b) La clase A ¨es propia?.

166.- Determinar para qu valores de a la clase

$$\{x : \exists y \exists x_1 \exists x_2 (y \in x_1 \wedge x_1 \in x_2 \wedge x_2 \in a \wedge x \notin y)\}$$

es una clase propia

167.- Sea $f : \omega \times \omega \to \omega$ definida por:

$$\begin{cases} f(0, n) &= n + 1 \\ f(m + 1, 0) &= f(m, 1) \\ f(m + 1, n + 1) &= f(m, f(m + 1, n)) \end{cases}$$

Demostrar que: $\forall m \forall n (f(m, n) > n)$.

168.- Dadas las funciones $F, G : \mathbf{Ord} \to \mathbf{Ord}$ definidas por

$$F(\alpha) = \alpha^2 \text{ y } G(\alpha) = 2^\alpha$$

1. Determinar si son cont¡nuas, crecientes o normales.
2. Calcular el menor punto fijo de cada una.

169.- Calcular la forma normal de Cantor de

$$(\omega^3 + \omega)^\omega \cdot (\omega^3 \cdot 4 + \omega^2 \cdot 5 + 2)^2 + \omega^5 + 3$$

170.- Consideremos el conjunto

$$a = \{f \in \omega^\omega : \{n \in \omega : f(n) \neq 0\} \text{ es finito }\}$$

Sea R la relaci?n definida en a como sigue:

$$fRg \iff f \neq g \wedge f(n) < g(n) \text{ siendo } n = \sup\ \{f(m) \neq g(m)\}$$

1. Demostrar que R es un buen orden en a.

2. Sea $f \in a$ la aplicaci?n definida por

$$f(n) \quad = \quad \begin{cases} 1, & \text{si } n = 2 \\ 1, & \text{si } n \neq 2 \end{cases}$$

   Calcular el tipo ordinal de la secci?n inicial determinada por f.

3. Calcular el tipo ordinal de $\langle a, R \rangle$

171.- Demostrar que si a es un conjunto, entonces son equivalentes:

1. a es un ordinal.

2. Existe un buen orden R en a tal que

$$\forall x \in a(x = \{y \in a : yRx\})$$

172.- Sea $F : \mathbf{Ord} \to \mathbf{Ord}$ definida por $F(\alpha) = (\omega^\omega + \omega) \cdot \alpha$.

1. ¨Es F normal?.

2. Sea $A = \{\alpha : F(\alpha) = \alpha\}$. Demostrar que existe un £nico isomorfismo

$$G : \langle \mathbf{Ord}, \in \rangle \;\cong\; \langle A, \in \rangle$$

3. Calcular $G(0), G(1), G(2), G(\omega)$.

173.- Probar, sin usar el axioma de la elecci?n, que las siguientes condiciones son equivalentes:

1. Existe una aplicaci?n $f : \{A \subseteq \mathbb{R} : |A| \leq \aleph_0\} \to \mathbb{R}$ tal que $f(A) \notin A$.

2. Existe $B \subseteq \mathbb{R}$ tal que $|B| = \aleph_1$.

174.- Sea a un conjunto. Demostrar o refutar que

$$B = \{x : \exists y(y \subseteq a \wedge x \notin y)\}$$

es una clase propia.

175.- Sea $\mathcal{A}$ el conjunto de las partes finitas de ω. En este ejercicio, para cualquier $\{a_1, \ldots, a_n\} \in \mathcal{A}$ sobreentenderemos que $a_1 < \cdots < a_n$.

Sea R la relaci?n, definida recursivamente sobre $\mathcal{A}$, dada por:

- $\emptyset R B \quad \Longleftrightarrow \quad B \neq \emptyset$

- $\{a_1, \ldots, a_n\} R \{b_1, \ldots, b_m\} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{l} [n < m] \vee [n = m \wedge a_1 < b_1] \vee \\ [n = m \wedge a_1 = b_1 \wedge \{a_2, \ldots, a_n\} R \{b_2, \ldots, b_n\}] \end{array}$

Finalmente, sea $f : \mathcal{A} \to \mathbf{Ord}$ la aplicaci?n definida por

- $f(\emptyset) = 0$.
- $f(\{a_1, \cdots, a_n\}) = \omega^{n-1} \cdot (a_1 + 1) + \sum_{i=2}^{n} \omega^{n-i} \cdot (a_i - a_{i-1} - 1)$

Se pide:

1. Demostrar que f es inyectiva.
2. Demostrar que $\forall A, B \in \mathcal{A}\ (ARB \iff f(A) < f(B))$.
3. Demostrar que R es un buen orden en $\mathcal{A}$.
4. Explicitar la R-ordenaci?n de los elementos de $\mathcal{A}$ de cardinal inferior a 4.
5. Calcular razonadamente un elemento $A \in \mathcal{A}$ tal que t.o.$(\langle \mathcal{A}_A, R \rangle) = \omega^3 + \omega + 2$.
6. Calcular razonadamente el t.o.$(\langle \mathcal{A}, R \rangle)$.

176.- Diremos que un ordinal $\alpha > 1$ es primo si

$$\forall \beta, \gamma\ (\alpha = \beta \cdot \gamma \implies \alpha = \beta \ \vee\ \alpha = \gamma)$$

1. Para cada uno de los ordinales siguientes, demostrar que es primo, o encontrar una descomposici?n que muestre que no lo es:

$$\omega,\ \omega + 1,\ \omega^2 + \omega,\ \omega^\omega,\ \omega^\omega + 1$$

2. Demostrar que si $\alpha > 1$, entonces existen ordinales primos $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, tales que $\alpha = \alpha_1 \cdots \alpha_n$. Dar alg£n ejemplo que muestre que esta descomposici?n no es £nica.

177.-

1. Probar que para cualquier conjunto A numerable se tiene:

   1.1) $|\{x \subseteq A : \ x \ \text{ numerable}\}| = 2^{\aleph_0}$.

   1.2) existe una partici?n $\{C_n : \ n \in \omega\}$ de A tal que $\forall n \in \omega$ (C_n es numerable).

2. Sean
$$\begin{array}{lcl} P & = & \{2n : n \in \omega\} \\ B & = & \{x \subseteq P : x \text{ numerable}\} \\ D & = & \{f : \omega \to \omega \ \text{ tal que } \forall n \in \omega\ (|f^{-1}(\{n\})| = \aleph_0)\} \end{array}$$

   Probar que $|B| \leq |D|$, y concluir que $|D| = 2^{\aleph_0}$.

178.- Sea $\beta \in \mathbf{Ord}$. Estudiar en qu condiciones la siguiente clase es propia:

$$\{x : \ x \ \text{ es bien ordenable y su tipo ordinal es } \beta\}$$

179.- Calcular los cardinales de los siguientes conjuntos:

1. $A = \{x : \ x \ \text{ es maximal de } \ \langle P(\omega) - \{\omega\}, \subset\rangle\}$.
2. $B = \{x : \ x \ \text{ es minimal de } \ \langle P(\omega) - \{\omega\}, \subset\rangle\}$.

180.- Sea $F : \mathbf{Ord} \to \mathbf{Ord}$ definida por $F(\alpha) = (\omega^2 + \omega) \cdot \alpha$. Se pide:

1. Probar que F es normal.
2. Calcular los **tres menores** puntos fijos de F.
3. Dadas las clases

$$C = \{\alpha \in \mathbf{Ord} : \ F(\alpha) = \alpha\} \qquad D = \{\omega^\omega \cdot \beta : \ \beta \in \mathbf{Ord}\}$$

demostrar o refutar las siguientes relaciones: $C \subseteq D$, $D \subseteq C$.