Ejercicios de "Teoría de conjuntos"

José A. Alonso Jiménez
Mario J. Pérez Jiménez
Sevilla, Octubre de 1997

Dpto. de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial
UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Tema 1 : Conjuntos y clases

1.- Se definen $0 = \emptyset$, $1 = 0 \cup \{0\}$, $2 = 1 \cup \{1\}$, $3 = 2 \cup \{2\}$.

1. Probar que $0, 1, 2, 3$ son conjuntos.
2. Sea $x = \{\{\{1, 2\}, \{1\}\}, \{2\}\}$. Calcular:
$$\bigcup x, \qquad \bigcup\bigcup x, \qquad \bigcap x, \qquad \bigcap\bigcap x, \qquad \bigcap\bigcup x, \qquad \bigcup\bigcap x$$
3. Sea $x = \{1, 2\}$. Calcular:
$$\bigcup\bigcup x, \qquad \bigcap\bigcap x, \qquad \Big(\bigcap\bigcup x\Big) \cup \Big(\bigcup\bigcup x - \bigcup\bigcap x\Big), \qquad \bigcup\Big(\bigcup x - \bigcap x\Big)$$
4. $\bigcap\bigcup(\mathbf{P}(2) - 2)$.

2.- Sean a y b conjuntos. Probar que:
(1) $b \in a \to \bigcap a \subseteq b \subseteq \bigcup a$ (2) $a \subseteq b \to \bigcup a \subseteq \bigcup b$ (3) $(\forall x(x \in a \to x \subseteq b)) \to \bigcup a \subseteq b$

3.- Sean a y b conjuntos. Probar que:

1. $\bigcup(a \cup b) = (\bigcup a) \cup (\bigcup b)$.
2. Si a y b son conjuntos no vacíos, entonces $\bigcap(a \cup b) = (\bigcap a) \cap (\bigcap b)$. ¿Qué podemos asegurar si a ó b es el conjunto vacio?

4.- Sean a, b y c conjuntos tales que $a \cup b = a \cup c$ y $a \cap b = a \cap c$. Demostrar que $b = c$.

5.- Demostrar que

1. $\neg(\exists y)(\forall x)(x \in y \leftrightarrow \neg(\exists z)(x \in z \wedge z \in x))$.
2. La clase $\{x : \neg(\exists z)(x \in z \wedge z \in x)\}$ es propia.

6.- Probar que para cada conjunto x, existe algún y tal que $y \notin x$.

7.- Sean a y b conjuntos. Estudiar en qué condiciones es cierta la siguiente igualdad:
$$a \cup (\bigcup b) = \bigcup\{a \cup x : x \in b\}$$

8.- Sea a un conjunto. Estudiar en qué condiciones las siguientes clases son propias:

1. $\{x : (\exists y)(y \in a \wedge x \notin y)\}$
2. $\{x : (\exists y)(\exists z)(y \in a \wedge z \in y \wedge x \notin z)\}$

9.- Sean a y b conjuntos. Probar que:

1. $\bigcup \mathbf{P}(a) = a$.
2. $a \subseteq \mathbf{P}(\bigcup a)$. ¿Cuándo se verifica la igualdad?.
3. Si $a \in b$, entonces $\mathbf{P}(a) \in \mathbf{P}(\mathbf{P}(\cup b))$.
4. $\mathbf{P}(a) = \mathbf{P}(b) \iff a = b$.

5. No existe un conjunto x tal que $\mathbf{P}(x) \subseteq x$.

10.- Sea a un conjunto. Probar que:

1. Si $a \neq \emptyset$, entonces $\mathbf{P}(\bigcap a) = \bigcap\{\mathbf{P}(x) : \ x \in a\}$.
2. $\bigcup\{\mathbf{P}(x) : \ x \in a\} \subseteq \mathbf{P}(\cup a)$. ¿Cuándo se verifica la igualdad?

11.- Sean a y b conjuntos. Demostrar que las siguientes clases son conjuntos:
(1) $\{\{\{x\}\} : x \in a \cup b\}$ (2) $\{a \cup x : x \in b\}$ (3) $\{\mathbf{P}(x) : x \in a\}$ (4) $\{x \cup y : x \in a \wedge y \in b\}$

Tema 2 : Relaciones y aplicaciones

12.- Sean a y b conjuntos. Probar que:

1. $\bigcap\bigcap\langle a, b\rangle = a$.
2. $a \neq b \quad \Longrightarrow \quad \bigcap(\bigcup\langle a, b\rangle - \bigcap\langle a, b\rangle) = b$.
3. $(\bigcap\bigcup\langle a, b\rangle) \cup (\bigcup\bigcup\langle a, b\rangle - \bigcup\bigcap\langle a, b\rangle) = b$.

13.- Demostrar que la clase $\{z : (\exists x)(\exists y)[z = \langle x, y\rangle]\}$ es propia.

14.- Sean a un conjunto no vacío y b, c conjuntos. Probar que : $b \subseteq c \iff a \times b \subseteq a \times c \iff b \times a \subseteq c \times a$

15.- Sean a y b conjuntos. Probar que la clase $\{\{z\} \times b : z \in a\}$ es un conjunto.

16.- Dado un conjunto x definimos $x^{-1} = \{\langle y, z\rangle : \ \langle z, y\rangle \in x\}$. Si a y b son conjuntos, probar que:

1. $(a \cup b)^{-1} = a^{-1} \cup b^{-1}$
2. $(a \cap b)^{-1} = a^{-1} \cap b^{-1}$
3. $(a - b)^{-1} = a^{-1} - b^{-1}$

17.- Probar que $(r \circ s)^{-1} = s^{-1} \circ r^{-1}$.

18.- Calcular todos los pares ordenados de $\mathbf{P}(2)$, y el conjunto $\mathbf{P}(2)^{-1} \circ (\mathbf{P}(2) \restriction 1)$.

19.- Demostrar o refutar:

1. $\{\langle x, y\rangle \ : \ \langle x, y\rangle \neq x \times y\}$ es clase propia.
2. Si existe un número natural n tal que $\cup \overset{(n)}{\ldots} \cup x = \emptyset$, entonces $x \notin x$.
3. Si $\bigcap A$ es conjunto, entonces A es conjunto.
4. R es una relación transitiva $\quad \Longleftrightarrow \quad R \circ R = R$.

20.- Demostrar que $A = \{f : f$ es una aplicación$\}$ es una clase propia.

21.- Sean a y b conjuntos y F una aplicación. Probar que:

1. $F^{-1}[\cup a] = \bigcup\{F^{-1}[c] : c \in a\}$.

2. $a \neq \emptyset \implies F^{-1}[\cap a] = \bigcap\{F^{-1}[c] : c \in a\}$.
3. $F^{-1}[a - b] = F^{-1}[a] - F^{-1}[b]$.

22.- Sean $\{a_i\}_{i\in I}$ una familia de conjuntos y b un conjunto. Probar que:

(1) $b \cap (\bigcap_{i\in I} a_i) = \bigcap_{i\in I}(b \cap a_i)$. (2) $b \cup (\bigcup_{i\in I} a_i) = \bigcup_{i\in I}(b \cup a_i)$.

(3) $b \cap (\bigcup_{i\in I} a_i) = \bigcup_{i\in I}(b \cap a_i)$. (4) $b \cup (\bigcap_{i\in I} a_i) = \bigcap_{i\in I}(b \cup a_i)$.

(5) $b - (\bigcap_{i\in I} a_i) = \bigcup_{i\in I}(b - a_i)$. (6) $b - (\bigcup_{i\in I} a_i) = \bigcap_{i\in I}(b - a_i)$.

(7) $b \times (\bigcap_{i\in I} a_i) = \bigcap_{i\in I}(b \times a_i)$. (8) $b \times (\bigcup_{i\in I} a_i) = \bigcup_{i\in I}(b \times a_i)$.

Tema 3 : Relaciones de orden

23.- Determinar si las siguientes relaciones son órdenes parciales, órdenes totales o buenos órdenes en los conjuntos, a, que se indican.

1. $xRy \iff x < y$, siendo $a = \omega$ o bien $a = \mathbb{Z}$.
2. $a = \omega, \quad xRy \iff (x \text{ divide a } y) \wedge x \neq y$.
3. $R = \emptyset$, siendo $a = \emptyset$ o bien $a \neq \emptyset$.
4. $a =^{\omega} 2, \quad fRg \iff \exists n \in \omega\ [f(n) < g(n) \wedge\ \forall m < n\ (f(m) = g(m))]$.
5. $a = \mathbf{P}(\omega)$, $xRy \iff \exists n \in \omega\ (n \cap x = n \cap y \wedge n \in x \wedge n \notin y)$.

En donde ω y $\mathbb{Z}$ indican los conjuntos de números naturales y números enteros, respectivamente.

24.- Consideremos la aplicación $f : \omega \to \omega$ definida como sigue :

$$f(n) = \begin{cases} n \text{ si } n \leq 1 \\ \text{número de factores primos de } n \text{ si } n > 1 \end{cases}$$

Sea $<$ la ordenación usual de ω y consideremos la relación R definida por :

$$pRq \iff f(p) < f(q) \vee (f(p) = f(q) \wedge p < q)$$

1. Probar que $\langle \omega, R\rangle$ es un conjunto bien ordenado.
2. Demostrar que $\langle \omega, <\rangle \not\cong \langle \omega, R\rangle$.

25.- Sean a y b conjuntos, $S \subseteq b \times b$, $F : a \to b$ una aplicación inyectiva y R la relación definida en a por: $xRy \iff F(x)SF(y)$. Demostrar que si S es un orden parcial (respectivamente, total o buen orden) en b, entonces R es un orden parcial (respectivamente, total o buen orden) en a.

26.- Sean $\langle a, R\rangle$ y $\langle b, S\rangle$ dos conjuntos bien ordenados tales que $a \cap b = \emptyset$. Sea $R \oplus S = R \cup S \cup (a \times b)$. Demostrar que $\langle a \cup b, R \oplus S\rangle$ es un conjunto bien ordenado. $[\![$ diremos que $R \oplus S$ es la ordenación **suma lexicográfica** de R y S y notaremos $\langle a \cup b, R \oplus S\rangle = \langle a, R\rangle \oplus \langle b, S\rangle]\!]$

27.- Sean $\langle a, R\rangle$ y $\langle b, S\rangle$ dos conjuntos bien ordenados. Definimos la relación $R\otimes S$ en el conjunto $a\times b$ como sigue: $< x, y > R\otimes S < z, t > \Longleftrightarrow ySt \vee (y = t \wedge xRz)$. Demostrar que $\langle a\times b, R\otimes S\rangle$ es un conjunto bien ordenado. $[\![$ diremos que $R \otimes S$ es la ordenación **producto lexicográfico hebreo** de R y S y notaremos $\langle a \times b, R \otimes S\rangle = \langle a, R\rangle \otimes \langle b, S\rangle]\!]$

28.- Para cada una de las siguientes condiciones, hallar un conjunto totalmente ordenado $\langle a, <\rangle$ que la verifique.

1. a tiene un segmento inicial b tal que $a \neq b$ y b no es una sección inicial de a.
2. Existe una aplicación $F : a \to a$ creciente tal que $F(x) < x$, para algún $x \in a$.
3. Existe $x \in a$ tal que $\langle a, <\rangle \;\cong\; \langle a_x, <\rangle$.
4. Existe $F : \langle a, <\rangle \;\cong\; \langle a, <\rangle$ tal que $F \neq I_a$.

29.- Demostrar que :

1. Si $a \times a$ es un conjunto bien ordenable, entonces a también lo es.
2. Si $\mathbf{P}(a)$ es un conjunto bien ordenable, entonces a también lo es.

30.- Sea $\langle a, <\rangle$ un conjunto parcialmente ordenado. Probar que son equivalentes:

1. Para cada subconjunto no vacío, b de a, existe un elemento minimal de b.
2. Si $\varphi(x)$ es una fórmula del lenguaje de la teoría de conjuntos, tal que
$$\forall x \in a \; ((\forall y \in a(y < x \to \varphi(y))) \to \varphi(x))$$
entonces $\forall x(x \in a \to \varphi(x))$.

31.- (Inducción sobre conjuntos bien fundamentados) Sea a un conjunto y R una relación en a. Diremos que R es **bien fundamentada** sobre a si todo subconjunto no vacío, x, de a posee elemento R–minimal; es decir, $\exists y(y \in x \wedge \forall z(z \in x \to \langle z, y\rangle \notin R))$.

Sea R una relación bien fundamentada sobre a. Probar que si b es un subconjunto de a tal que $\forall x \in a((\forall y \in a(\langle y, x\rangle \in R \to y \in b)) \to x \in b)$, entonces $b = a$.

Tema 4 : Ordinales

32.- Sea a un conjunto transitivo. Probar que los conjuntos $\bigcup a$ y $\mathbf{P}(a)$ también son transitivos. ¿Puede afirmarse que si $\bigcup a$ ó $\mathrm{P}(a)$ es transitivo, lo sea el conjunto a?

33.- Sea a un conjunto. Demostrar que a es transitivo si y sólo si $\bigcup a^+ = a$.

34.- Dar ejemplos de: (a) un conjunto transitivo que no sea un ordinal; (b) un conjunto bien ordenado por la relación de pertenencia que no sea un ordinal.

35.- Demostrar que si a es un conjunto, entonces son equivalentes:

1. a es un ordinal.
2. $\in_a$ es un buen orden en a y $\forall x \in a \; (x = \{y \in a : y \in x\})$.
3. Existe un buen orden R en a tal que $\forall x \in a \; (x = \{y \in a : yRx\})$.

4. $\subset_a = \{< x, y > \in a \times a : x \subsetneqq y\}$ es un buen orden en a y $\forall x \in a$ $(x = \{y \in a : y \subsetneqq x\})$.

36.- Dado un ordinal α, probar que $\alpha^+ = min\{\beta \in \text{ Ord } : \alpha < \beta\}$.

37.- Demostrar que si α y β son ordinales tales que $\alpha < \beta$, entonces $\alpha^+ < \beta^+$.

38.- Sean a y b conjuntos de ordinales. Supongamos que $\forall\alpha(\alpha \in a \to \exists\beta(\beta \in b \wedge \alpha < \beta))$. Probar que $\bigcup a \in \bigcup b$ ó $\bigcup a = \bigcup b$.

39.- Sea A una clase de ordinales. Probar que son equivalentes:

1. A es una clase propia.
2. A no está acotada superiormente en $\langle \text{Ord}, \in\rangle$.
3. $\bigcup A = \text{Ord}$.

40.- Sean a y b conjuntos. Usando el axioma de reemplazamiento, probar que las siguientes clases son conjuntos:
(1) $\{\{\{x\}\} : x \in a \cup b\}$ (2) $\{a \cup x : x \in b\}$ (3) $\{\mathbf{P}(x) : x \in a\}$ (4) $\{x \cup y : x \in a \wedge y \in b\}$

41.- Sea F una aplicación. Probar que F es un conjunto si y sólo si $\text{dom}(F)$ es un conjunto.

42.- Sea F una aplicación. Demostrar o refutar:

1. Si x es un conjunto, entonces $F^{-1}[x]$ es un conjunto.
2. Si x es un conjunto y F es inyectiva, entonces $F^{-1}[x]$ es un conjunto.

43.- Demostrar o refutar:

1. Si R es una relación y a un conjunto, entonces $R[a]$ es conjunto.
2. $(\forall z)(\exists u)(\forall y)[y \in u \leftrightarrow (\exists x \in z)(\forall v)[v \in y \leftrightarrow (\exists w \in x)(v \in w)]]$.

44.- Demostrar que si $\langle a, <\rangle$ es un conjunto bien ordenado y $a \neq \emptyset$, entonces

$$t.o.(\langle a, <\rangle) = \{t.o.(\langle a_x, <\rangle) : x \in a\}$$

45.- Sea R la relación definida en $\mathbb{Z}$ por $xRy \iff |x| < |y| \vee (|x| = |y| \wedge x < y)$.

1. Demostrar que R es un buen orden en $\mathbb{Z}$.
2. Calcular $t.o.(\langle S_x, R\rangle)$.

46.- Sea R la relación definida en $\omega \times \omega$ por

$$< x, y > R < x', y' > \iff x + y < x' + y' \vee (x + y = x' + y' \wedge x < x')$$

1. Demostrar que R es un buen orden en $\omega \times \omega$.
2. Calcular $t.o.(\langle S_{<x,y>}, R\rangle)$.
3. Probar que la aplicación $f : \omega \times \omega \to \omega$ definida por $f(< x, y >) = \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} + x$ es un isomorfismo de $\langle \omega \times \omega, R\rangle$ en $\langle \omega, <\rangle$.

47.- Sea R la relación definida en $\omega \times \omega$ por

$$< x, y > R < x', y' > \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} max(x, y) < max(x', y') \vee \\ (max(x, y) = max(x', y') \wedge x < x') \vee \\ (max(x, y) = max(x', y') \wedge x = x' \wedge y < y') \end{cases}$$

1. Demostrar que R es un buen orden en $\omega \times \omega$.
2. Calcular $t.o.(\langle S_{<0,y>}, R\rangle)$.
3. Calcular $t.o.(\langle S_{<x,y>}, R\rangle)$.

48.- Sea $A = \{f \mid f \ : [0, +\infty) \to \mathbb{R} \wedge f$ continua $\wedge f(0) = 0\}$. Se define

$$f < g \quad \Longleftrightarrow \quad (\exists x \in [0, +\infty))[(\forall v \leq x)[f(v) = g(v)] \wedge (\forall v > x)[f(v) < g(v)]].$$

1. ¿Es $\langle A, <\rangle$ un orden parcial?¿Y total?
2. Encontrar $B \subseteq A$ tal que $\langle B, <\rangle$ sea un buen orden y $t.o.(\langle B, <\rangle) = \omega \cdot 2 + 1$.

Tema 5 : El conjunto de los números naturales.

49.- Sea $\langle a, <\rangle$ un conjunto bien ordenado no vacío y $\alpha = t.o.(\langle a, <\rangle)$. Demostrar que el ordinal α es límite si y sólo si $\langle a, <\rangle$ carece de elemento maximo.

50.- Sea a un conjunto no vacío de ordinales. Demostrar o refutar:

1. Si los elementos de a son límites, entonces $\bigcup a$ es límite.
2. Si los elementos de a son sucesores, entonces $\bigcup a$ es sucesor.

51.- Demostrar que un ordinal es límite si y sólo sí es un conjunto inductivo.

52.- Dar un ejemplo de un conjunto inductivo que no sea un ordinal.

53.- Sean R y S las relaciones sobre $2 \times \omega$ definidas por

$$\begin{array}{l} < x, y > R < x', y' > \leftrightarrow x + y < x' + y' \vee (x + y = x' + y' \wedge x < x') \\ < x, y > S < x', y' > \leftrightarrow x < x' \vee (x = x' \wedge y < y') \end{array}$$

Demostrar que :

1. $t.o.(\langle 2 \times \omega, R\rangle) = \omega$
2. $t.o.(\langle 2 \times \omega, S\rangle)$ es un ordinal límite.
3. $t.o.(\langle 2 \times \omega, S\rangle) > \omega$.

Tema 6 : Teoremas de inducción y recursión

54.- Demostrar que si a es un conjunto y $G : V \times V \to V$, entonces existe una única aplicación $f : \omega \to V$ tal que

$$\begin{array}{l} f(0) = a \\ \forall n \ (f(n+1) = G(< f(n), n >)) \end{array}$$

55.- Sean a un conjunto y $G, H : V \to V$. Demostrar que existe una única aplicación $F : \mathbf{Ord} \to V$ tal que

$$F(\alpha) = \begin{cases} a, & \text{si } \alpha = 0; \\ G(F(\beta)), & \text{si } \alpha = \beta + 1; \\ H(F(\restriction \alpha)), & \text{si } \alpha \text{ es límite} \end{cases}$$

56.- Demostrar que si $G : V \times V \to V$, entonces existe una única aplicación $F : V \times \mathbf{Ord} \to V$ tal que

$$\forall a \forall \alpha \ (F(a, \alpha) = G(a, F_a \restriction \alpha)),$$

donde $F_a : \mathbf{Ord} \to V$ está definida por $F_a(\beta) = F(a, \beta)$.

57.- Sean a un conjunto, $G : V \to V$ y $f : \omega \to V$ definida por

$$\begin{array}{l} f(0) = a \\ \forall n \ (f(n+1) = G(f(n))) \end{array}$$

Demostrar que si G es inyectiva y $a \notin \text{rango}(G)$, entonces f es inyectiva.

58.- Demostrar o refutar: Si $G_1, G_2 : V \to V$ tales que $G_{1|Ord} = G_{2|Ord}$, entonces las funciones F_1 y F_2 que obtenemos aplicando el teorema de recursión sobre ordinales a G_1 y G_2, respectivamente, son iguales.

59.- Sea $m \in \omega$ y notemos $[m, \to) = \{n \in \omega : m \leq n\}$. Sea B un conjunto no vacío y $a \in B$. Sea g una aplicación de B en B. Demostrar que existe una única aplicación $F : [m, \to) \to B$ tal que

$$\begin{array}{l} F(m) = a \\ \forall n \in [m, \to) \ (F(n+1) = g(F(n)) \end{array}$$

60.- (**Suma de números naturales**)

1. Demostrar que para cada $n \in \omega$ existe una única aplicación $\varphi_n : \omega \to \omega$ tal que

$$\begin{array}{l} \varphi_n(0) = n \\ \forall x \ (\varphi_n(x+1) = \varphi_n(x) + 1) \end{array}$$

2. Demostrar que existe una única $\varphi : \omega \times \omega \to \omega$ tal que

$$\begin{array}{l} \forall m \ (\varphi(m, 0) = m) \\ \forall m \forall n \ (\varphi(m, n+1) = \varphi(m, n) + 1) \end{array}$$

61.- (**Producto de números naturales**)

1. Demostrar que para cada $n \in \omega$ existe una única aplicación $\psi_n : \omega \to \omega$ tal que

$$\begin{array}{l} \psi_n(0) = 0 \\ \forall x \ (\psi_n(x+1) = n + \psi_n(x)) \end{array}$$

2. Demostrar que existe una única $\psi : \omega \times \omega \to \omega$ tal que

$$\begin{array}{l} \forall m \ (\psi(m, 0) = 0) \\ \forall m \forall n \ (\psi(m, n+1) = m + \psi(m, n)) \end{array}$$

62.- (La función factorial) Demostrar que existe una única aplicación $f : \omega \to \omega$ tal que

$$f(0) = 1 \quad \text{y} \quad (\forall n) \ (f(n+1) = (n+1)f(n))$$

Tema 7 : Aritmética ordinal

63.- Determinar cuáles de las siguientes funciones $F_i : \mathbf{Ord} \to \mathbf{Ord}$ son normales:

1. $F_1(\alpha) = \alpha + 1$
2. $F_2(\alpha) = \begin{cases} \alpha, & \text{si } \alpha < \omega; \\ \omega, & \text{si } \omega \geq \omega. \end{cases}$
3. $F_3(\alpha) = \begin{cases} \alpha + 1, & \text{si } \alpha \text{ no es límite;} \\ \alpha, & \text{si } \alpha \text{ es límite.} \end{cases}$
4. $F_4(\alpha) = \bigcup \alpha$

64.- Sea $F : \mathbf{Ord} \to \mathbf{Ord}$ normal. Probar:

1. $A = \{\alpha \ : \ F(\alpha) = \alpha\}$ es propia.
2. Dado un ordinal α, el punto fijo β de F que proporciona la prueba del teorema de Veblen es el **menor** de los puntos fijos de F que es mayor o igual que α.

65.- Probar que la clase $\{\alpha \in \mathbf{Ord} : \alpha \text{ es límite}\}$ es una clase propia.

66.- Sea $F : \mathbf{Ord} \to \mathbf{Ord}$ una función normal y G el único isomorfismo tal que $G : \mathbf{Ord} \cong \{\alpha \ : \ F(\alpha) = \alpha\}$. Probar que $F = G$ si, y sólo si, $(\forall \alpha)[F(\alpha) = \alpha]$.

67.- ¿Existe algún ordinal α tal que $\alpha + \omega = \alpha^+$?.

68.- Dar ejemplos de ordinales α, β tales que

$$(1)\ \alpha < \beta \text{ y } \alpha + \beta < \beta + \alpha \qquad (2)\ \alpha < \beta \text{ y } \beta + \alpha < \alpha + \beta$$

69.- Hallar una permutación de los ordinales $1, 2, \omega$ tal que su suma sea, respectivamente:

$$\omega, \quad \omega + 1, \quad \omega + 2, \quad \omega + 3$$

70.- Dar ejemplos de un conjunto $A \subseteq \mathbb{Q}$ tal que el tipo ordinal de $\langle A, <_{\mathbb{Q}} \rangle$ sea, respectivamente:

$$\omega + n \text{ (con } n > 0), \quad \omega \cdot 2, \quad \omega \cdot \omega$$

71.- Sean $\alpha, \beta \in \mathbf{Ord}$ con $\beta \neq 0$. Demostrar que $\alpha + \beta$ es límite si y sólo si β es límite.

72.- Para cada $n \in \omega$, se definen $A_n = \{\alpha : n + \alpha = \alpha\}$ $\quad A'_n = \{\alpha : n \cdot \alpha = \alpha\}$. Demostrar que:

1. $A_0 = \mathbf{Ord} = A'_1$ y $A'_0 = 1$.
2. Si $n \neq 0$, entonces $A_n = \mathbf{Ord} - \omega$.
3. Si $n > 1$, entonces $A'_n = \{\omega \cdot \beta : \beta > 0\}$.

73.- Sean $p, q, n \in \omega$. Demostrar que:

$$(\omega \cdot p + q) \cdot n \ = \ \begin{cases} q \cdot n & \text{si } p = 0 \\ 0 & \text{si } p \neq 0 \wedge n = 0 \\ \omega \cdot p \cdot n + q & \text{si } p \neq 0 \wedge n \neq 0 \end{cases}$$

⟦ **Indicación :** Para $p > 0$ pruébese el resultado por inducción sobre n.⟧

74.- Demostrar que si $\alpha < \beta$ y γ es sucesor, entonces $\alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$.

75.- Demostrar que si $\alpha > 1$ y $\beta > 1$, entonces $\alpha + \beta \leq \alpha \cdot \beta$.

76.- Demostrar que si $n > 1$, entonces $n^\omega = \omega$.

77.- Demostrar que si $\alpha > 1$, entonces $\beta \leq \alpha^\beta$.

78.- Hallar, en cada caso, el cociente y el resto de dividir α por β:
(1) $\alpha = \omega^2 + \omega \cdot 5 + 3, \quad \beta = \omega^2 + 1$ (2) $\alpha = \omega^\omega + \omega^3 + \omega \cdot 3 + 2, \quad \beta = \omega^5$

79.- Demostrar que si $\alpha > 0$ y β es límite, entonces $\alpha^+ \cdot \beta = \alpha \cdot \beta$.

80.- Sean $\alpha, \beta \in$ **Ord**. Probar que si α es límite y $\beta \neq 0$, entonces α^β es límite ¿Es cierto el recíproco?

81.- Sean $\alpha, \beta \in$ **Ord** tales que $\alpha < \beta$. Sean $p, q \in \omega$ tales que $q > 0$. Probar que:

$$\omega^\alpha \cdot p + \omega^\beta \cdot q = \omega^\beta \cdot q$$

82.- Simplificar las siguientes expresiones:
(1) $(\omega^2 + \omega \cdot 2 + 2) + (\omega + 1)$ (2) $(\omega^7 + \omega^5 + \omega^3 \cdot 2 + \omega \cdot 10 + 3) + (\omega^4 + \omega^2 \cdot 2 + 2)$

83.- Sean $k \in \omega - \{0\}$, $\gamma_o, \ldots, \gamma_k \in$ **Ord** y $n_0, \ldots, n_k \in \omega$ tales que $\gamma_0 > \ldots > \gamma_k$ y $n_i > 0$ $(\forall i \leq k)$. Demostrar que :

1. Si $p > 0$, entonces $(\omega^{\gamma_0} \cdot n_0 + \cdots + \omega^{\gamma_k} \cdot n_k) \cdot p = \omega^{\gamma_0} \cdot n_0 \cdot p + \omega^{\gamma_1} \cdot n_1 \cdots + \omega^{\gamma_k} \cdot n_k$.
2. Si $\gamma > 0$, entonces $(\omega^{\gamma_0} \cdot n_0 + \cdots + \omega^{\gamma_k} \cdot n_k) \cdot \omega^\gamma = \omega^{\gamma_0 + \gamma}$

84.- Expresar los siguientes ordinales en la forma normal de Cantor:
(1) $(\omega + 1)^2$ (2) $(\omega + 1)(\omega^2 + 1)$ (3) $(\omega^2 + 1)(\omega + 1)$ (4) $(\omega^3 + \omega)^5$
(5) $(\omega^5 + \omega^3)^3$ (6) $(\omega^3.4 + \omega^2.5 + 2)^2 + \omega^5 + 3$ (7) $\bigcap\{\alpha \ : \ \alpha^\alpha > \epsilon_0 + 1\}$

.

85.- Probar la veracidad o falsedad de las siguientes fórmulas:

1. $(\forall \alpha)[\alpha < \omega^2 \rightarrow \alpha + \omega^2 = \omega^2]$.
2. $(\forall \alpha)[\alpha < \omega^2 + 1 \rightarrow \alpha + \omega^2 + 1 = \omega^2 + 1]$.

86.- Sea $F :$ **Ord** $\rightarrow$ **Ord** la aplicación definida por $F(\alpha) = \omega.\alpha$ y $A = \{\alpha : F(\alpha) = \alpha\}$.

1. Probar que existe un único isomorfismo $G : \langle \mathbf{Ord}, \in \rangle \cong \langle A, \in \rangle$.
2. Hallar $G(0)$, $G(1)$ y probar que $G(n) = \omega^\omega \cdot n (\forall n \in \omega)$.
3. Probar que G es normal y calcular $G(\omega)$.
4. Demostrar que $G(\alpha) = \omega^\omega \cdot \alpha$ $(\forall \alpha \in \mathbf{Ord})$ y hallar el menor punto fijo no nulo de G.

87.- Sean $\alpha, \beta \in$ **Ord**. Consideremos el conjunto $a = \{f : (f : \beta \rightarrow \alpha) \wedge (\{\delta \in \beta : f(\delta) \neq 0\}$ es finito$)\}$ y la relación R en a definida por $fRg \leftrightarrow (\exists \gamma)[\gamma = \sup\{\delta \in \beta : f(\delta) \neq g(\delta)\} \wedge f(\gamma) < g(\gamma)]$. Demostrar que:

1. $\langle a, R \rangle$ es un conjunto bien ordenado.
2. $t.o.(\langle a, R \rangle) = \alpha^\beta$.

Tema 8 : El teorema del buen orden

88.- Demostrar que son equivalentes:

1. El axioma de elección.
2. Para cada familia $(a_i)_{i \in I}$ de conjuntos no vacíos, el producto cartesiano $\prod_{i \in I} a_i$ es no vacío.

89.- Demostrar (en $\mathbf{ZF}^-$) que son equivalentes:

1. El axioma de elección.
2. Si a es un conjunto, entonces para cada partición de a existe un conjunto b que tiene uno y sólo un elemento en común con cada conjunto de la partición.

90.- Demostrar (en $\mathbf{ZF}^-$) que son equivalentes:

1. El axioma de elección.
2. Si a es un conjunto y R es una relación de equivalencia en a, entonces existe un conjunto b que tiene uno y sólo un elemento en común con cada clase de equivalencia de a $[\![b$ se denomina un **conjunto de Zermelo** de $a]\!]$.

91.- Demostrar (en $\mathbf{ZF}^-$) que son equivalentes:

1. El axioma de elección.
2. Toda relación binaria contiene una aplicación con el mismo dominio.

92.- Sean a, b conjuntos y f una aplicación de a en b. Demostrar (en $\mathbf{ZFC}^-$) que f es suprayectiva si y sólo si existe una aplicación h de b en a tal que $f \circ h = I_b$, siendo I_b la aplicación identidad en el conjunto b.

93.- Sea $\langle A, < \rangle$ un conjunto ordenado. Demostrar (en $\mathbf{ZFC}^-$) que son equivalentes:

1. Todo subconjunto no vacío de A posee algún elemento minimal.
2. No existe una aplicación $f : \omega \to A$ tal que $\forall n \in \omega \; (f(n+1) < f(n))$.

Indicación: Probar (2) $\Longrightarrow$ (1) por el contrarrecíproco, utilizando el teorema de recursión sobre ω.

Tema 9 : Conjuntos finitos, infinitos y numerables

94.- Demostrar que si $x \sim y$, entonces $\mathbf{P}(x) \sim \mathbf{P}(y)$.

95.- Demostrar o refutar: $y \subseteq x \wedge z \subseteq x \wedge y \sim z \to x - y \sim x - z$.

96.- Sea a un conjunto. Demostrar que a es finito si y sólo si existen $n \in \omega$ y una aplicación suprayectiva de n en a.

97.- Sea a un conjunto finito no vacío y R un orden total en a. Probar que $\langle a, R \rangle$ posee elemento máximo y elemento mínimo.

98.- Sea a un conjunto. Demostrar que a es finito si y sólo si existe un buen orden R en a tal que R^{-1} es un buen orden en a.

99.- Sea $\langle a, < \rangle$ un conjunto totalmente ordenado tal que todo subconjunto de a acotado superiormente es finito. Demostrar que $\langle a, < \rangle$ es un conjunto bien ordenado.

100.- Demostrar que el conjunto $\mathbb{Z}[x]$ de polinomios con coeficientes en $\mathbb{Z}$, es numerable.

101.- Diremos que un número real b es **algebraico** si es raiz de algún polinomio perteneciente a $\mathbb{Z}[x]$. Probar que el conjunto de los números algebraicos es numerable.

Temas 10 y 11 : Cardinales. Aritmética cardinal.

102.- Demostrar (explicitando una biyección) que son equipotentes los siguientes intervalos:

$$[0,1], \quad]0,1[, \quad [0,1[, \quad]0,1]$$

103.- Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$. Demostrar que los intervalos $[a,b]$, $]a,b[$,$[a,b[$ y $]a,b]$ son equipotentes (mostrando una biyección).

104.- Demostrar, mediante una biyección:

1. $[0,1[\sim [0,+\infty[$.
2. $]-1,0] \sim]-\infty,0]$.
3. $]-1,1[\sim \mathbb{R}$.
4. $[a,b] \sim \mathbb{R}$, siendo $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$.

105.- Demostrar que $]0,1[\sim {}^{\omega}2 \sim \mathbb{R} \sim P(\omega)$, admitiendo el siguiente resultado:

"Si $a \in \omega, a > 1$, entonces para cada $x \in]0,1[$, existe una única sucesión $\{x_n \ : \ n \in \omega\}$ de números naturales tal que:

1. Para cada $n \in \omega, x_n < a$.
2. $x = \sum_{n \in \omega} \frac{x_n}{a^{n+1}}$.
3. Existen infinitos n tales que $x_n < a - 1$."

106.- Hallar el cardinal de $\mathbb{R}$. Probar que $\mathbb{R}^2 \sim \mathbb{R}$. Hallar el cardinal de $\mathbb{R}^n$, para cada $n \neq 0$, y de $\mathbb{C}$.

107.- Sea a un subconjunto numerable de $\mathbb{R}^2$. Probar que $\mathbb{R}^2 - a \sim \mathbb{R}$. Establecer un resultado similar, siendo a un subconjunto numerable de $\mathbb{R}$.

108.- Sea a un conjunto. Consideremos el conjunto

$$P_F(a) = \{b : b \in P(a) \land b \text{ es un conjunto finito}\}$$

Demostrar que si a es numerable, entonces $P_F(a)$ es numerable.

109.- Probar que el conjunto

$$a = \{f \in^{\omega} \omega : \{n \in \omega : f(n) \neq 0\} \text{ es finito }\}$$

es numerable.

110.- Sea a un conjunto. Notemos ${}^{<\omega}a$ al conjunto de todas las sucesiones finitas de elementos de a. Probar que si $\alpha \in \mathbf{Ord} - \omega$, entonces $\alpha \sim {}^{<\omega} \alpha$. Deducir que $|{}^{<\omega}\omega_\alpha| = \aleph_\alpha$.

111.- Hallar, mediante aritmética cardinal, el cardinal de:

1. El conjunto de las sucesiones finitas de números naturales.
2. El conjunto de las sucesiones finitas de números reales.
3. El conjunto de las sucesiones infinitas de números naturales
4. El conjunto de las sucesiones infinitas de números reales.

112.- Demostrar que si $|a| \geq \aleph_0$, $b \subseteq a$ y $|b| < |a|$, entonces $|a - b| = |a|$.

113.- Calcular el cardinal de cada uno de los siguientes conjuntos:

1. El conjunto de las aplicaciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.
2. El conjunto de las aplicaciones contínuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.
3. El conjunto de las aplicaciones discontinuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

114.- Probar que:
(1) $|\{\alpha \in \mathbf{Ord} : |\alpha| < \aleph_0\}| = \aleph_0$ (2) $|\{\alpha \in \mathbf{Ord} : |\alpha| \leq \aleph_0\}| = |\{\alpha \in \mathbf{Ord} : |\alpha| = \aleph_0\}| = \aleph_1$

115.- Sea $\alpha \in \mathbf{Ord}$. Probar que

1. Para cada $\beta \in \mathbf{Ord}$ se verifica: $\aleph_\alpha \leq \beta < \aleph_{\alpha+1} \Longrightarrow |\beta| = \aleph_\alpha$.
2. $|\{\beta \in \mathbf{Ord} : |\beta| = \aleph_\alpha\}| = \aleph_{\alpha+1}$.

116.- Demostrar que todo cardinal infinito es **primo** (es decir, no es el producto de dos cardinales primos menores).

117.- Sean $\alpha, \beta \in \mathbf{Ord}$ tales que $|\alpha| \leq \beta \leq \alpha$. Probar que $|\beta| = |\alpha|$.

118.- Sea f una aplicación y a un conjunto. Probar que $|f[a]| \leq |a|$.

119.- Probar que $|\omega^\omega| = |\epsilon_0| = \aleph_0$.

120.- Sean α, β y γ ordinales tales que $|\alpha| \leq \aleph_\gamma$ y $|\beta| \leq \aleph_\gamma$. Probar que

$$|\alpha + \beta| \leq \aleph_\gamma, \quad |\alpha \cdot \beta| \leq \aleph_\gamma \quad \text{y} \quad |\alpha^\beta| \leq \aleph_\gamma$$

en donde $\alpha + \beta$, $\alpha \cdot \beta$ y α^β son operaciones ordinales.

(Indicación: pruébense dichos resultados por inducción sobre β).