Deducción automática y programación lógica

José A. Alonso Jiménez
Área de ciencias de la computación e inteligencia artificial
Universidad de Sevilla

Sevilla, 12 de Septiembre de 1995

Contenido

Capítulo 1

Deducción automática proposicional

1.1 El método de Davis-Putnam

1.1.1 Métodos de decisión basados en formas normales

Definición 1.1.1.1

1. Un **literal** es un símbolo proposicional o su negación.
2. Un literal es **positivo** si es un símbolo proposicional y **negativo**, en caso contrario.
3. Usaremos la letra L (posiblemente con índices) para representar literales.
4. El **complementario** de un literal L es

$$\overline{L} = \begin{cases} \neg p & \text{si } L = p; \\ p & \text{si } L = \neg p; \end{cases}$$

5. Los literales L y L' son **complementarios** si $L' = \overline{L}$.
6. Una **cláusula conjuntiva** (ó $\wedge$–**cláusula**) C es una conjunción de un conjunto finito de literales; i.e., $C = \bigwedge_{i=1}^{n} L_i$

7. Una **cláusula disjuntiva** (ó $\vee$–**cláusula**) D es una disyunción de un conjunto finito de literales; i.e., $D = \bigvee_{i=1}^{n} L_i$

8. Una fórmula F está en **forma normal conjuntiva (FNC)** si es una conjunción de un conjunto de cláusulas disjuntivas; i.e.,

$$F = \bigwedge_{i=1}^{n} \left(\bigvee_{j=1}^{m_i} L_{i,j} \right)$$

9. Una fórmula F está en **forma normal disjuntiva (FND)** si es una disyunción de un conjunto de cláusulas conjuntivas; i.e.,

$$F = \bigvee_{i=1}^{n} \left(\bigwedge_{j=1}^{m_i} L_{i,j} \right)$$

10. F es una **forma normal conjuntiva de** G si F está en forma normal conjuntiva y $F \equiv G$.

11. F es una **forma normal disjuntiva de** G si F está en forma normal disjuntiva y $F \equiv G$.

Teorema 1.1.1.2 Para cada fórmula F existe una fórmula G_1 y una fórmula G_2 tal que G_1 es una forma normal conjuntiva de F y G_2 es una forma normal disyuntiva de F.

Nota 1.1.1.3 (Algoritmo de normalización)

Entrada: Una fórmula F.

Salida: Una forma normal conjuntiva de F, G.

Procedimiento: Sustituir en F, mientras sea posible, las subfórmulas:

$(G \leftrightarrow H)$	por $((G \rightarrow H) \wedge (H \rightarrow G))$
$(G \rightarrow H)$	por $(\neg G \vee H)$
$\neg\neg G$	por G
$\neg(G \vee H)$	por $(\neg G \wedge \neg H)$
$\neg(G \wedge H)$	por $(\neg G \vee \neg H)$
$(G_1 \vee (G_2 \wedge G_3))$	por $((G_1 \vee G_2) \wedge (G_1 \vee G_3))$
$((G_1 \wedge G_2) \vee G_3))$	por $((G_1 \vee G_3) \wedge (G_2 \vee G_3))$

Nota 1.1.1.4 Intercambiando el papel de las conectivas $\vee$ y $\wedge$ en el algoritmo anterior se obtiene una forma normal disyuntiva de la fórmula.

Lema 1.1.1.5 Sean $L_1, \ldots, L_n$ literales. Son equivalentes:

1. $\bigvee_{i=1}^{n} L_i$ es una tautología.
2. $\bigwedge_{i=1}^{n} L_i$ es inconsistente
3. $\{L_1, \ldots, L_n\}$ contiene un par de literales complementarios.

Teorema 1.1.1.6

1. Una fórmula en forma normal conjuntiva es una tautología syss cada una de sus cláusulas disjuntivas es una tautología.
2. Una fórmula en forma normal disjuntiva es inconsistente syss cada una de sus cláusulas conjuntivas es inconsistente.

Algoritmo 1.1.1.7 (de inconsistencia mediante FND)

Entrada: Una fórmula F.

Salida: `Consistente`, si F es consistente; `Inconsistente`, en caso contrario.

Procedimiento:

Sean G una forma normal disjuntiva de F
    $G_1, \ldots, G_n$ las $\wedge$–cláusulas de G
Desde $i = 1$ hasta n
    si en G_i no ocurren literales complementarios,
        entonces devolver `Consistente` y parar.
Devolver `Inconsistente` y parar.

Algoritmo 1.1.1.8 (de validez mediante FNC)

Entrada: Una fórmula F

Salida: `Tautologia`, si F es una tautología; `No-tautologia`, en caso contrario.

Procedimiento:

Sean G una forma normal conjuntiva de F
    $G_1, \ldots, G_n$ las $\vee$–cláusulas de G
Desde $i = 1$ hasta n
    si en G_i ocurren literales complementarios,
      entonces devolver `No-tautologia` y parar.
Devolver `Tautologia` y parar.

1.1.2 Cláusulas

Definición 1.1.2.1

1. Una **cláusula** es un conjunto finito de literales.
2. La **cláusula vacía** es el conjunto vacío y se representa por $\square$.

Nota 1.1.2.2 Usaremos las siguientes variables sintácticas:

1. L para literales.
2. C, D para cláusulas.
3. S para conjuntos de cláusulas.

Definición 1.1.2.3 Sea C una cláusula.

1. El conjunto de los literales positivos de C se representa por C_+
2. El conjunto de los literales negativos de C se representa por C_-

Definición 1.1.2.4 Sea v una valoración de verdad.

1. Para cada literal L,
$$v'(L) = \begin{cases} v(p), & \text{si } L = p; \\ 1 - v(p), & \text{si } L = \neg p. \end{cases}$$
2. Para cada cláusula C,
$$v''(C) = 1 \text{ syss existe un } L \in C \text{ tal que } v'(L) = 1$$
3. Para cada conjunto de cláusulas S,
$$v'''(S) = 1 \text{ syss para todo } C \in S,\ v''(C) = 1$$

Lema 1.1.2.5 Sea v una valoración.

1. $v''(\square) = 0$.
2. $v'''(\emptyset) = 1$.

Nota 1.1.2.6 En lo que sigue, escribiremos $v(L), v(C)$ ó $v(S)$ en lugar de $v'(L), v''(C)$ ó $v'''(S)$

Definición 1.1.2.7 Sea v una valoración.

1. v es un **modelo** de C (ó C es **válida** en v), $v \models C$, si $v(C) = 1$.
2. v es un **modelo** de S (ó S es **válida** en v), $v \models S$, si $v(S) = 1$.

Definición 1.1.2.8

1. C (resp. S) es **consistente** si tiene un modelo. En caso contrario, es **inconsistente**.
2. C es una **tautología**, $\models C$, si $v(C) = 1$ para toda valoración v.
3. C es **consecuencia** de S, $S \models C$, si $v(C) = 1$ para todos los modelos v de S.

Lema 1.1.2.9 C es una tautología syss contiene un par de literales complementarios.

Nota 1.1.2.10

1. Si $S \subseteq S'$ y S' es consistente, entonces S es consistente.
2. Si $\square \in S$, entonces S es inconsistente.

Definición 1.1.2.11

1. El conjunto de fórmulas correspondiente a la cláusula $C \neq \square$ es

$$Form(C) = \left\{ \bigvee_{i=1}^{n} L_i : C = \{L_1, \ldots, L_n\} \right\}$$

2. El conjunto de fórmulas correspondiente al conjunto de cláusulas $C \neq \emptyset$ es
$$Form(S) = \left\{ \bigwedge_{i=1}^{n} F_i : S = \{C_1, \ldots, C_n\}, F_i \in Form(C_i) \right\}$$

Lema 1.1.2.12

1. Si $F, G \in Form(C)$, entonces $F \equiv G$.
2. Si $F, G \in Form(S)$, entonces $F \equiv G$.

Definición 1.1.2.13

1. C y F son **equivalentes**, $C \equiv F$, si $v''(C) = \hat{v}(F)$ para toda valoración v.
2. S y F son **equivalentes**, $S \equiv F$, si $v'''(S) = \hat{v}(F)$ para toda valoración v.
3. S y S' son **equivalentes**, $S \equiv S'$, si $v'''(S) = v'''(S')$ para toda valoración v.

Lema 1.1.2.14

1. Si $F \in Form(C)$, entonces $C \equiv F$.
2. Si $F \in Form(S)$, entonces $S \equiv F$.

Teorema 1.1.2.15 Para cada fórmula F existe un conjunto de cláusulas S tal que $S \equiv F$.

Definición 1.1.2.16 Un conjunto de cláusulas S es una **forma clausal** de la fórmula F si $S \equiv F$.

Nota 1.1.2.17 Existe un algoritmo que para cada fórmula F devuelve una forma clausal de F.

1.1.3 El algoritmo de Davis–Putnam

Teorema 1.1.3.1 (Regla de tautología) Si $C \in S$ es una tautología, entonces S es consistente syss $S - \{C\}$ es consistente.

Definición 1.1.3.2

1. $S_{L^+} = \{C \in S : L \in C\}$
2. $S_{L^-} = \{C \in S : \overline{L} \in C\}$
3. $S_{L^0} = \{C \in S : L \notin C, \overline{L} \notin C\}$.
4. $S_{L=0} = S_{L^0} \cup \{C - \{L\} : C \in S_{L^+}\}$
5. $S_{L=1} = S_{L^0} \cup \left\{C - \{\overline{L}\} : C \in S_{L^-}\right\}$

Nota 1.1.3.3

1. $S = S_{L^+} \cup S_{L^-} \cup S_{L^0}$
2. $S_{L^-} = S_{\overline{L}^+}$
3. $S_{L=1} = S_{\overline{L}=0}$

Lema 1.1.3.4 Sea v una valoración.

1. Si $v(L) = 0$, entonces $v(S) = v\left(S_{L=0}\right)$
2. Si $v(L) = 1$, entonces $v(S) = v\left(S_{L=1}\right)$

Teorema 1.1.3.5 (Regla de bifurcación S es consistente syss $S_{L=0}$ ó $S_{L=1}$ es consistente.

Definición 1.1.3.6 L es un **literal puro** de S si $L \in \bigcup S$ y $\overline{L} \notin \bigcup S$.

Teorema 1.1.3.7 (Regla de los literales puros) Si L es un literal puro de S, entonces S es consistente syss S_{L^0} es consistente.

Definición 1.1.3.8 Una **cláusula unitaria** es una cláusula con un elemento.

Teorema 1.1.3.9 (Regla de las cláusulas unitarias) Si $\{L\} \in S$, entonces S es consistente syss $S_{L=1}$ es consistente.

Algoritmo 1.1.3.10 (de Davis–Putnam)

Entrada: Un conjunto finito de cláusulas, S.

Salida: `Consistente`, si S es consistente; `Inconsistente`, en caso contrario.

Procedimiento DP(S)

$$\text{DP-AUX}(S - \{C : C \text{ es una tautologia}\}, \emptyset)$$

Procedimiento DP–AUX(S,T)

si $S = \emptyset$
entonces devolver `Consistente`
e.o.c. si $\square \in S$
entonces si $T = \emptyset$
entonces devolver `Inconsistente`
e.o.c. DP–AUX(primero(T), resto(T))
e.o.c. si L es un literal puro de S
entonces DP–AUX(S_{L^0}, T)
e.o.c. si $\{L\}$ es una clausula unitaria de S
entonces DP–AUX(S_{L^1}, T)
e.o.c. sea L un literal en S
DP–AUX($S_{L=0}$, cons($S_{L=1}, T$))

Ejemplo 1.1.3.11 Utilizar el algoritmo anterior para comprobar que:

1. $\{\{\neg p, q\}, \{p\}, \{\neg q\}\}$ es consistente.
2. $\{\{p, q, \neg r, s\}, \{\neg q, \neg p, \neg r, s\}, \{\neg q, \neg p, \neg r\}\}$ es consistente.
3. $\{\{\neg q, p\}, \{r, p\}, \{\neg p, \neg q\}, \{\neg p, s\}, \{q, \neg r\}, \{q, \neg s\}\}$ es inconsistente.

Teorema 1.1.3.12 El algoritmo anterior es correcto.

Definición 1.1.3.13 La cláusula C **subsume** a la cláusula D si $C \subset D$.

Teorema 1.1.3.14 (Regla de subsunción) Sean $C, D \in S$. Si C subsume a D, entonces S es consistente syss $S - \{D\}$ es consistente.

Nota 1.1.3.15 El algoritmo de Davis–Putnam puede modificarse para utilizar la regla de subsunción.

1.2 Resolución proposicional

1.2.1 Sistema de reesolución

Definición 1.2.1.1 Sean C_1, C_2 dos cláusulas.

1. Si $L \in C_1$ y $\overline{L} \in C_2$, la **resolvente** de C_1 y C_2 respecto de L es
$$res_L(C_1, C_2) = (C_1 - \{L\}) \cup (C_2 - \{\overline{L}\})$$
2. El **conjunto de resolventes** de C_1 y C_2 es
$$Res(C_1, C_2) = \{res_L(C_1, C_2) : L \in C_1, \overline{L} \in C_2\}$$

Definición 1.2.1.2 Sea S un conjunto de cláusulas.

1. La sucesión $(C_1, \ldots, C_n)$ es una **deducción por resolución** a partir de S si para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ se verifica una de las siguientes condiciones:
   (a) $C_i \in S$.
   (b) existen $j, k < i$ tales que $C_i \in Res(C_j, C_k)$.
2. La cláusula C es **deducible por resolución** a partir de S, $S \vdash C$, si existe una deducción por resolución a partir de S, $(C_1, \ldots, C_n)$, tal que $C_n = C$.
3. La sucesión $(C_1, \ldots, C_n)$ es una **refutación por resolución** de S si es una deducción por resolución a partir de S y $C_n = \square$.
4. S es **refutable** si $S \vdash \square$.

Nota 1.2.1.3 La refutabilidad de un conjunto de cláusulas puede ilustrarse mediante grafos de refutación.

Definición 1.2.1.4 Sea S un conjunto de cláusulas.

1. $Res(S) = S \cup (\bigcup\{Res(C_1, C_2) : C_1, C_2 \in S\})$.
2. La sucesión $(Res^n(S))_{n \geq 0}$ está definida por:
$$Res^0(S) = S$$
$$Res^{n+1} = Res(Res^n(S))$$

3. $Res^*(S) = \bigcup_{n \geq 0} Res^n(S)$

Lema 1.2.1.5 $S \vdash C$ syss $C \in Res^*(S)$.

1.2.2 Validez y completitud de la resolución

Lema 1.2.2.1 (de resolución) Si R es una resolvente de C_1 y C_2, entonces los conjuntos $\{C_1, C_2\}$ y $\{C_1, C_2, R\}$ son equivalentes.

Corolario 1.2.2.2 $S \equiv Res^*(S)$.

Teorema 1.2.2.3 (de corrección) Si $S \vdash \square$, entonces S es inconsistente.

Teorema 1.2.2.4 (de completitud) Si S es inconsistente, entonces $S \vdash \square$.

Corolario 1.2.2.5 S es inconsistente syss $S \vdash \square$.

1.2.3 Algoritmos de resolución

Algoritmo 1.2.3.1 (de resolución por saturación)

Entrada: Un conjunto finito de cláusulas, S.

Salida: `Consistente`, si S es consistente; `Inconsistente`, en caso contrario.

Procedimiento:

Hacer $S' := \emptyset$
mientras que $(\square \notin S)$ **y** $(S \neq S')$
  hacer $S' := S$
    $S := Res(S)$
si $(\square \in S)$
  entonces devolver `Inconsistente`
  e.o.c devolver `Consistente`

Teorema 1.2.3.2 El algoritmo anterior es correcto.

Ejemplo 1.2.3.3 Aplicar el algoritmo anterior al conjunto

$$S = \{\{p, q\}, \{p, \neg q\}, \{\neg p, q\}, \{\neg p, \neg q\}\}$$

Definición 1.2.3.4 El **simplificado** de un conjunto finito de cláusulas S es el conjunto obtenido de S suprimiendo las tautologías y las cláusulas subsumidas por otras; es decir,

$Simp(S) = S - \{C \in S : (C \text{ es una tautología}) \text{ ó } (\text{existe } D \in S \text{ tal que } D \subset C)\}$

Algoritmo 1.2.3.5 (de resolución por saturación con simplificación)

Entrada: Un conjunto finito de cláusulas, S.

Salida: `Consistente`, si S es consistente; `Inconsistente`, en caso contrario.

Procedimiento:

Hacer $S' := \emptyset$
mientras que $(\square \notin S)$ **y** $(S \neq S')$
hacer $S' := S$
$S := Simp(Res(S))$
si $(\square \in S)$
entonces devolver `Inconsistente`
e.o.c devolver `Consistente`

Teorema 1.2.3.6 El algoritmo anterior es correcto.

1.3 Estrategias de resolución

1.3.1 Resolución semántica

Definición 1.3.1.1 Una **interpretación** I es un conjunto de símbolos proposicionales.

Definición 1.3.1.2 La **valoración correspondiente** a la interpretación I está definida por

$$v_I(p) = \begin{cases} 1, & \text{si } p \in I; \\ 0, & \text{si } p \notin I; \end{cases}$$

Definición 1.3.1.3 Sea I una interpretación.

1. I es un **modelo** de una cláusula C, $I \models C$, si $v_I(C) = 1$.

2. I es un **modelo** de un conjunto de cláusulas S, $I \models S$, si $v_I(S) = 1$.

Definición 1.3.1.4 Sea S un conjunto de cláusulas e I una interpretación.

1. El conjunto de las cláusulas de S verdaderas en I es

$$S_T(I) = \{C \in S : I \models C\}.$$

2. El conjunto de las cláusulas de S falsas en I es

$$S_F(I) = S - S_T(I).$$

Definición 1.3.1.5 Sea S un conjunto de cláusulas e I una interpretación.

1. La sucesión $(C_1, \ldots, C_n)$ es una **deducción por I–resolución** a partir de S si para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ se verifica una de las siguientes condiciones:
   (a) $C_i \in S$.
   (b) existen $j, k < i$ tales que $C_i \in Res(C_j, C_k)$ y una de las cláusulas C_j, C_k pertenece a $S_T(I)$ y la otra a $S_F(I)$.
2. La cláusula C es **deducible por I–resolución** a partir de S, $S \vdash_I C$, si existe una deducción por I–resolución a partir de S, $(C_1, \ldots, C_n)$, tal que $C_n = C$.

Definición 1.3.1.6 Sea S un conjunto de cláusulas e I una interpretación.

1. El conjunto de las resolventes de S respecto de I es

$$Res_I(S) = S \cup \left(\bigcup \{Res(C_1, C_2) : C_1 \in S_T(I), C_2 \in S_F(I)\}\right)$$

2. La sucesión $(Res_I^n(S))_{n \geq 0}$ está definida por:

$$\begin{aligned} Res_I^0(S) &= S \\ Res_I^{n+1} &= Res_I(Res_I^n(S)) \end{aligned}$$

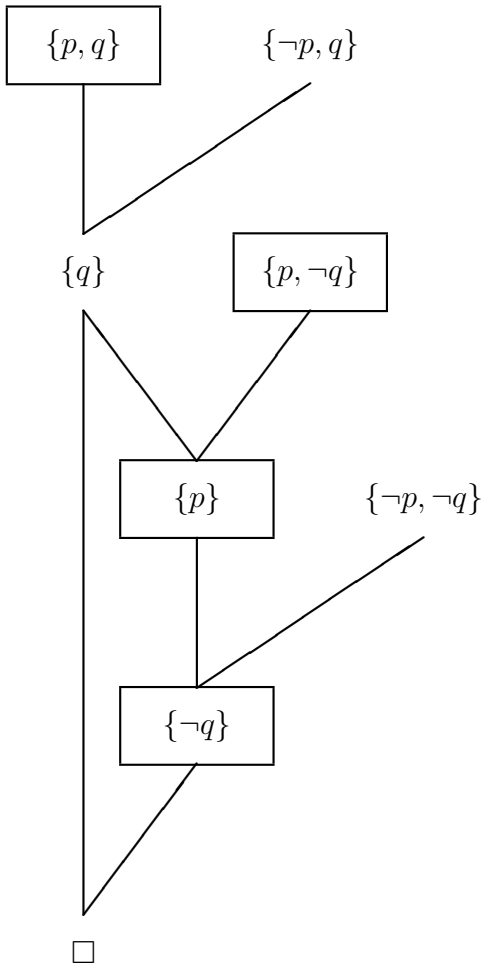
3. $Res_I^*(S) = \bigcup_{n \geq 0} Res_I^n(S)$

Lema 1.3.1.7 $S \vdash_I C$ syss $C \in Res_I^*(S)$.

Ejemplo 1.3.1.8 Sea $S = \{\{p, q\}, \{p, \neg q\}, \{\neg p, q\}, \{\neg p, \neg q\}\}$ e $I = \{p\}$. Entonces

$$(\{p, q\}, \{q\}, \{p\}, \square)$$

es una I–resolución a partir de S. Puede ilustrarse mediante el siguiente diagrama en el que se han encuadrado los elementos de $S_T(I)$.



Teorema 1.3.1.9 (de corrección y completitud de la resolución semántica) Sea I una interpretación. Un conjunto de cláusulas S es inconsistente syss $S \vdash_I \square$.

1.3.2 Resolución $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{N}_1$

Definición 1.3.2.1 Una cláusula es **positiva** si todos sus literales son positivos.

Definición 1.3.2.2 Sea S un conjunto de cláusulas.

1. La sucesión $(C_1, \ldots, C_n)$ es una **deducción por P_1–resolución** a partir de S si para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ se verifica una de las siguientes condiciones:
   (a) $C_i \in S$.
   (b) existen $j, k < i$ tales que $C_i \in Res(C_j, C_k)$ y una de las cláusulas C_j, C_k es positiva.
2. La cláusula C es **deducible por P_1–resolución** a partir de S, $S \vdash_P C$, si existe una deducción por P_1–resolución a partir de S, $(C_1, \ldots, C_n)$, tal que $C_n = C$.

Definición 1.3.2.3 Sea S un conjunto de cláusulas.

1. $S_P = \{C : C \text{ es positiva}\}$
2. El conjunto de las P_1 resolventes de S es
$$Res_P(S) = S \cup \left(\bigcup\{Res(C_1, C_2) : C_1 \in S_P \text{ ó } C_2 \in S_P\}\right)$$
3. La sucesión $(Res_P^n(S))_{n\geq 0}$ está definida por:
$$\begin{array}{l} Res_P^0(S) = S \\ Res_P^{n+1} = Res_P(Res_P^n(S)) \end{array}$$
4. $Res_P^*(S) = \bigcup_{n\geq 0} Res_P^n(S)$

Lema 1.3.2.4 $S \vdash_P C$ syss $C \in Res_P^*(S)$.

Teorema 1.3.2.5 (de corrección y completitud de la P_1–resolución) Un conjunto de cláusulas S es inconsistente syss $S \vdash_P \square$.

Definición 1.3.2.6 Una cláusula es **negativa** si todos sus literales son negativos.

Definición 1.3.2.7 Sea S un conjunto de cláusulas.

1. La sucesión $(C_1, \ldots, C_n)$ es una **deducción por N_1–resolución** a partir de S si para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ se verifica una de las siguientes condiciones:

   (a) $C_i \in S$.

   (b) existen $j, k < i$ tales que $C_i \in Res(C_j, C_k)$ y una de las cláusulas C_j, C_k es negativa.

2. La cláusula C es **deducible por N_1–resolución** a partir de S, $S \vdash_N C$, si existe una deducción por N_1–resolución a partir de S, $(C_1, \ldots, C_n)$, tal que $C_n = C$.

Definición 1.3.2.8 Sea S un conjunto de cláusulas.

1. $S_N = \{C : C \text{ es negativa}\}$

2. El conjunto de las N_1 resolventes de S es

$$Res_N(S) = S \cup \left(\bigcup \{Res(C_1, C_2) : C_1 \in S_N \text{ ó } C_2 \in S_N\}\right)$$

3. La sucesión $(Res_N^n(S))_{n \geq 0}$ está definida por:

$$Res_N^0(S) = S$$
$$Res_N^{n+1} = Res_N(Res_N^n(S))$$

4. $Res_N^*(S) = \bigcup_{n \geq 0} Res_N^n(S)$

Lema 1.3.2.9 $S \vdash_N C$ syss $C \in Res_N^*(S)$.

Teorema 1.3.2.10 (de corrección y completitud de la N_1–resolución) Un conjunto de cláusulas S es inconsistente syss $S \vdash_N \square$.

1.3.3 Resolución lineal

Definición 1.3.3.1 Sea S un conjunto de cláusulas.

1. La sucesión $(C_0, C_1, \ldots, C_n)$ es una **resolución lineal** a partir de S si se cumplen las siguientes condiciones:

(a) $C_0 \in S$;

(b) para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, existe un $B \in S \cup \{C_0, \ldots, C_{i-1}\}$ tal que $C_i \in Res(C_{i-1}, B)$.

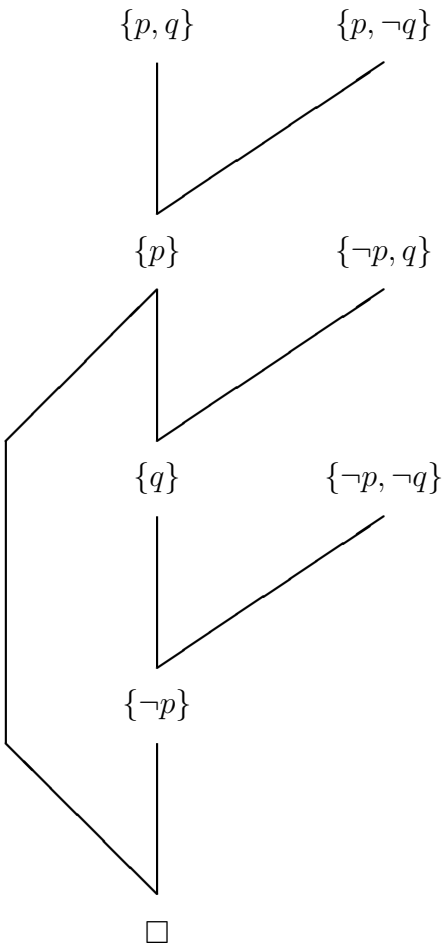
La cláusula C_0 se llama **cláusula base**, las C_i se llaman **cláusulas centrales** y las B se llaman **cláusulas laterales**.

2. La cláusula C es **deducible por resolución lineal** a partir de S, $S \vdash_L C$, si existe una deducción por resolución lineal a partir de S, $(C_0, \ldots, C_n)$, tal que $C_n = C$.

Ejemplo 1.3.3.2 Sea $S = \{\{p, q\}, \{p, \neg q\}, \{\neg p, q\}, \{\neg p, \neg q\}\}$. Entonces

$$(\{p, q\}, \{p\}, \{q\}, \square)$$

es una resolución lineal a partir de S. Puede ilustrarse mediante el siguiente diagrama.



Teorema 1.3.3.3 (de corrección y completitud de la resolución lineal) Un conjunto de cláusulas S es inconsistente syss $S \vdash_L \square$.

1.3.4 Resolución con soporte

Definición 1.3.4.1 Sea S un conjunto de cláusulas y $T \subseteq S$ tal que $S - T$ es consistente.

1. La sucesión $(C_1, \ldots, C_n)$ es una **deducción por resolución con soporte** T a partir de S si para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ se verifica una de las siguientes condiciones:

   (a) $C_i \in S$.

(b) existen $j, k < i$ tales que $C_i \in Res(C_j, C_k)$ y una de las cláusulas C_j, C_k no pertenece a $S - T$.

2. La cláusula C es **deducible por resolución con soporte** T a partir de S, $S \vdash_T C$, si existe una deducción por resolución con soporte T a partir de S, $(C_1, \ldots, C_n)$, tal que $C_n = C$.

Definición 1.3.4.2 Sea S un conjunto de cláusulas y $T \subseteq S$ tal que $S - T$ es consistente,

1. El conjunto de las resolventes de S con soporte en T es

$$Res_T(S) = S \cup \left(\bigcup \{ Res(C_1, C_2) : C_1 \notin S - T \text{ ó } C_2 \notin S - T \} \right)$$

2. La sucesión $(Res_T^n(S))_{n \geq 0}$ está definida por:

$$Res_T^0(S) = S$$
$$Res_T^{n+1} = Res_T(Res_T^n(S))$$

3. $Res_T^*(S) = \bigcup_{n \geq 0} Res_T^n(S)$

Lema 1.3.4.3 $S \vdash_T C$ syss $C \in Res_T^*(S)$.

Teorema 1.3.4.4 (de corrección y completitud de la resolución con soporte) Sea S un conjunto de cláusulas y $T \subseteq S$ tal que $S - T$ es consistente. Entonces S es inconsistente syss $S \vdash_T \square$.

1.3.5 Resolución unidad y por entradas

Definición 1.3.5.1 Sea S un conjunto de cláusulas.

1. La sucesión $(C_1, \ldots, C_n)$ es una **deducción por resolución unidad** a partir de S si para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ se verifica una de las siguientes condiciones:

   (a) $C_i \in S$.

   (b) existen $j, k < i$ tales que $C_i \in Res(C_j, C_k)$ y una de las cláusulas C_j, C_k es una cláusula unitaria.

2. La cláusula C es **deducible por resolución unitaria** a partir de S, $S \vdash_U C$, si existe una deducción por resolución unidad a partir de S, $(C_1, \ldots, C_n)$, tal que $C_n = C$.

Lema 1.3.5.2 (Corrección de la resolución unidad) Si $S \vdash_U \square$, entonces S es inconsistente.

Definición 1.3.5.3 Sea S un conjunto de cláusulas.

1. El conjunto de las resolventes unidad de S es

$$Res_U(S) = S \cup \left(\bigcup \{ Res(C_1, C_2) : C_1 \text{ ó } C_2 \text{ es una cláusula unitaria} \} \right)$$

2. La sucesión $(Res_U^n(S))_{n \geq 0}$ está definida por:

$$\begin{aligned} Res_U^0(S) &= S \\ Res_U^{n+1} &= Res_U(Res_U^n(S)) \end{aligned}$$

3. $Res_U^*(S) = \bigcup_{n \geq 0} Res_U^n(S)$

Lema 1.3.5.4 $S \vdash_U C$ syss $C \in Res_U^*(S)$.

Ejemplo 1.3.5.5 Si $S = \{\{p, q\}, \{p, \neg q\}, \{\neg p, q\}, \{\neg p, \neg q\}\}$, entonces $Res_U^*(S) = S$.

Nota 1.3.5.6 (Incompletitud de la resolución unidad) Existen conjuntos inconsistentes S para los cuales $S \nvdash_U \square$.

Definición 1.3.5.7 Sea S un conjunto de cláusulas.

1. La sucesión $(C_1, \ldots, C_n)$ es una **deducción por resolución por entradas** a partir de S si para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ se verifica una de las siguientes condiciones:
   (a) $C_i \in S$.
   (b) existen $j, k < i$ tales que $C_i \in Res(C_j, C_k)$ y una de las cláusulas C_j, C_k pertenece a S.

2. La cláusula C es **deducible por resolución por entradas** a partir de S, $S \vdash_E C$, si existe una deducción por resolución por entradas a partir de S, $(C_1, \ldots, C_n)$, tal que $C_n = C$.

Lema 1.3.5.8 (Corrección de la resolución por entradas) Si $S \vdash_E \square$, entonces S es inconsistente.

Definición 1.3.5.9 Sea S un conjunto de cláusulas.

1. El conjunto de las resolventes por entradas de S es

$$Res_E(S) = S \cup \left(\bigcup \{ Res(C_1, C_2) : C_1 \in S \text{ ó } C_2 \in S \} \right)$$

2. La sucesión $(Res_E^n(S))_{n \geq 0}$ está definida por:

$$\begin{aligned} Res_E^0(S) &= S \\ Res_E^{n+1} &= Res_E(Res_E^n(S)) \end{aligned}$$

3. $Res_E^*(S) = \bigcup_{n \geq 0} Res_E^n(S)$

Lema 1.3.5.10 $S \vdash_E C$ syss $C \in Res_E^*(S)$.

Ejemplo 1.3.5.11 Si $S = \{\{p, q\}, \{p, \neg q\}, \{\neg p, q\}, \{\neg p, \neg q\}\}$, entonces $Res_E^*(S) = S \cup \{\{p\}, \{q\}, \{\neg p\}, \{\neg q\}\}$.

Nota 1.3.5.12 (Incompletitud de la resolución por entrada) Existen conjuntos inconsistentes S para los cuales $S \nvdash_E \square$.

Teorema 1.3.5.13 $S \vdash_U \square$ syss $S \vdash_E \square$.

1.4 Resolución para cláusulas de Horn proposicionales

1.4.1 Cláusulas de Horn

Definición 1.4.1.1 Una cláusula C es una **cláusula de** Horn si contiene como máximo un literal positivo.

Definición 1.4.1.2

1. Las cláusulas de Horn se clasifican en **negativas** (si tiene todos sus literales negativos) y **definidas** (si tiene un literal positivo).
2. Las cláusulas definidas se clasifican en **hechos** (si son unitarias) y **reglas**.

Lema 1.4.1.3

1. $\{\neg p_1, \ldots, \neg p_n, q\} \equiv \bigwedge_{i=1}^{n} p_i \rightarrow q$
2. $\{\neg p_1, \ldots, \neg p_n\} \equiv \neg \left(\bigwedge_{i=1}^{n} p_i \right)$

Lema 1.4.1.4 Sea S un conjunto de cláusulas de Horn tal que $\square \notin S$.

1. Si S no contiene cláusulas negativas, entonces S es consistente.
2. Si S no contiene hechos, entonces S es consistente.

1.4.2 Resolución y cláusulas de Horn

Teorema 1.4.2.1 (completitud de la resolución unidad para cláusulas de Horn) Sea S un conjunto de cláusulas de Horn. Si S es inconsistente, entonces $S \vdash_U \square$.

Corolario 1.4.2.2 (completitud de la resolución por entradas para cláusulas de Horn) Sea S un conjunto de cláusulas de Horn. Si S es inconsistente, entonces $S \vdash_E \square$.

Algoritmo 1.4.2.3

Entrada: Un conjunto finito de cláusulas de Horn, S.

Salida: `Consistente`, si S es consistente; `Inconsistente`, en caso contrario.

Procedimiento:

Hacer $S_1 := \{C \in S : C \text{ es un hecho}\}$
$S_2 := S - S_1$
mientras que $S_1 \neq \emptyset$ **y** $(\square \notin S_2)$
hacer $C_1 := car(S_1)$
$L \in C_1$
si $\overline{L} \in \bigcup S_2$
entonces $S_1 := S_1 - \{C_1\}$
e.o.c. $C_2 := car(\{C \in S_2 : \overline{L} \in C\})$
$S_2 := S_2 - \{C_2\}$
$C_3 := res(C_1, C_2)$
si C_3 es un hecho
entonces $S_1 := S_1 \cup \{C_3\}$
e.o.c. $S_2 := S_2 \cup \{C_3\}$
si $S = \emptyset$
entonces devolver `Consistente`
e.o.c devolver `Inconsistente`

Teorema 1.4.2.4 El algoritmo anterior es correcto y su complejidad es de orden n^2, donde $n = \sum_{C \in S} |C|$.

1.4.3 Resolución SLD

Definición 1.4.3.1 Sea S un conjunto de cláusulas de Horn.

1. La sucesión $(C_0, C_1, \ldots, C_n)$ es una **resolución SLD** a partir de S si se cumplen las siguientes condiciones:

   (a) $C_0 \in S$ es una cláusula negativa;

   (b) para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, existe una cláusula no negativa $B \in S$ tal que $C_i \in Res(C_{i-1}, B)$.

   La cláusula C_0 se llama **cláusula base**, las C_i se llaman **cláusulas centrales** y las B se llaman **cláusulas laterales**.

2. La cláusula C es **deducible por resolución SLD** a partir de S, $S \vdash_{SLD} C$, si existe una deducción por resolución SLD a partir de S, $(C_0, \ldots, C_n)$, tal que $C_n = C$.

Nota 1.4.3.2 El nombre de SLD viene de "Linear resolution whit Selection function for Definite clauses".

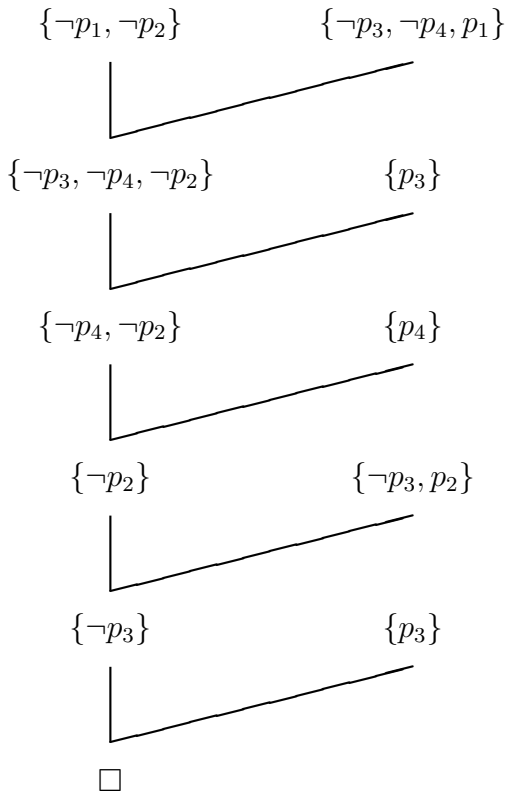
Ejemplo 1.4.3.3 Sea

$$S = \{\{p_3\}, \{p_4\}, \{\neg p_1, \neg p_2\}, \{\neg p_3, \neg p_4, p_1\}, \{\neg p_3, p_2\}, \{\neg p_1, \neg p_2\}\}.$$

Entonces

$$(\{\neg p_1, \neg p_2\}, \{\neg p_3, \neg p_4, \neg p_2\}, \{\neg p_4, \neg p_2\}, \{\neg p_2\}, \{\neg p_3\}, \square\})$$

es una resolución SLD partir de S. Puede ilustrarse mediante el siguiente diagrama.



Teorema 1.4.3.4 (de corrección y completitud de la resolución SLD) Un conjunto de cláusulas de Horn S es inconsistente syss $S \vdash_{SLD} \square$.

Capítulo 2

Deducción automática en lógica de primer orden

2.1 Cláusulas de primer orden

2.1.1 Cláusulas: sintaxis y semántica

Definición 2.1.1.1 Sea **L** un lenguaje de primer orden sin igualdad.

1. Un **átomo** es una fórmula atómica de **L**.
2. Un **literal** es un átomo o su negación.
3. Un literal es **positivo** si es un átomo y **negativo**, en caso contrario.
4. El **complementario** de un literal L es

$$\overline{L} = \begin{cases} \neg pt_1 \dots t_n & \text{si } L = pt_1 \dots t_n; \\ pt_1 \dots t_n & \text{si } L = \neg pt_1 \dots t_n; \end{cases}$$

5. Los literales L y L' son **complementarios** si $L' = \overline{L}$.
6. Una **cláusula** es un conjunto finito de literales.
7. La **cláusula vacía** es el conjunto vacío y se representa por $\square$.

Nota 2.1.1.2 Usaremos las siguientes variables sintácticas:

1. A, B, C para átomos.

2. L para literales.

3. C, D para cláusulas.

4. S, P para conjuntos de cláusulas.

Definición 2.1.1.3 Sea **M** una **L**–estructura y θ una sustitución

1. Para cada literal L,

$$\theta(L) = \begin{cases} p\theta(t_1)\dots\theta(t_n), & \text{si } L = pt_1\dots t_n; \\ \neg p\theta(t_1)\dots\theta(t_n), & \text{si } L = \neg pt_1\dots t_n; \end{cases}$$

2. Para cada cláusula C,

$$\theta(C) = \{\theta(L) : L \in C\}$$

3. Para cada conjunto de cláusulas S,

$$\theta(S) = \{\theta(C) : C \in S\}$$

Definición 2.1.1.4 Sea **M** una **L**–estructura y σ una asignación.

1. Para cada literal L,

$$\sigma'(L) = \begin{cases} p_{\mathbf{M}}(\sigma(t_1), \dots, \sigma(t_n)), & \text{si } L = pt_1\dots t_n; \\ 1 - p_{\mathbf{M}}(\sigma(t_1), \dots, \sigma(t_n)), & \text{si } L = \neg pt_1\dots t_n; \end{cases}$$

2. Para cada cláusula C,

$$\sigma''(C) = 1 \text{ syss existe un } L \in C \text{ tal que } \sigma'(L) = 1$$

3. Para cada conjunto de cláusulas S,

$$\sigma'''(S) = 1 \text{ syss para todo } C \in S,\ \sigma''(C) = 1$$

Lema 2.1.1.5 Sea **M** una **L**–estructura y σ una asignación.

1. $\sigma''(\square) = 0$.

2. $\sigma'''(\emptyset) = 1$.

Nota 2.1.1.6 En lo que sigue, escribiremos $\sigma(L), \sigma(C)$ ó $\sigma(S)$ en lugar de $\sigma'(L), \sigma''(C)$ ó $\sigma'''(S)$

Definición 2.1.1.7 Sea **L** un lenguaje de primer orden y C una cláusula.

1. C es **válida en** la **L**–estructura **M respecto de** la asignación σ, $\mathbf{M} \models_\sigma \mathbf{C}$, si $\sigma(C) = 1$.
2. C es **válida en** la **L**–estructura **M**, $\mathbf{M} \models \mathbf{C}$, si $\sigma(C) = 1$ para todas las asignaciones σ. En este caso, se dice que **M** es un **modelo** de C.
3. C es **válida**, $\models C$, si es válida en todas las **L**–estructuras.
4. C es **consistente** (o **satisfacible**) si tiene algún modelo.

Definición 2.1.1.8 Sea **L** un lenguaje de primer orden y S un conjunto de cláusulas.

1. S es **válido en** la **L**–estructura **M respecto de** la asignación σ, $\mathbf{M} \models_\sigma \mathbf{S}$, si $\sigma(F) = 1$ para toda $F \in S$.
2. S es **válido en** la **L**–estructura **M**, $\mathbf{M} \models \mathbf{S}$, si $\mathbf{M} \models_\sigma \mathbf{S}$ para todas las asignaciones σ. En este caso, se dice que **M** es un **modelo** de S.
3. S es **válido**, $\models S$, si es válido en todas las **L**–estructuras.
4. S es **consistente** (o **satisfacible**) si tiene algún modelo.

Definición 2.1.1.9 Sea **L** un lenguaje de primer orden y S, S' dos conjuntos de cláusulas.

1. S' es **consecuencia semántica** de S, $S \models S'$, si todos los modelos de S también son modelos de S'.
2. La cláusula C es **consecuencia semántica** de S, $S \models C$, si todos los modelos de S también son modelos de C.

Nota 2.1.1.10

1. Si $S \subseteq S'$ y S' es consistente, entonces S es consistente.
2. Si $\square \in S$, entonces S es inconsistente.

2.1.2 Cláusulas y fórmulas

Definición 2.1.2.1

1. El conjunto de fórmulas correspondiente a la cláusula $C \neq \Box$ es

$$Form(C) = \left\{ \forall \left(\bigvee_{i=1}^{n} L_i \right) : C = \{L_1, \ldots, L_n\} \right\}$$

2. El conjunto de fórmulas correspondiente al conjunto de cláusulas $C \neq \emptyset$ es

$$Form(S) = \left\{ \bigwedge_{i=1}^{n} F_i : S = \{C_1, \ldots, C_n\}, F_i \in Form(C_i) \right\}$$

Lema 2.1.2.2

1. Si $F, G \in Form(C)$, entonces F y G son equivalentes.
2. Si $F, G \in Form(S)$, entonces F y G son equivalentes.

Definición 2.1.2.3 Un conjunto de cláusulas S es una **forma clausal** de la fórmula F si son equiconsistentes (es decir, F es consistente syss S es consistente).

Lema 2.1.2.4 Una forma clausal de la fórmula cerrada

$$\forall x_1 \ldots \forall x_k \bigwedge_{i=1}^{n} \left(\bigvee_{j=1}^{m_i} L_{i,j} \right)$$

es

$$\{\{L_{i,j} : 1 \leq j \leq m_i\} : 1 \leq i \leq n\}$$

Corolario 2.1.2.5 Existe un algoritmo para calcular formas clausales de fórmulas

Algoritmo 2.1.2.6

Entrada: Un conjunto finito de fórmulas cerradas, Γ, y una fórmula cerrada, G.

Salida: Un conjunto de cláusulas, S, tal que S es consistente syss $\Gamma \models G$.

Procedimiento:

- Sea $\Gamma_1 = \Gamma \cup \{\neg G\}$.
- Sea Γ_2 el conjunto de las formas prenexas de las fórmulas de Γ_1.
- Sea Γ_3 el conjunto de las formas de Skolem de las fórmulas de Γ_2.
- Sea Γ_4 el conjunto de las formas normales de las fórmulas de Γ_3.
- Sea S_1 el conjunto de las formas clausales de las fórmulas de Γ_4.
- Devolver $S = \bigcup S_1$.

Ejemplo 2.1.2.7 Sea

$$\Gamma = \{(\forall x)[p(x) \to (\exists y)[r(y) \wedge q(x,y)]], \quad (\exists x)p(x)\}$$

y $G = (\exists x)(\exists y)q(x,y)$. Entonces,

$$\begin{array}{lll}
\Gamma_1 & = \{ & (\forall x)[p(x) \to (\exists y)[r(y) \wedge q(x,y)]], \\
 & & (\exists x)p(x), \\
 & & \neg(\exists x)(\exists y)q(x,y)\} \\
\Gamma_2 & = \{ & (\forall x)(\exists y)[\neg p(x) \vee (r(y) \wedge q(x,y))], \\
 & & (\exists x)p(x), \\
 & & (\forall x)(\forall y)\neg q(x,y)\} \\
\Gamma_3 & = \{ & (\forall x)[\neg p(x) \vee (r(f(x)) \wedge q(x,f(x)))], \\
 & & p(a), \\
 & & \neg q(x,y)\} \\
\Gamma_4 & = \{ & (\forall x)[(\neg p(x) \vee r(f(x))) \wedge (\neg p(x) \vee q(x,f(x)))], \\
 & & p(a), \\
 & & \neg q(x,y)\} \\
S_1 & = \{ & \{\{\neg p(x), r(f(x))\}, \{\neg p(x), q(x,f(x))\}\}, \\
 & & \{\{p(a)\}\}, \\
 & & \{\{\neg q(x,y)\}\}\} \\
S & = \{ & \{\neg p(x), r(f(x))\}, \\
 & & \{\neg p(x), q(x,f(x))\}, \\
 & & \{p(a)\}, \\
 & & \{\neg q(x,y)\}\}
\end{array}$$

2.2 Métodos de deducción basados directamente en el teorema de Herbrand

2.2.1 Teorema de Herbrand

Nota 2.2.1.1 En lo que sigue, **L** es un lenguaje de primer orden cuyo conjunto de constantes es no vacío (en caso contrario, se le añade una constante, a).

Definición 2.2.1.2

1. El **universo de Herbrand U(L)** de **L** es el conjunto de los términos cerrados de **L**.
2. La **base de Herbrand** de **L**, **B(L)**, es el conjunto de los átomos cerrados de **L**.

Definición 2.2.1.3 Una **L** estructura **M** es una **estructura de Herbrand** de **L** si:

1. El universo de **M** es el universo de Herbrand de **L**; es decir,
$$M = \mathbf{U}(\mathbf{L})$$
2. Para toda constante c de **L**,
$$c_{\mathbf{M}} = c$$
3. Para todo símbolo de función f de aridad $n > 0$, y todo $t_1, \ldots, t_n \in \mathbf{U}(\mathbf{L})$,
$$f_{\mathbf{M}}(t_1, \ldots, t_n) = ft_1 \ldots t_n$$

Definición 2.2.1.4 Una **interpretación de Herbrand** de **L** es un subconjunto de la base de Herbrand de **L**.

Nota 2.2.1.5 Usaremos los símbolos $I, I_1, I_2, \ldots$ para representar interpretaciones de Herbrand.

Lema 2.2.1.6 Sea $\mathbb{M}$ el conjunto de las estructuras de Herbrand de $\mathbf{L}$ e $\mathbb{I}$ el conjunto de las interpretaciones de Herbrand de $\mathbf{L}$. Las aplicaciones

$$\Phi : \mathbf{M} \in \mathbb{M} \mapsto \mathbf{\Phi}(\mathbf{M}) = \{\mathbf{A} \in \mathbf{B_L} : \mathbf{M} \models \mathbf{A}\} \in \mathbb{I}$$
$$\Psi : I \in \mathbb{I} \mapsto \Psi(I) = \mathbf{M} \in \mathbb{M},$$

donde $\mathbf{M}$ es la $\mathbf{L}$–estructura de Herbrand tal que para todo símbolo de predicado de aridad n y para todo $t_1, \ldots, t_n \in \mathbf{U}(\mathbf{L})$,

$$p_{\mathbf{M}}(t_1, \ldots, t_n) = 1 \text{ syss } pt_1 \ldots t_n \in I,$$

son biyectivas. Además, $\Phi^{-1} = \Psi$.

Nota 2.2.1.7 En lo sucesivo, identificaremos las estructuras de Herbrand de $\mathbf{L}$ y sus interpretaciones de Herbrand.

Definición 2.2.1.8 Un **modelo de Herbrand** de un conjunto Γ de fórmulas de $\mathbf{L}$ es una estructura de Herbrand de $\mathbf{L}$ que es un modelo de Γ.

Nota 2.2.1.9 Los conceptos de universo, base, estructuras, interpretaciones y modelos de Herbrand definidos anteriormente para el lenguaje $\mathbf{L}$ se aplican a fórmulas, conjuntos de fórmulas, cláusulas y conjuntos de cláusulas, considerando en cada caso el lenguaje formado a partir de sus símbolos de funciones y predicados.

Lema 2.2.1.10 Sea I una interpretación de Herbrand y

$$C = \{A_1, \ldots, A_n, \neg B_1, \ldots, \neg B_m\}$$

una cláusula. Son equivalentes:

1. $I \models C$
2. Para toda sustitución $\theta : V \to U(C)$,

$$\{\theta(B_1), \ldots, \theta(B_m)\} \subseteq I \quad \Longrightarrow \quad \{\theta(A_1), \ldots, \theta(A_m)\} \cap I \neq \emptyset$$

Lema 2.2.1.11 Sea $\mathbf{M}$ una $\mathbf{L}$–estructura de Herbrand y θ una asignación. Entonces,

$$\theta(F[x/t]) = \theta[x/t](F)$$

Teorema 2.2.1.12 Si un conjunto de cláusulas S es consistente, entonces tiene un modelo de Herbrand.

Corolario 2.2.1.13 Un conjunto de cláusulas S es inconsistente syss no tiene modelos de Herbrand.

Definición 2.2.1.14 Sea S un conjunto finito de cláusulas.

1. La sustitución θ es **básica** si $rang(\theta) \subseteq U(S)$.
2. La cláusula C' es una **instancia básica** de la cláusula $C \in S$ si existe una sustitución básica, θ, tal que $C' = \theta(C)$.
3. La **extensión de Herbrand** de S, $E(S)$, es el conjunto de las instancias básicas de las cláusulas de S.

Nota 2.2.1.15 Mediante la extensión de Herbrand asociamos a un conjunto finito de cláusulas de primer orden un conjunto (posiblemente infinito) de cláusulas del cálculo proposicional.

Teorema 2.2.1.16 (de Skolem–Herbrand–Gödel) Sea S un conjunto finito de cláusulas. Entonces S es consistente syss $E(S)$ es consistente (en el sentido de la lógica proposicional).

Teorema 2.2.1.17 (de Herbrand) Sea S un conjunto finito de cláusulas. Entonces S es inconsistente syss $E(S)$ contiene un subconjunto finito inconsistente (en el sentido de la lógica proposicional).

2.2.2 Métodos de deducción

Definición 2.2.2.1 Sea S un conjunto de cláusulas.

1. La sucesión $(U_i(S))_{i\geq 0}$ está definida por:

$$\begin{array}{lcl} U_0(S) & = & \left\{ \begin{array}{ll} \text{el conjunto de constantes de } S, & \text{si tiene alguna;} \\ \{a\}, & \text{en caso contrario.} \end{array} \right. \\ U_{i+1}(S) & = & U_i(S) \cup \{ft_1 \ldots t_n : f \text{ función } n\text{–aria y } t_1, \ldots, t_n \in U_i(S)\} \end{array}$$

2. Para cada $i \geq 0$,

$$S_i = \{\theta(C) : C \in S \text{ y } \theta \text{ es una sustitución tal que } rang(\theta) \subseteq U_i(S)\}$$

Lema 2.2.2.2 Sea S un conjunto de cláusulas.

1. $U(L) = \bigcup_{i \geq 0} U_i(S)$.

2. S es inconsistente syss existe un $i \geq 0$ tal que S_i es inconsistente.

Algoritmo 2.2.2.3

Entrada: Un conjunto finito de cláusulas, S.

Salida: `Inconsistente`, si S es inconsistente.

Procedimiento:

Hacer $i := 0$
mientras que S_i es consistente (en el sentido proposicional)
hacer $i := i + 1$
devolver `Inconsistente`

Nota 2.2.2.4 Para determinar la consistencia de los conjuntos S_i se utilizan los algoritmos estudiados para la lógica proposicional; en particular, el algoritmo de Davis–Putnam.

Ejemplo 2.2.2.5 Para el conjunto

$$S = \{\{q(x), \neg p(x)\}, \{p(f(x))\}, \{\neg q(f(x))\}\}$$

se obtiene

$S_0 = \{\{q(a), \neg p(a)\}, \{p(f(a))\}, \{\neg q(f(a))\}\}$ es consistente,
$S_1 = S_0 \cup \{\{q(f(a)), \neg p(f(a))\}, \{p(f(f(a)))\}, \{\neg q(f(f(a)))\}\}$ es inconsistente;

por tanto, S es inconsistente.

Algoritmo 2.2.2.6 (de resolución básica)

Entrada: Un conjunto finito de cláusulas, S.

Salida: `Inconsistente`, si S es inconsistente.

Procedimiento:

Hacer $i := 0$
mientras que $\square \notin Res^*(S_i)$
hacer $i := i + 1$
devolver `Inconsistente`

Nota 2.2.2.7 Los algoritmos anteriores requieren la generación de los conjuntos S_i que pueden crecer exponencialmente. Por ejemplo, si

$$S = \{\{p(x, g(x), y, h(x, y), z, k(x, y, z))\}, \{\neg p(u, v, e(v), w, f(v, w), x)\}\},$$

entonces $|U_0(S)| = 1$, $|U_1(S)| = 6$, ..., y $|S_0| = 2$, $|S_1| = 4825$,.... El primer conjunto S_i inconsistente es S_5 que tiene del orden de 10^{256} elementos.

2.3 Sustitución y unificación

2.3.1 Comparación de términos

Nota 2.3.1.1 En lo que sigue, **L** es un lenguaje de primer orden y T es el conjunto de sus términos.

Definición 2.3.1.2 En T se define la relación $\leq$ por

$$t_1 \leq t_2 \text{ syss existe una sustitución } \theta \text{ tal que } \theta(t_1) = t_2.$$

Si $t_1 \leq t_2$ se dice que t_1 es **menos particular** que t_2; o bien, que t_2 es una **instancia** de t_1.

Ejemplo 2.3.1.3

$$x \leq f(x, y) \leq f(g(y), y) \leq f(g(x), x) \leq f(g(a), a).$$

Lema 2.3.1.4 La relación $\leq$ es un preorden en T (i.e. es reflexiva y transitiva en T).

Definición 2.3.1.5 En T se define la relación $\equiv$ por

$$t_1 \equiv t_2 \text{ syss } t_1 \leq t_2 \wedge t_2 \leq t_1$$

Si $t_1 \equiv t_2$ se dice que t_1 y t_2 son **equivalentes**.

Ejemplo 2.3.1.6 $f(g(x, a), y) \equiv f(g(x, a), z)$.

Definición 2.3.1.7 Una **permutación** es una aplicación $\xi : V \to V$ biyectiva.

Lema 2.3.1.8 Para cada permutación ξ existe una única aplicación $\hat{\xi} : T \to T$ definida por:

$$\hat{\xi}(t) = \begin{cases} \xi(t), & \text{si } t \text{ es una variable;} \\ f\hat{\xi}(t_1), \ldots, \hat{\xi}(t_n), & \text{si } t = ft_1 \ldots t_n \end{cases}$$

En lo sucesivo, escribiremos $\xi(t)$ en lugar de $\hat{\xi}(t)$.

Lema 2.3.1.9 $t_1 \equiv t_2$ syss existe una permutación ξ tal que $\xi(t_1) = t_2$.

Nota 2.3.1.10 Si $t_1 \equiv t_2$ se dice que t_2 es una **variante** de t_1.

Lema 2.3.1.11 La relación $\equiv$ es de equivalencia en T.

Definición 2.3.1.12

1. Para cada témino t, representaremos por $[t]$ su clase de equivalencia; i.e.
$$[t] = \{t' \in T : t' \equiv t\}$$
2. Representaremos por $\mathbf{T}$ el conjunto cociente de T respecto de $\equiv$; i.e.
$$\mathbf{T} = \{[\mathbf{t}] : \mathbf{t} \in \mathbf{T}\}$$

Definición 2.3.1.13 En $\mathbf{T}$ se define la relación

$$[t] \leq [t'] \text{ syss } t \leq t'$$

Lema 2.3.1.14 La relación $\leq$ es un orden parcial en $\mathbf{T}$.

Nota 2.3.1.15 El menor elemento de $\mathbf{T}$ es el conjunto de las variables.

Definición 2.3.1.16

1. El conjunto de variables de un término t se representa por $var(t)$.
2. El número de variables distintas de un término t se representa por $\nu(t)$.
3. El **tamaño** del término t se define por:
$$|t| = \begin{cases} 0, & \text{si } t \text{ es una variable;} \\ 1 + \sum_{i=1}^{n} |t_i|, & \text{si } t = t_1 \ldots t_n \end{cases}$$

4. La aplicación $\mu : T \to T$ está definida por:

$$\mu(t) = |t| - \nu(t)$$

Definición 2.3.1.17

1. En T se define la relación

$$t_1 < t_2 \iff (t_1 \leq t_2) \wedge \neg(t_2 \leq t_1)$$

2. En $\mathbf{T}$ se define la relación

$$[t_1] < [t_2] \iff t_1 < t_2$$

Lema 2.3.1.18 Si $t_1 < t_2$, entonces $\mu(t_1) < \mu(t_2)$.

Lema 2.3.1.19

1. La relación $<$ está bien fundamentada en T; i.e. no existen sucesiones infinitas decrecientes.
2. La relación $<$ es un buen orden (estricto) en $\mathbf{T}$.

Definición 2.3.1.20 Sea φ una biyección entre $T \times T$ y V. Definimos la operación binaria $\cap$ en T por

$$t \cap t' = \begin{cases} f(t_1 \cap t'_1, \ldots t_n \cap t'_n), & \text{si } t = f(t_1, \ldots t_n) \text{ y } t' = f(t'_1, \ldots t'_n) \\ \varphi(t, t'), & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Lema 2.3.1.21

1. $t \cap t' \leq t$ y $t \cap t' \leq t'$
2. $t'' \leq t \wedge t'' \leq t' \implies t'' \cap t \leq t'$

Definición 2.3.1.22 En $\mathbf{T}$ se define la operación

$$[t] \cap [t'] = [t \cap t']$$

Ejemplo 2.3.1.23 $[f(g(x, a), h(b))] \cap [f(g(y, c), d)] = [f(g(u, v), w)]$

Lema 2.3.1.24 En $(\mathbf{T}, <)$, $[t] \cap [t']$ es el ínfimo de t y t'.

Nota 2.3.1.25 Representaremos por $\mathcal{T}$ el conjunto obtenido añadiéndole a $\mathbf{T}$ un mayor elemento $\top$.

Definición 2.3.1.26 Un conjunto parcialmente ordenado, $(L, \leq)$, es un **retículo completo** si para todo $X \subseteq L$, existe el supremo, $sup(X)$, y el ínfimo, $inf(X)$.

Ejemplo 2.3.1.27 Si S es un conjunto, entonces $(\mathbf{P}(\mathbf{S}), \subseteq)$ es un retículo completo.

Teorema 2.3.1.28 $(\mathcal{T}, <)$ es un retículo completo.

Corolario 2.3.1.29 Si dos términos t y t' tiene una cota superior (i.e. una instancia común $\theta(t) = \theta'(t')$), entonces tienen un supremo, que se representa por $t \cup t'$ y es único módulo $\equiv$.

Ejemplo 2.3.1.30 $f(a, x_1, x_2) \cup f(x_3, x_3, x_4) \equiv f(a, a, x_5)$

2.3.2 Comparación de sustituciones

Definición 2.3.2.1 En el conjunto de las sustituciones se define la relación

$$\theta \leq \theta' \text{ syss existe una sustitución } \theta'' \text{ tal que } \theta''\theta = \theta'.$$

Si $\theta \leq \theta'$ se dice que θ es **menos particular** que θ'.

Lema 2.3.2.2 La relación $\leq$ es reflexiva y transitiva en el conjunto de las sustituciones.

Lema 2.3.2.3 Si $\mathbf{L}$ tiene símbolos de funciones, entonces

$$\theta \leq \theta' \text{ syss para todo término } t,\ \theta(t) \leq \theta'(t).$$

Definición 2.3.2.4 En el conjunto de las sustituciones se define la relación

$$\theta \equiv \theta' \quad \Longleftrightarrow \quad \theta \leq \theta' \wedge \theta' \leq \theta$$

Si $\theta \equiv \theta'$ se dice que θ es **equivalente** a θ'.

Lema 2.3.2.5 $\theta \equiv \theta'$ syss existe una permutación ξ tal que $\xi\theta = \theta'$.

Lema 2.3.2.6 La relación $\equiv$ es de equivalencia en el conjunto de las sustituciones.

Lema 2.3.2.7 Si **L** tiene símbolos de funciones, entonces

$$\theta \equiv \theta' \text{ syss para todo término } t,\ \theta(t) \equiv \theta'(t).$$

2.3.3 Unificación

Definición 2.3.3.1 Sean t_1, t_2 dos términos.

1. Una sustitución θ es un **unificador** de t_1 y t_2 si $\theta(t_1) = \theta(t_2)$.
2. Representaremos por $u(t_1, t_2)$ el conjunto de los unificadores de t_1 y t_2.
3. t_1 y t_2 son **unificables** si $u(t_1, t_2) \neq \emptyset$.
4. θ es un **unificador de máxima generalidad** de t_1 y t_2 si $\theta \in u(t_1, t_2)$ y para todo $\theta' \in u(t_1, t_2)$, $\theta' \leq \theta$.
5. Representaremos por $umg(t_1, t_2)$ el conjunto de los unificadores de t_1 y t_2 de máxima generalidad.

Ejemplo 2.3.3.2

1. Los términos $t_1 = f(g(a), h(x))$ y $t_2 = f(y, y)$ no son unificables.
2. Los términos $t_1 = f(x, x)$ y $t_2 = f(y, g(y))$ no son unificables.
3. $t_1 = f(x, g(y))$ y $t_2 = f(a, z)$, entonces
   (a) $\theta_1 = \{(x, a), (z, g(b))\} \in u(t_1, t_2) - umg(t_1, t_2)$.
   (b) $\theta_2 = \{(x, a), (z, g(y))\} \in umg(t_1, t_2)$.
   (c) $\theta_3 = \{(x, a), (y, u), (z, g(u))\} \in umg(t_1, t_2) - \{\theta_2\}$

Lema 2.3.3.3

1. Si $\theta \in u(t_1, t_2)$, entonces $t_1 \cup t_2 \leq \theta(t_1)$.

2. Si $\theta \in umg(t_1, t_2)$, entonces $t_1 \cup t_2 \equiv \theta(t_1)$.

Lema 2.3.3.4

1. Si $\theta_1 \in u(t_1, t_2)$ y $\theta_1 \leq \theta_2$, entonces $\theta_2 \in u(t_1, t_2)$.
2. Si $\theta, \theta' \in umg(t_1, t_2)$, entonces $\theta \equiv \theta'$.

Definición 2.3.3.5 Sea $N = \{t_1, \ldots, t_n\}$ un conjunto finito de términos.

1. Una sustitución θ es un **unificador** de N si $\theta(t_1) = \ldots = \theta(t_n)$.
2. Representaremos por $u(N)$ el conjunto de los unificadores de N.
3. N es **unificable** si $u(N) \neq \emptyset$.
4. θ es un **unificador de máxima generalidad** de N si $\theta \in u(N)$ y para todo $\theta' \in u(N)$, $\theta' \leq \theta$.
5. Representaremos por $umg(N)$ el conjunto de los unificadores de N de máxima generalidad.

Definición 2.3.3.6

1. Una **ecuación** en T es un par ordenado de términos.
2. Utilizaremos los símbolos $E, E_1, E_2, \ldots$ para representar conjuntos finitos de ecuaciones.

Definición 2.3.3.7 Sea $E = \{(t_i, t'_i) : 1 \leq i \leq n\}$ un conjunto finito de ecuaciones.

1. La sustitución θ es una **solución** de E si $\theta(t_i) = \theta(t'_i)$ para $1 \leq i \leq n$.
2. El conjunto de las soluciones de E se representa por $s(E)$.
3. La sustitución θ es una **solución de máxima generalidad** de E si es una solución de E y para cualquier solución θ' de E, $\theta' \leq \theta$.
4. El conjunto de las soluciones de E de máxima generalidad se representa por $smg(E)$.

Lema 2.3.3.8

1. $u(t_1, t_2) = s(\{(t_1, t_2)\})$
2. $umg(t_1, t_2) = smg(\{(t_1, t_2)\})$
3. $u(\{t_1, \ldots, t_n\}) = s(\{(t_1, t_2), \ldots, (t_1, t_n)\})$
4. $umg(\{t_1, \ldots, t_n\}) = smg(\{(t_1, t_2), \ldots, (t_1, t_n)\})$

Definición 2.3.3.9 Sea E un conjunto finito de ecuaciones y θ una sustitución. Entonces,

$$\theta(E) = \{(\theta(t), \theta(t')) : (t, t') \in E\}$$

Algoritmo 2.3.3.10 (de simplificación)

Entrada: Un conjunto finito de ecuaciones, E, y una sustitución, θ.

Salida: `Sin solucion`, si $\theta(E)$ no tiene solución; una solución de $\theta(E)$ de máxima generalidad, en caso contrario.

Procedimiento: $Simpl(E, \theta)$

si $E = \emptyset$ **entonces devolver** θ y **parar**
si $E \neq \emptyset$ **entonces**
  hacer $(t, t') = primero(E)$
    $E := E - \{(t, t')\}$
  si $t = ft_1 \ldots t_n$ y $t' = ft'_1 \ldots t'_n$,
    entonces $Simpl(E \cup \{(t_1, t'_1), \ldots, (t_n, t'_n)\}, \theta)$
  si $t = ft_1 \ldots t_n$, $t' = gt'_1 \ldots t'_m$ y $f \neq g$
    entonces devolver `Sin solucion` y **parar**
  si $t = x$ y $t' = x$,
    entonces $Simpl(E, \theta)$
  si t no es una variable y t' es una variable,
    entonces $Simpl(E \cup \{(t', t)\}, \theta)$
  si $t = x$, $x \in var(t')$ y $t' \neq x$
    entonces devolver `Sin solucion` y **parar**
  si $t = x$ y $x \notin var(t')$
    entonces $Simpl(\{(x, t)\}(E), \{(x, t)\}\theta)$

Algoritmo 2.3.3.11 (de unificación)

Entrada: Un conjunto finito de términos, $N = \{t_1, \ldots, t_n\}$.

Salida: `No unificable`, si N no es unificable; $\theta \in umg(N)$, en caso contrario.

Procedimiento:

Hacer $E := \{(t_1, t_2) \dots (t_1, t_n)\}$
$\theta := Simpl(E, \emptyset)$
si $\theta =$ `Sin solucion` **devolver** `No unificable`
e.o.c devolver θ

Teorema 2.3.3.12 El algoritmo de unificación siempre termina y es correcto.

2.3.4 Unificación para fórmulas atómicas

Definición 2.3.4.1 Sean A_1, A_2 dos fórmulas atómicas.

1. Una sustitución θ es un **unificador** de A_1 y A_2 si $\theta(A_1) = \theta(A_2)$.
2. Representaremos por $u(A_1, A_2)$ el conjunto de los unificadores de A_1 y A_2.
3. A_1 y A_2 son **unificables** si $u(A_1, A_2) \neq \emptyset$.
4. θ es un **unificador de máxima generalidad** de A_1 y A_2 si $\theta \in u(A_1, A_2)$ y para todo $\theta' \in u(A_1, A_2)$, $\theta' \leq \theta$.
5. Representaremos por $umg(A_1, A_2)$ el conjunto de los unificadores de A_1 y A_2 de máxima generalidad.

Lema 2.3.4.2 Sean $A_1 = pt_1 \dots t_n$ y $A_2 = qt'_1 \dots t'_m$ dos fórmulas atómicas. Entonces,

1. $u(A_1, A_2) = \begin{cases} \emptyset, & \text{si } p \neq q; \\ u(\{(t_1, t'_1), \dots, (t_n, t'_n)\}), & \text{en otro caso} \end{cases}$
2. $umg(A_1, A_2) = \begin{cases} \emptyset, & \text{si } p \neq q; \\ umg(\{(t_1, t'_1), \dots, (t_n, t'_n)\}), & \text{en otro caso} \end{cases}$

Definición 2.3.4.3 Sea $N = \{A_1, \dots, A_n\}$ un conjunto finito de fórmulas atómicas.

1. Una sustitución θ es un **unificador** de N si $\theta(A_1) = \dots = \theta(A_n)$.
2. Representaremos por $u(N)$ el conjunto de los unificadores de N.
3. N es **unificable** si $u(N) \neq \emptyset$.

4. θ es un **unificador de máxima generalidad** de N si $\theta \in u(N)$ y para todo $\theta' \in u(N)$, $\theta' \leq \theta$.

5. Representaremos por $umg(N)$ el conjunto de los unificadores de N de máxima generalidad.

Algoritmo 2.3.4.4 (de unificación para dos átomos)

Entrada: Dos átomos $A_1 = pt_1 \dots t_n$ y $A_2 = qt_1 \dots t_m$.

Salida: `No unificables`, si A_1 y A_2 no son unificables; $\theta \in umg(A_1, A_2)$, en caso contrario.

Procedimiento: $Unif(A_1, A_2)$

si $p \neq q$ **entonces devolver** `No unificables`
e.o.c. hacer $\theta = Simpl(\{(t_1, t'_1), \dots, (t_n, t'_n)\}, \emptyset)$
si $\theta =$ `Sin solucion` **entonces devolver** `No unificables`
e.o.c. devolver θ

Algoritmo 2.3.4.5 (de unificación para conjuntos de átomos)

Entrada: Un conjunto finito de átomos, $N = \{A_1, \dots, A_n\}$)

Salida: `No unificable`, si N no es unificable; $\theta \in umg(N)$, en caso contrario.

Procedimiento: $Unif(N)$

si $n \leq 1$ **entonces devolver** $\emptyset$
e.o.c. hacer $\theta_1 = Unif(A_1, A_2)$
si $\theta_1 =$ `No unificables` **entonces devolver** `No unificable`
e.o.c. hacer $\theta_2 = Unif(\{\theta_1(A_3), \dots, \theta_1(A_n)\})$
si $\theta_2 =$ `No unificable` **entonces devolver** `No unificable`
e.o.c. devolver $\theta_2\theta_1$

2.4 Resolución en lógica de primer orden

2.4.1 Sistema de resolución

Definición 2.4.1.1 Sea C una cláusula.

1. La **complementaria** de C es

$$\overline{C} = \{\overline{L} : L \in C\}$$

2. La **parte positiva** de C es

$$C_+ = \{L \in C : L \text{ es positivo}\}$$

3. La **parte negativa** de C es

$$C_- = \{L \in C : L \text{ es negativo}\}$$

4. La **forma positiva** de C es

$$\|C\| = C_+ \cup \overline{C_-}$$

Definición 2.4.1.2

1. Representaremos por $var(C)$ el conjunto de las variables de la cláusula C; es decir,
$$var(C) = \{var(A) : A \in \|C\|\}$$

2. Las cláusulas C_1 y C_2 están **separadas** si $var(C_1) \cap var(C_2) = \emptyset$.

3. Las permutaciones ξ_1 y ξ_2 **separan** las cláusulas C_1 y C_2 si $\xi_1(C_1)$ y $\xi_2(C_2)$ están separadas.

Definición 2.4.1.3 La cláusula C es una **resolvente** de las cláusulas C_1 y C_2 si se verifican las siguientes condiciones:

1. Existen dos permutaciones ξ_1, ξ_2 que separan a las cláusulas C_1 y C_2.

2. Existen $D_1 \subseteq \xi_1(C_1)$ y $D_2 \subseteq \xi_2(C_2)$ no vacíos tales que $\|D_1 \cup \overline{D_2}\|$ es unificable. Sea $\theta \in umg(\|D_1 \cup \overline{D_2}\|)$

3. C es de la forma:

$$C = \theta((\xi_1(C_1) - D_1) \cup (\xi_2(C_2) - D_2))$$

Ejemplo 2.4.1.4 La cláusula $\{p(a, f(a))\}$ es una resolvente de $\{p(z, f(z)), p(z, a)\}$ y $\{\neg p(z, z), \neg p(z, x), \neg p(x, z)\}$.

Definición 2.4.1.5 Representaremos por $Res(C_1, C_2)$ el conjunto de las resolventes de C_1 y C_2.

Definición 2.4.1.6 Sea S un conjunto de cláusulas.

1. La sucesión $(C_1, \ldots, C_n)$ es una **deducción por resolución** a partir de S si para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ se verifica una de las siguientes condiciones:
   (a) $C_i \in S$.
   (b) existen $j, k < i$ tales que $C_i \in Res(C_j, C_k)$.
2. La cláusula C es **deducible por resolución** a partir de S, $S \vdash C$, si existe una deducción por resolución a partir de S, $(C_1, \ldots, C_n)$, tal que $C_n = C$.
3. La sucesión $(C_1, \ldots, C_n)$ es una **refutación por resolución** de S si es una deducción por resolución a partir de S y $C_n = \square$.
4. S es **refutable** si $S \vdash \square$.

Definición 2.4.1.7 Sea S un conjunto de cláusulas.

1. $Res(S) = S \cup (\bigcup\{Res(C_1, C_2) : C_1, C_2 \in S\})$.
2. La sucesión $(Res^n(S))_{n\geq 0}$ está definida por:
$$Res^0(S) = S$$
$$Res^{n+1} = Res(Res^n(S))$$
3. $Res^*(S) = \bigcup_{n\geq 0} Res^n(S)$

Lema 2.4.1.8 $S \vdash C$ syss $C \in Res^*(S)$.

2.4.2 Corrección y completitud de la resolución

Lema 2.4.2.1 Si $C \in Res(C_1, C_2)$, entonces $\{C_1, C_2\} \models C$.

Teorema 2.4.2.2 (de corrección) Si $S \vdash \square$, entonces S es inconsistente.

Lema 2.4.2.3 (del ascenso) Si C_1' y C_2' son instancias básicas de C_1 y C_2, respectivamente, y C' una resolvente de C_1' y C_2' (en el sentido proposicional). Entonces, existe una $C \in Res(C_1, C_2)$ tal que C' es una instancia de C.

Teorema 2.4.2.4 (de completitud) Si S es inconsistente, entonces $S \vdash \square$.

Corolario 2.4.2.5 S es inconsistente syss $S \vdash \square$.

2.4.3 Reglas de simplificación

Definición 2.4.3.1 Una cláusula C es una **tautología** si existe una instancia C' de C tal que $C'_+ \cap C'_- \neq \emptyset$.

Teorema 2.4.3.2 (Regla de tautología) Si $C \in S$ es una tautología, entonces S es consistente syss $S - \{C\}$ es consistente.

Definición 2.4.3.3 L es un **literal puro** de S si $L \in \bigcup S$ y para toda sustitución θ, $\overline{L} \notin \theta(\bigcup S)$.

Teorema 2.4.3.4 (Regla de los literales puros) Si L es un literal puro de S, entonces S es consistente syss $S - \{C \in S : L \in C\}$ es consistente.

Definición 2.4.3.5 La cláusula C **subsume** a la cláusula D si existe una sustitución θ tal que $\theta(C) \subset D$.

Teorema 2.4.3.6 (Regla de subsunción) Sean $C, D \in S$. Si C subsume a D, entonces S es consistente syss $S - \{D\}$ es consistente.

2.4.4 Estrategias de resolución

Nota 2.4.4.1 Los refinamientos de resolución estudiados para el caso proposicional son aplicables al caso de primer orden.

Capítulo 3

Programación lógica

3.1 Programas lógicos: semántica declarativa

3.1.1 Programas lógicos

Definición 3.1.1.1 Una **cláusula definida** es una cláusula C que tiene exactamente un literal positivo; es decir, $|C_+| = 1$.

Definición 3.1.1.2 Sea $C = \{A, \neg B_1, \ldots, \neg B_n\}$ una cláusula definida.

1. Si $n = 0$, se dice que C es un **hecho** y se representa por

$$A \leftarrow$$

2. Si $n > 0$, se dice que C es un **regla** y se representa por

$$A \leftarrow B_1, \ldots, B_n$$

3. La **cabeza** de C es A y su **cuerpo** es $B_1, \ldots, B_n$.

Definición 3.1.1.3 Sea C una cláusula y F una fórmula cerrada. Se dice que C y F son **equivalentes**, $C \equiv F$, si C y F tienen los mismos modelos.

Lema 3.1.1.4 $A \leftarrow B_1, \ldots, B_n \equiv \forall(B_1 \wedge \ldots \wedge B_n \rightarrow A)$

Definición 3.1.1.5 Un **programa lógico** (o, simplemente, **programa**) es un conjunto finito de cláusulas definidas.

Ejemplo 3.1.1.6 El siguiente conjunto es un programa lógico (definiendo la suma):

$$suma(x, 0, x) \leftarrow$$
$$suma(x, s(y), s(z)) \leftarrow suma(x, y, z)$$

Definición 3.1.1.7 Un **objetivo** G es una cláusula negativa; es decir,

$$G = \{\neg B_1, \ldots, \neg B_n\}$$

Representaremos el objetivo G por

$$\leftarrow B_1, \ldots, B_n$$

Lema 3.1.1.8 $\leftarrow B_1, \ldots, B_n \equiv \neg\exists(B_1 \wedge \ldots \wedge B_n)$

Definición 3.1.1.9 Una **cláusula de Horn** es una cláusula definida o un objetivo.

Nota 3.1.1.10

1. Los símbolos $P, P_1, P_2, \ldots$ representarán programas.
2. Los símbolos $G, G_1, G_2, \ldots$ representarán objetivos.

Definición 3.1.1.11 Sea G el objetivo $\leftarrow A_1, \ldots, A_n$ y θ una sustitución.

1. $\tilde{G} = A_1 \wedge \ldots \wedge A_n$
2. $\theta(\tilde{G}) = \theta(A_1) \wedge \ldots \wedge \theta(A_n)$

Definición 3.1.1.12 Sea S un conjunto de cláusulas y F una fórmula cerrada.

1. F es **consecuencia semántica** de S, $S \models F$, si todos los modelos de S son modelos de F.
2. $S \cup \{F\}$ es **inconsistente** si ningún modelo de S es modelo de F.

Lema 3.1.1.13 Sea S un conjunto de cláusulas y F una fórmula cerrada. Entonces, $S \models F$ syss $S \cup \{\neg F\}$ es inconsistente.

Definición 3.1.1.14 Sea P un programa y G el objetivo $\leftarrow A_1, \ldots, A_n$.

1. La sustitución θ es una **respuesta** para $P \cup \{G\}$ si $D(\theta) \subseteq var(P \cup \{G\})$.
2. La sustitución θ es una **respuesta correcta** para $P \cup \{G\}$ si es una respuesta para $P \cup \{G\}$ y

$$P \models \forall(\theta(\tilde{G}))$$

Ejemplo 3.1.1.15 Si P es el programa del ejemplo anterior y G es el objetivo

$$\leftarrow suma(x, y, s(0))$$

entonces las sustituciones $\theta_1 = \{(x, 0), (y, s(0))\}$ y $\theta_2 = \{(x, s(0)), (y, 0)\}$ son respuestas correctas para $P \cup \{G\}$.

Lema 3.1.1.16 Sea P un programa, G un objetivo y θ una respuesta para $P \cup \{G\}$. Entonces, θ es una respuesta correcta para $P \cup \{G\}$ syss $P \cup \{\neg\forall(\theta(\tilde{G}))\}$ es inconsistente.

Definición 3.1.1.17 Sea P un programa y G un objetivo. Se dice que "no" es la respuesta correcta para $P \cup \{G\}$ si $P \cup \{G\}$ es consistente.

3.1.2 Modelos de Herbrand

Lema 3.1.2.1 Sea P un programa y G un objetivo. Entonces, $P \cup \{G\}$ es consistente syss tiene un modelo de Herbrand.

Lema 3.1.2.2 Si P es un programa y $B(P)$ es su base de Herbrand, entonces $B(P)$ es un modelo de Herbrand de P

Lema 3.1.2.3 Si P es un programa y $\{M_i : i \in I\}$ un conjunto no vacío de modelos de Herbrand de P, entonces $\bigcap_{i \in I} M_i$ es un modelo de Herbrand de P.

Definición 3.1.2.4 El **menor modelo de Herbrand** de un programa P es

$$M_P = \bigcap \{M : M \text{ es un modelo de Herbrand de } P\}$$

Teorema 3.1.2.5 $M_P = \{A \in B(P) : P \models A\}$.

Teorema 3.1.2.6 Sea P un programa, G un objetivo y θ una respuesta para $P \cup \{G\}$ tal que $\theta(G)$ es básica. Son equivalentes:

1. θ es correcta.
2. Si M es un modelo de Herbrand de P, entonces $M \models \theta(\tilde{G})$.
3. $M_P \models \theta(\tilde{G})$.

3.2 Programas lógicos: semántica de puntos fijos

3.2.1 Operadores y sus puntos fijos

Definición 3.2.1.1 Un conjunto parcialmente ordenado, $(L, \leq)$, es un **retículo completo** si para todo $X \subseteq L$, existe el supremo, $sup(X)$, y el ínfimo, $inf(X)$.

Ejemplo 3.2.1.2 Si S es un conjunto, entonces $(\mathbf{P}(\mathbf{S}), \subseteq)$ es un retículo completo.

Lema 3.2.1.3 Si $(L, \leq)$ es un retículo completo, entonces tiene un mayor elemento, $\top$, y un menor elemento, $\bot$.

Definición 3.2.1.4 Sea $(L, \leq)$ un retículo completo.

1. La aplicación $T : L \to L$ es un **homomorfismo** si
$$(\forall x, y \in L)[x \leq y \to T(x) \leq T(y)]$$
2. El conjunto $X \subseteq L$ es **dirigido** si todos sus subconjuntos finitos están acotados superiormente por elementos de X.
3. La aplicación $T : L \to L$ es **continua** si
$$T(sup(X)) = sup(T(X))$$
para todo subconjunto dirigido X de L.

Lema 3.2.1.5 Sea $(L, \leq)$ un retículo completo y $T : L \to L$. Si T es continua, entonces es un homomorfismo.

Definición 3.2.1.6 Sea $(L, \leq)$ un retículo completo y $T : L \to L$.

1. $x \in L$ es un **punto fijo** de T si $T(x) = x$. Representaremos por $PF(T)$ el conjunto de los puntos fijos de T.
2. El **menor punto fijo** de T se representa por $min(PF(T))$.
3. El **mayor punto fijo** de T se representa por $max(PF(T))$.

Teorema 3.2.1.7 Sea $(L, \leq)$ un retículo completo y $T : L \to L$ un homomorfismo.

1. Existe un menor punto fijo de T y viene dado por

$$min(PF(T)) = inf\{x \in L : T(x) \leq x\} = inf\{x \in L : T(x) = x\}$$

2. Existe un mayor punto fijo de T y viene dado por

$$max(PF(T)) = sup\{x \in L : x \leq T(x)\} = sup\{x \in L : T(x) = x\}$$

Corolario 3.2.1.8 Sea $(L, \leq)$ un retículo completo y $T : L \to L$ un homomorfismo.

1. Si $a \in L$ y $T(a) \leq a$, entonces existe un punto fijo a' de T tal que $a' \leq a$.
2. Si $b \in L$ y $b \leq T(b)$, entonces existe un punto fijo b' de T tal que $b \leq b'$.

Definición 3.2.1.9 Sea $(L, \leq)$ un retículo completo y $T : L \to L$ un homomorfismo.

1. La **potencia ascendente** de T es la aplicación $T \uparrow : Ord \to L$ definida recursivamente por

$$T \uparrow \alpha = \begin{cases} \bot, & \text{si } \alpha = 0; \\ T(T \uparrow \beta), & \text{si } \alpha = \beta + 1; \\ sup\{T \uparrow \beta : \beta < \alpha\}, & \text{si } \alpha \text{ es límite} \end{cases}$$

2. La **potencia descendente** de T es la aplicación $T\downarrow: Ord \to L$ definida recursivamente por

$$T\downarrow\alpha = \begin{cases} \top, & \text{si } \alpha = 0; \\ T(T\downarrow\beta), & \text{si } \alpha = \beta + 1; \\ inf\{T\downarrow\beta : \beta < \alpha\}, & \text{si } \alpha \text{ es límite} \end{cases}$$

Lema 3.2.1.10 Sea $(L, \leq)$ un retículo completo y $T : L \to L$ un homomorfismo.

1. $T\uparrow\alpha \leq min(PF(T)) \leq max(PF(T)) \leq T\downarrow\beta$
2. $\alpha \leq \beta \quad \Longrightarrow \quad T\uparrow\alpha \leq T\uparrow\beta \leq T\downarrow\beta \leq T\downarrow\alpha$
3. Si existe un $\beta > \alpha$ tal que $T\uparrow\beta = T\uparrow\alpha$, entonces $T\uparrow\alpha$ es el menor punto fijo de T.
4. Si existe un $\beta > \alpha$ tal que $T\downarrow\beta = T\downarrow\alpha$, entonces $T\downarrow\alpha$ es el mayor punto fijo de T.
5. Existe un ordinal β_1 tal que para todo $\gamma \geq \beta_1$, $T\uparrow\gamma = min(PF(T))$.
6. Existe un ordinal β_2 tal que para todo $\gamma \geq \beta_2$, $T\downarrow\gamma = max(PF(T))$.

Definición 3.2.1.11 Sea $(L, \leq)$ un retículo completo y $T : L \to L$ un homomorfismo.

1. La **clausura ordinal ascendente** de T es

$$c.o.\uparrow(T) = min\{\alpha : T\uparrow\alpha = min(PF(T))\}$$

2. La **clausura ordinal descendente** de T es

$$c.o.\downarrow(T) = min\{\alpha : T\downarrow\alpha = max(PF(T))\}$$

Teorema 3.2.1.12 Si $(L, \leq)$ es un retículo completo y $T : L \to L$ es continua, entonces

$$min(PF(T)) = T\uparrow\omega$$

Corolario 3.2.1.13 Si $(L, \leq)$ es un retículo completo y $T : L \to L$ es continua, entonces

$$c.o.\uparrow(T) \leq \omega$$

3.2.2 El operador de consecuencia inmediata

Lema 3.2.2.1 Si P es un programa, entonces $(\mathbf{P}(\mathbf{B}(\mathbf{P}), \subseteq)$ es un retículo completo. Su menor elemento es $\emptyset$ y su mayor elemento es $B(P)$.

Definición 3.2.2.2 Para cada programa P, representaremos por $[P]$ el conjunto de sus instancias básicas.

Definición 3.2.2.3 Sea P un programa. Para cada interpretación de Herbrand, I, se define la interpretación $T_P(I)$ por

$$A \in T_P(I) \iff \text{existen átomos } B_1, \ldots, B_n \text{ tales que } \begin{cases} A \leftarrow B_1, \ldots, B_n \in [P] \\ \{B_1, \ldots, B_n\} \subseteq I \end{cases}$$

La aplicación $T_P : \mathbf{P}(\mathbf{B}(\mathbf{P})) \to \mathbf{P}(\mathbf{B}(\mathbf{P}))$ se llama el **operador de consecuencia inmediata**.

Lema 3.2.2.4 Sea P un programa, I una interpretación de Herbrand y A un átomo. Son equivalentes:

1. $A \in T_P(I)$;
2. existe una sustitución θ y una cláusula $B \leftarrow B_1, \ldots, B_n$ de P tales que $A = \theta(B)$ y $\{\theta(B_1), \ldots, \theta(B_n)\} \subseteq I$.

Ejemplo 3.2.2.5 Sea P el programa

$$p(f(x)) \leftarrow p(x)$$
$$q(a) \leftarrow p(x)$$

1. Si $I_1 = B(P)$, entonces $T_P(I_1) = \{q(a)\} \cup \{p(f(t)) : t \in U(P)\}$
2. Si $I_2 = T_P(I_1)$, entonces $T_P(I_2) = \{q(a)\} \cup \{p(f(f(t))) : t \in U(P)\}$
3. Si $I_3 = \emptyset$, entonces $T_P(I_3) = \emptyset$.

Lema 3.2.2.6 La aplicación T_P es continua.

Lema 3.2.2.7 Sea P un programa e I una interpretación de Herbrand. Entonces I es un modelo del programa P syss $T_P(I) \subseteq I$.

Teorema 3.2.2.8 Sea P un programa. Entonces,

$$M_P = min(PF(T_P)) = T_P \uparrow \omega = \bigcup_{n \geq 0} T_P \uparrow n$$

Ejemplo 3.2.2.9 Sea P el programa

$$\begin{array}{l} q(b) \leftarrow \\ q(f(x)) \leftarrow q(x) \\ p(f(x)) \leftarrow p(x) \\ p(a) \leftarrow p(x) \\ r(c) \leftarrow r(x), q(x) \\ r(f(x)) \leftarrow r(x) \end{array}$$

1. $M_P = min(PF(T_P)) = \{q(f^n(b)) : n \in \omega\}$ y *c.o.* $\uparrow (T_P) = \omega$.
2. $max(PF(T_P)) = \{q(f^n(b)) : n \in \omega\} \cup \{p(f^n(a)) : n \in \omega\}$ y *c.o.* $\downarrow (T_P) = \omega 2$.

3.3 Programas lógicos: semántica procedimental

3.3.1 Proceso de computación: La resolución SLD

Nota 3.3.1.1 Sea θ una sustitución y $\leftarrow A_1, \ldots, A_n$ un objetivo. Escribiremos

$$\leftarrow \theta(A_1, \ldots, A_n)$$

en lugar de

$$\leftarrow \theta(A_1), \ldots, \theta(A_n)$$

Definición 3.3.1.2 Sea P un programa lógico, $C = A \leftarrow B_1, \ldots, B_k$ una cláusula de P y $G = \leftarrow A_1, \ldots, A_n$ un objetivo. Se dice que G' es una **resolvente de G y C con umg θ** si se verifican las siguientes condiciones:

1. existe un $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que θ es un unificador de máxima generalidad de A_i y A;
2. $G' = \leftarrow \theta(A_1, \ldots, A_{i-1}, B_1, \ldots, B_k, A_{i+1}, \ldots, A_n)$.

En este caso, se dice que A_i es el **átomo seleccionado**.

Definición 3.3.1.3 Sea P un programa y G un objetivo. Se dice que

$$(G_0, G_1, G_2 \ldots; C_1, C_2, \ldots; \theta_1, \theta_2, \ldots)$$

es una **derivación SLD** (o, simplemente, **derivación**) de $P \cup \{G\}$ si

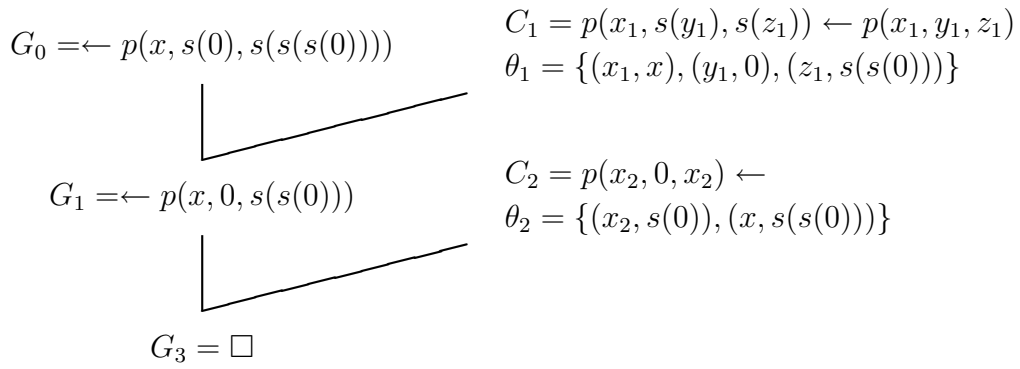
1. $G_0 = G$;
2. C_1 es una variante de una cláusula de P separada de G_0;
3. G_1 es una resolvente de G_0 y C_1 com umg θ_1;
4. para todo $i \geq 2$,
   (a) C_i es una variante de una cláusula de P;
   (b) C_i no tiene variables comunes con $G_0, \ldots, G_{i-1}, C_1, \ldots, C_{i-1}$.
   (c) G_i es una resolvente de G_{i-1} y C_i com umg θ_1;

Las cláusulas C_i se llaman **cláusulas de entrada**.

Ejemplo 3.3.1.4 Sea P el programa

$$p(x, 0, x) \leftarrow$$
$$p(x, s(y), s(z)) \leftarrow p(x, y, z)$$

y G es objetivo $\leftarrow p(x, s(0), s(s(s(0))))$. En la siguiente figura se muestra una derivación para $P \cup \{G\}$.



Nota 3.3.1.5 Las derivaciones pueden ser finitas o infinitas. Las finitas pueden terminar con éxito (si su último objetivo es $\square$) o con fallo (en caso contrario).

Definición 3.3.1.6 Una **refutación** de $P \cup \{G\}$ es una derivación finita de $P \cup \{G\}$

$$(G_0, G_1, G_2 \ldots, G_n; C_1, C_2, \ldots, C_n; \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n)$$

tal que $G_n = \square$. Se dice que n es la **longitud** de la refutación.

Definición 3.3.1.7 Sea θ una sustitución y $V' \subseteq V$ un conjunto de variables. La **restricción** de θ a V' es la sustitución θ' definida por

$$\theta'(x) = \begin{cases} \theta(x), & \text{si } x \in V'; \\ x, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La restricción de θ a V' se representa por $\theta' \restriction V'$.

Definición 3.3.1.8 Sea P un programa y G un objetivo. La sustitución θ es una **respuesta computada** para $P \cup \{G\}$ si existe una refutación

$$(G_0, G_1, G_2 \ldots, G_n; C_1, C_2, \ldots, C_n; \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n)$$

de $P \cup \{G\}$ y $\theta = (\theta_n \ldots \theta_1) \restriction var(G)$.

Ejemplo 3.3.1.9 La sustitución $\theta = \{(x, s(s(0)))\}$ es una respuesta computada para el ejemplo anterior.

Definición 3.3.1.10 El **conjunto de éxitos** de un programa P, E_P, es el conjunto de los $A \in B(P)$ tales que $P \cup \{\leftarrow A\}$ tiene una refutación.

3.3.2 Correción de la resolución SLD

Teorema 3.3.2.1 (Corrección computacional de la resolución SLD) Toda respuesta computada para $P \cup \{G\}$ es una respuesta correcta para $P \cup \{G\}$.

Corolario 3.3.2.2 (Corrección de la resolución SLD) Si $P \cup \{G\}$ tiene una refutación, entonces $P \cup \{G\}$ es inconsistente.

Corolario 3.3.2.3 El conjunto de éxitos de un programa P está contenido en el menor modelo de Herbrand de P.

3.3.3 Completitud de la resolución SLD

Definición 3.3.3.1

1. Si en la definición de resolvente se sustituye la condición de "unificador de máxima generalidad" por la de "unificador", la cláusula que se obtiene se llama **resolvente no principal**.

2. Si en la definición de derivación se sustituye "resolvente" por "resolvente no principal", la sucesión obtenida se llama **derivación no principal**.

3. Si en la definición de refutación se sustituye "derivación" por "derivación no principal", la sucesión obtenida se llama **refutación no principal**.

Lema 3.3.3.2 Sea P un programa y G un objetivo. Si

$$(G_0, G_1, G_2 \ldots, G_n; C_1, C_2, \ldots, C_n; \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n)$$

es una refutación no principal de $P \cup \{G\}$, entonces existe una refutación

$$(G_0, G'_1, G'_2 \ldots, G'_n; C'_1, C'_2, \ldots, C'_n; \theta'_1, \theta'_2, \ldots, \theta'_n)$$

de $P \cup \{G\}$ tal que $\theta'_n \ldots \theta'_1 \leq \theta_n \ldots \theta_1$.

Lema 3.3.3.3 (del ascenso) Sea P un programa, G un objetivo y θ una sustitución. Si

$$(G_0, G_1, G_2 \ldots, G_n; C_1, C_2, \ldots, C_n; \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n)$$

es una refutación de $P \cup \{\theta(G)\}$, entonces existe una refutación

$$(G_0, G'_1, G'_2 \ldots, G'_n; C'_1, C'_2, \ldots, C'_n; \theta'_1, \theta'_2, \ldots, \theta'_n)$$

de $P \cup \{G\}$ tal que $\theta'_n \ldots \theta'_1 \leq \theta_n \ldots \theta_1 \theta$.

Lema 3.3.3.4 El menor modelo de Herbrand de un programa P está contenido en el conjunto de éxitos de P.

Teorema 3.3.3.5 (de completitud de la resolución SLD) Si $P \cup \{G\}$ es inconsistente, entonces existe una refutación de $P \cup \{G\}$.

Lema 3.3.3.6 Sea A un átomo. Si $P \models \forall(A)$, entonces la sustitución identidad es una respuesta computada para $P \cup \{\leftarrow A\}$.

Lema 3.3.3.7 Si θ es una respuesta correcta para $P \cup \{G\}$, entonces la sustitución identidad es una respuesta computada para $P \cup \{\theta(G)\}$.

Teorema 3.3.3.8 (de completitud computacional de la resolución SLD) Si θ es una respuesta correcta para $P \cup \{G\}$, entonces existe una respuesta computada, θ', para $P \cup \{G\}$ tal que $\theta' \leq \theta$.

3.3.4 Reglas de computación

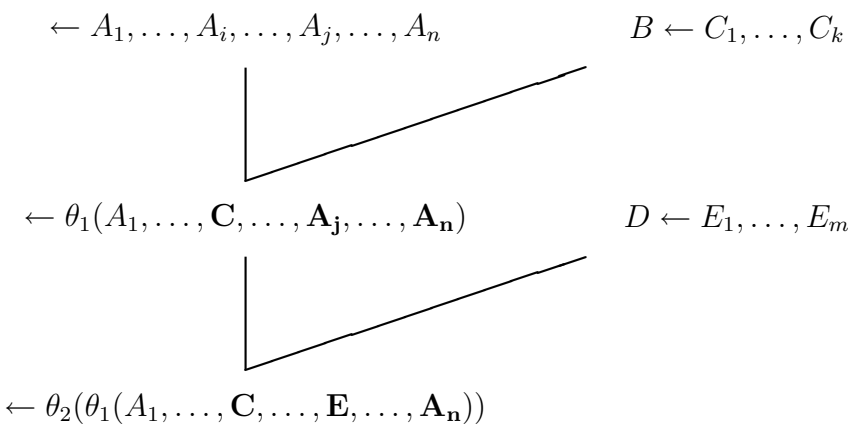
Definición 3.3.4.1 Sea P un programa lógico, $C = A \leftarrow B_1, \ldots, B_k$ una cláusula de P, $G = \leftarrow A_1, \ldots, A_n$ un objetivo y R una regla de computación. Se dice que G' es la **resolvente de G y C vía R con umg** θ si se verifican las siguientes condiciones:

1. existe un $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $R(G) = A_i$ y θ es un unificador de máxima generalidad de A_i y A;
2. $G' = \leftarrow \theta(A_1, \ldots, A_{i-1}, B_1, \ldots, B_k, A_{i+1}, \ldots, A_n)$.

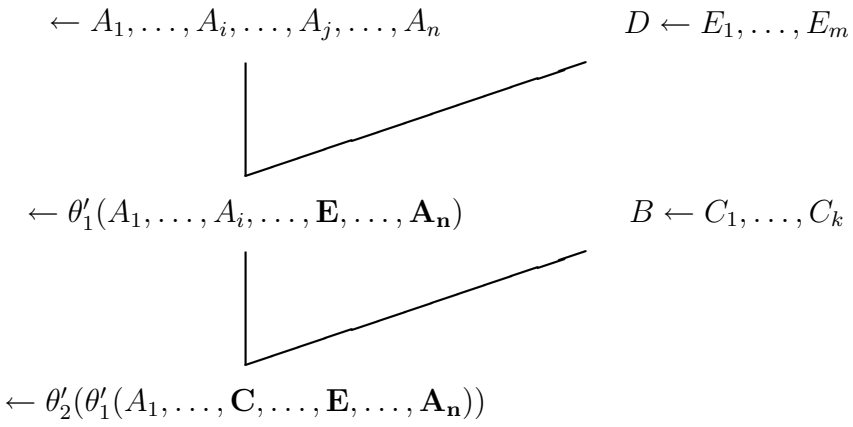
Definición 3.3.4.2 Sea P un programa, G un objetivo y R una regla de computación.

1. Una **derivación SLD** de $P \cup \{G\}$ **vía** R es una derivación de $P \cup \{G\}$ que usa resolventes vía R.
2. Una **refutación** de $P \cup \{G\}$ **vía** R es una derivación de $P \cup \{G\}$ que usa resolventes vía R.
3. Una **respuesta computada** de $P \cup \{G\}$ **vía** R es una respuesta computada para $P \cup \{G\}$ obtenida de una refutación de $P \cup \{G\}$ vía R.
4. El **conjunto de éxitos** de P **vía** R es el conjunto de los $A \in B(P)$ tales que $P \cup \{\leftarrow A\}$ tiene una refutación vía R.

Lema 3.3.4.3 (del intercambio) Consideremos dos pasos sucesivos de una derivación



donde $\mathbf{C}$ representa a $C_1, \ldots, C_k$ y $\mathbf{E}$ representa a $E_1, \ldots, E_m$. Entonces existen dos sustituciones θ'_1, θ'_2 tales que



son dos pasos sucesivos de una derivación y $\theta'_2\theta'_1 \equiv \theta_2\theta_1$.

Teorema 3.3.4.4 (independencia de la regla de computación) Si θ es una respuesta computada para $P \cup \{G\}$, entonces para cada regla de computación R existe una respuesta computada para $P \cup \{G\}$ vía R, θ', tal que $\theta'(G) \equiv \theta(G)$ (i.e. existe una permutación ξ de forma que $\theta'(G) = \xi(\theta(G))$.

Lema 3.3.4.5 El conjunto de los éxitos de P vía R es igual al menor modelo de Herbrand de P.

Teorema 3.3.4.6 (de completitud de la resolución SLD con reglas) Si $P \cup \{G\}$ es inconsistente, entonces existe una refutación de $P \cup \{G\}$ vía R.

Teorema 3.3.4.7 (de completitud fuerte de la resolución SLD) Si θ es una respuesta correcta para $P \cup \{G\}$, entonces existe una computada para $P \cup \{G\}$ vía R, θ', tal que $\theta' \leq \theta$.

3.3.5 Árboles SLD

Definición 3.3.5.1 Sean P un programa, G un objetivo y R una regla de computación. Un **árbol SLD** de $P \cup \{G\}$ vía R es un árbol verificando las siguientes condiciones:

1. Cada nodo del árbol es un objetivo.
2. El nodo raiz es G.
3. Los nodos que son la cláusula vacía no tienen hijos. Dichos nodos se llaman **nodos de éxito**. Las ramas de la raiz a los nodos de éxito se llaman **ramas de éxito**.
4. Sea $G' = \leftarrow A_1, \ldots, A_n$ $(n \geq 1)$ un nodo del árbol y $A_i = R(G')$. Entonces, para cada cláusula de P, $C = A \leftarrow B_1, \ldots, B_k$, tal que A y A_m son unificables, el nodo tiene un hijo

   $$\leftarrow \theta(A_1, \ldots, A_{i-1}, B'_1, \ldots, B'_k, A_{i+1}, \ldots, A_n)$$

   donde $A' \leftarrow B'_1, \ldots, B'_k$ es una variante de C separada de los antecesores de G' y θ es un unificador de máxima generalidad de A' y A_i. Si el nodo G' no tiene descendientes, se llama un **nodo de fallo** y las ramas de la raiz a G' se llaman **ramas de fallo**.

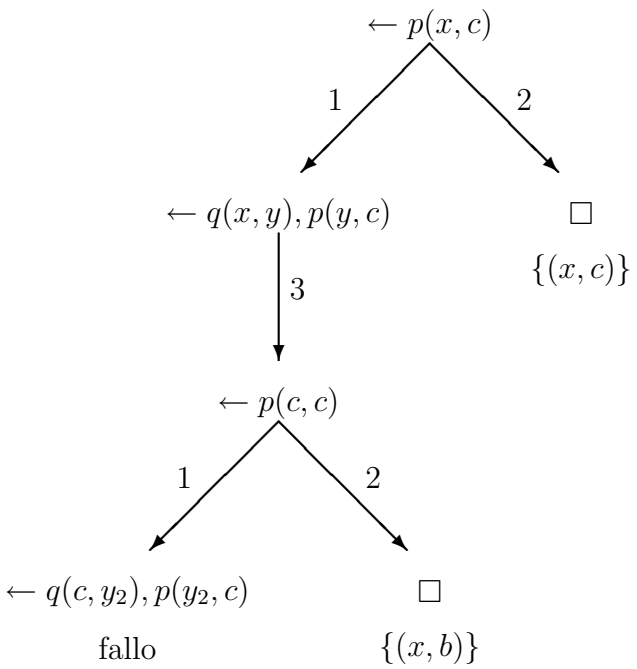
Nota 3.3.5.2 Cada rama del árbol representa una derivación de $P \cup \{G\}$ vía R.

Ejemplo 3.3.5.3 Sea P el programa

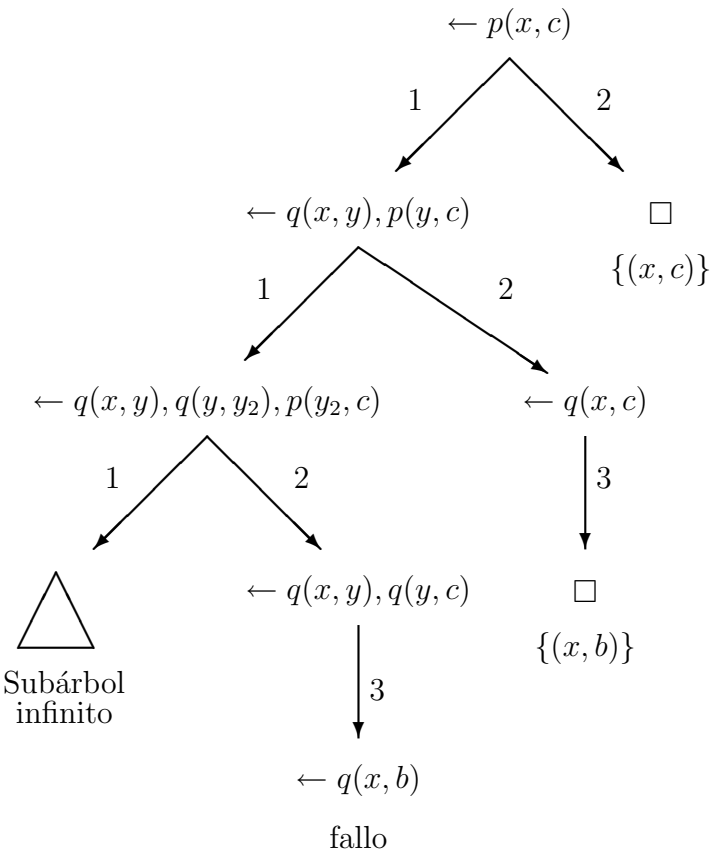
$$p(x, z) \leftarrow q(x, y), p(y, z)$$
$$p(x, x) \leftarrow$$
$$p(b, c) \leftarrow$$

y G el objetivo $\leftarrow p(x, c)$.

Si R es la regla de computación por la izquierda (i.e., $R(\leftarrow A_1, \ldots, A_n) = A_1$), entonces el árbol SLD para $P \cup \{G\}$ vía R es:



Si R es la regla de computación por la derecha (i.e., $R(\leftarrow A_1, \ldots, A_n) = A_n$), entonces el árbol SLD para $P \cup \{G\}$ vía R es:



Nótese que aunque el primer árbol es finito y el segundo es infinito, en ambos se obtienen las mismas respuestas.

Teorema 3.3.5.4 Si $P \cup \{G\}$ es inconsistente, entonces el árbol SLD de $P \cup \{G\}$ vía R tiene una rama de éxito.

Teorema 3.3.5.5 Si θ es una respuesta correcta de $P \cup \{G\}$, entonces en el árbol SLD de $P \cup \{G\}$ vía R existe una rama de éxito tal que la respuesta computada por la refutación que representa dicha rama, θ', es más general que θ (i.e. $\theta' \leq \theta$).

Teorema 3.3.5.6 Si P es un programa y A es un átomo básico, son equivalentes:

1. $P \models A$
2. $A \in M_P$

3. $A \in T_P \uparrow \omega$
4. $A \in E_P$
5. Todo árbol SLD para $P \cup \{\leftarrow A\}$ tiene una rama de éxito.

3.3.6 Procedimientos de refutación. La evaluación de Prolog

Definición 3.3.6.1 Una **regla de búsqueda** es una estrategia para encontrar ramas de éxitos en los árboles SLD.

Definición 3.3.6.2 Un **procedimiento de refutación** viene dado por una regla de computación y una regla de búsqueda.

Definición 3.3.6.3

1. La **regla de computación de Prolog** selecciona el primer átomo por la izquierda.
2. La **regla de búsqueda de Prolog** es una búsqueda en profundidad.

Algoritmo 3.3.6.4 (de evaluación de Prolog)

Entrada: Un programa $P = \{C_1, \ldots, C_n\}$ (escribiremos $C_i = B_i \leftarrow D_{i,1}, \ldots, D_{i,n_i}$), un objetivo $G = \leftarrow A_1, \ldots, A_k$ y una sustitución θ

Salida: Una respuesta computada para $P \cup \{\theta(G)\}$

Procedimiento: $Evaluar(P, G, \theta)$

si $G = \square$ **entonces devolver** θ
  e.o.c. hacer $i := 0$
    mientras que $(i < n)$
      hacer $i := i + 1$
        B_i' una variante de B_i
        $\theta' := Unif(E_1, B_i')$
      si $\theta' \neq$ `No unificables`
        entonces $Evaluar(P, \leftarrow \theta'(D_{i,1}, \ldots, D_{i,n_i}, A_2, \ldots, A_k), \theta'\theta)$

Nota 3.3.6.5 Dado un programa P y un objetivo G,

$$Evaluar(P, G, \emptyset)$$

devuelva las respuestas computadas por Prolog para $P \cup \{G\}$

Bibliografía

[1] Andrews, P.B., *An Introduction to Mathematical Logic and Type Theory: To Truth Through Proof*. Academic Press, 1986.

[2] Apt, K.R., Introduction to Logic Programming. En *Handbook of Theoretical Computer Science* (Ed. por J.V. Leeuwen). North–Holand, 1990.

[3] Bibel, W., *Automated Theorem Proving* (2nd ed.) Vieweg, 1982.

[4] Bledsoe, W.W.; Loveland, D.W. (eds.), *Automated Theorem Proving: After 25 Years*. Americam Mathematical Society, 1984.

[5] Boizumault, P., *Prolog: l'implantation*. Masson, 1988.

[6] Bundy, A., *The Computer Modelling of Mathematical Reasoning*. Academic Press, 1983.

[7] Chang, C–L; Lee, R. C–T., *Symbolic Logic and Mechanical Theorem Proving*. Academic Press, 1973.

[8] Cuena, J., *Lógica informática*. Alianza, 1985.

[9] Dalen, D.V., *Logic and Structure*. (2nd ed.) Springer–Verlag, 1983.

[10] Davis, M.; Weyuker, E., *Computability, Complexity, and Languages: Fundamentals of Theoretical Computer Science*. Academic Press, 1983.

[11] Delahaye, J–P., *Outils logiques pour l'intelligence artificielle*. Eyrolles, 1986.

[12] Deville, Y., *Logic Programming: Systematic Program Development*. Addison–Wesley, 1990.

[13] Ebbinghaus, H.D.; Flum, J.; Thomas, W. *Mathematical Logic*. Springer–Verlag, 1984.

[14] Enderton, H.B., *A Mathematical Introduction to Logic*. Academic Press, 1972.

[15] Farreny, H., *Ejercicios programados de inteligencia artificial*. Masson, 1988.

[16] Farreny, H.; Ghallab, M., *Éléments d'intelligence artificielle*. Hermes, 1987.

[17] Frost, R., *Bases de datos y sistemas expertos*. Díaz de Santos, 1989.

[18] Gallier, J.H., *Logic for Computer Science (Foundations of Automatic Theorem Proving)*. Harper & Row, 1986.

[19] Genesereth, M.R.; Nilsson, N.J., *Logical Foundations of Artificial Intelligence*. Morgan Kaufmann, 1987.

[20] Gibbins, P., *Logic with Prolog*. Clarendon Press, 1988.

[21] Hermes, H., *Introduction to Mathematical Logic*. Springer–Verlag, 1973.

[22] Huet, G., *Résolution d'equations dans des langages d'ordre* $1, 2, \ldots, \omega$. Thèse d'Etat, Univ. Paris VII, 1976.

[23] Huet, G., Deduction and Computation. En *Fundamentals of Artificial Intelligence: An Advanced Course)* (Ed. por W. Bibel y Ph. Jorrand), pp.39–74. LNCS 232. Springer–Verlag, 1987.

[24] Jorrand, Ph., Fundamentals Mechanisms for Artificial Intelligence Programming Languages. En *Advanced Topics in Artificial Intelligence* (Ed. por R.T. Nossum), pp. 1–40. LNAI, 345. Springer–Verlag, 1988.

[25] Kowalski, R., *Lógica, programación e inteligencia artificial*. Díaz de Santos, 1986.

[26] Lewis, H.R.; Papadimitriou, C.H., *Elements of the Theory of Computation*. Prentice–Hall, 1981.

[27] Lloyd, J.W., *Foundations of Logic Programming* (2nd ed.) Springer–Verlag, 1987.

[28] Loveland, D.W., *Automated Theorem Proving: A Logical Basis*. North–Holand, 1978.

[29] Maier, D.; Warren, D:S:, *Computing with Logic (Logic Programming with Prolog)*. Benjamin Cummings, 1988.

[30] Manna, Z., *Mathematical Theory of Computation*. McGraw–Hill, 1974.

[31] Manna, Z.; Waldinger, R., *The Logical Basis for Computer Programming (Vol. 1: Deductive Reasoning)*. Addison–Wesley, 1985.

[32] Manna, Z.; Waldinger, R., *The Logical Basis for Computer Programming (Vol. 2: Deductive Systems)*. Addison–Wesley, 1990.

[33] Mendelson, E., *Introduction to Mathematical Logic* (3 ed.) Wadsworth & Brooks, 1987.

[34] Nilsson, N.J., *Problem–Solving Methods in Artificial Intelligence*. McGraw–Hill, 1971.

[35] Nilsson, N.J., *Principles of Artificial Intelligence*. Springer–Verlag, 1982.

[36] Pabion, J.–F., *Logique mathématique*. Hermann, 1766.

[37] Plaisted, D.A., Mechanical Theorem Proving. En *Tormal Techniques in Artificial Intelligence: A Sourcebook*. (Ed. por R.B. Banerji), pp. 269–320. North–Holand, 1990.

[38] Quine, W.V., *Los métodos de la lógica*. Ariel, 1981.

[39] Ramsay, A., *Formal Methods in Artificial Intelligence*. Cambridge University Press, 1988.

[40] Rich, E., *Artificial Intelligence*. McGraw–Hill, 1983.

[41] Richards, T., *Clausal Form Logic: An Introduction to the Logic of Computer Reasoning*. Addison–Wesley, 1989.

[42] Robinson, J.A., *Logic: Form and Function (The Mechanization of Deductive Reasoning)*. Edinburgh University Press, 1979.

[43] Sancho, J., *Lógica, Matemática y Computabilidad*. Díaz de Santos, 1990.

[44] Schagrin, M.L.; Rapaport, W.J.; Dipert, R.R. *Logic: A Computer Approach*. McGraw–Hill, 1985.

[45] Schöning, U., *Logic for Computer Scientists*. Birkhuser, 1989.

[46] Shoenfield, J.R., *Mathematical Logic.* Addison–Wesley, 1967.

[47] Siekmann, J.; Wrightson, G. (edts.) *Automatisation of Reasoning.* Springer–Verlag, 1983.

[48] Thayse, A. y otros. *Aproche logique de l'Intelligence Artificielle. (Vol 1: de la logique classique à la programmation logique).* Dunod, 1988.

[49] Thayse, A. y otros. *Aproche logique de l'Intelligence Artificielle. (Vol 2: de la logique modale à la logique des bases de données).* Dunod, 1989.

[50] Winston, P.H., *Artificial Intelligence (2nd ed.)* Addison–Wesley, 1984.

[51] Wos, L., *Automated Reasoning: 33 Basic Research Problems.* Prentice Hall, 1988.

[52] Wos, L.; Overbeek, R.; Lusk, E.; Boyle, J., *Automated Reasoning: Introduction and Applications.* Prentice Hall, 1984.