DISPARO DE REGLAS COMO MÉTODO DEDUCTIVO EN SISTEMAS BASADOS EN CONOCIMIENTO

Luis M. Laita de la Rica[1)]

José A. Alonso Jiménez[2)]

Alejandro Fernández Margarit[2)]

Universidad Politécnica de Madrid[1)]

Universidad de Sevilla[2)]

§1 Introducción

Este trabajo forma parte de un proyecto más amplio dedicado a la representación formal de Sistemas Basados en Conocimiento (KBS) que permita un marco teórico para unificar conceptos en el estudio de problemas relativos a la verificación de Sistemas Basados en Conocimientos.

Una componente importante de un Sistema Basado en Conocimiento es su Base de Conocimientos que contiene reglas y hechos. Nuestra idea es considerar las reglas de la Base de Conocimientos, las restricciones de los expertos y los hechos como axiomas de una teoría de primer orden. En §2, siguiendo [3]–[7], presentamos una descripción formal de la Base de Conocimientos.

El §3 es el núcleo de este trabajo. Aquí definimos un procedimiento de demostración que denominamos pruebas por disparo de reglas y estudiamos su relación con el concepto usual de prueba en teorías de primer orden. Además, se caracterizan algunas anomalías entre reglas usando el este concepto de demostración.

En trabajos anteriores, [3]–[7], hemos usado los m–ideales como modelo formal para estudiar problemas sobre la verificación de Sistemas Basados en Conocimientos. En §4 definimos los m–ideales relativos a las pruebas por disparo de reglas que denominamos m–**FR**–ideales. Presentamos algunos resultados que relacionan a los m–**FR**–ideales con la consistencia (por disparo de reglas) y con anomalías entre reglas.

Una prueba por disparo de reglas es un procedimiento para probar un literal usando un conjunto de reglas y una colección de literales. En §5 tratamos algunas cuestiones sobre la extensión del concepto de prueba por disparo de reglas.

§2 Descripción formal de Sistemas Basados en Conocimiento

Puesto que la sintaxis y la semántica de los lenguajes de primer orden están bien definidas, estudiaremos Sistemas Basados en Conocimiento cuya Base de Conocimientos se describe a través de un conjunto de reglas suceptibles de ser representadas en lenguajes de primer orden.

Sea $\mathbf{L}$ un lenguaje de primer orden. Los términos de $\mathbf{L}$ se obtienen a partir de los símbolos de constantes y variables usando los símbolos de funciones del lenguaje. Si $\mathbf{p}$ es un símbolo de predicado n–ario de $\mathbf{L}$ y $t_1, \ldots, t_n$ son términos de $\mathbf{L}$, entonces $\mathbf{p}(t_1, \ldots, t_n)$ es una fórmula atómica de $\mathbf{L}$. Las fórmulas de $\mathbf{L}$ se obtienen a partir de las fórmulas atómicas y las conectivas: $\vee$ (disyunción), $\wedge$ (conjunción), $\neg$ (negación), $\rightarrow$ (implicación) y los cuantificadores existencial y universal $\exists$, $\forall$.

Sin embargo, la representación que haremos de los Sistemas Basados en Conocimiento nos permite prescindir de los cuantificadores como símbolos del lenguaje de primer orden que usamos para la descripción formal de su Base de Conocimientos (ver [5]).

Un literal es una fórmula atómica o la negación de una fórmula atómica. Una fórmula de $\mathbf{L}$ se dice que es abierta si no contiene estancias de símbolos de cuantificadores. Una sustitución es una aplicación del conjunto de las variables en la colección de los términos. Si φ es una fórmula de $\mathbf{L}$, $x_1, \ldots, x_n$ las variables libres de φ y σ una sustitución, notaremos por φ^σ a la fórmula que se obtiene de φ sustituyendo todas las estancias libres de $x_1, \ldots, x_n$ en φ por $\sigma(x_1), \ldots, \sigma(x_n)$, repectivamente.

En lógica de primer orden una teoría consta de un lenguaje de primer orden, un conjunto de axiomas lógicos, un conjunto de axiomas no lógicos y una colección de procesos de inferencia. Una prueba en la teoría es una sucesión de fórmulas del lenguaje de la teoría: $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$, tal que cada una de ellas es un axioma de la teoría (lógico o no lógico) o se obtienen de fórmulas anteriores de la sucesión mediante alguno de los procedimientos de inferencia. Si $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ es una prueba en una teoría $\mathbf{T}$, diremos que φ_k es un teorema de $\mathbf{T}$, y notaremos: $\mathbf{T} \vdash \varphi_k$. Una teoría de primer orden es inconsistente si toda fórmula es un teorema de la teoría.

Supondremos que la colección de axiomas lógicos y el conjunto de las reglas de inferencia que se consideran verifican el teorema de completitud.

Una regla, R, es una fórmula del tipo:

$$\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_m \rightarrow \psi$$

donde $\varphi_1, \ldots, \varphi_m, \psi$ son literales. Consideraremos la Base de Conocimientos (conjuntamente con restricciones y hechos) como una teoría de primer orden. Esta teoría se denomina teoría asociada al Sistema Basado en Conocimiento.

Supondremos que el lenguaje de primer orden tiene un símbolo de predicade 0–ario, $\mathbf{F}$, que se interpreta como falso.

Una parte importante de la Base de Conocimientos está formada por las restricciones (constraints) dadas por los expertos. Las restricciones se describen como reglas del tipo:

$$\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \rightarrow \mathbf{F}$$

es decir, no se pueden dar simultáneamente $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$. Para cada fórmula atómica, φ, las fórmulas $\varphi \wedge \neg\varphi \rightarrow \mathbf{F}$, $\mathbf{F} \rightarrow \varphi$ y $\mathbf{F} \rightarrow \neg\varphi$ son restricciones lógicas que supondremos que pertenencen a cualquier Base de Conocimientos.

Un hecho de un Sistema Basado en Conocimiento es cualquier literal de su lenguaje. Un conjunto de hechos, Σ, diremos que es consistente con respecto a una Base de Conocimientos si no existe una restricción

$$\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \rightarrow \mathbf{F}$$

tal que $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}^\sigma \subseteq \Sigma$ para alguna sustitución σ.

Consideremos que, siguiendo la metodología anterior, la Base de Conocimientos ha sido formalizada como una teoría, **KB**, cuyos axiomas no lógicos son las reglas y las restricciones.

Diremos que **KB** es inconsistente si para toda fórmula, φ, $\mathbf{KB} \vdash \varphi$. Se tiene el siguiente resultado.

RESULTADO. Sea **KB** la teoría asociada a una Base de Conocimientos. Las condiciones siguientes son equivalentes:

(i) **KB** es inconsistente.
(ii) $\mathbf{KB} \vdash \mathbf{F}$. Ξ

§3 Razonamiento por disparo de reglas

En este apartado definiremos y estudiaremos el concepto de consecuencia por disparo de reglas.

Sea R, una regla de la Base de Conocimientos,

$$\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \rightarrow \psi$$

Definimos $\mathrm{IF}(R)$ como el conjunto de los antecedentes de R y $\mathrm{THEN}(R)$ como el conjunto de consecuentes. Es decir,

(–) $\mathrm{IF}(R) = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$.
(–) $\mathrm{THEN}(R) = \{\psi\}$.

En los Sistemas Basados en Conocimiento la relación de conclusión es más restrictiva que la que proporciona los sistemas lógicos usuales. En lo que sigue vamos a definir una relación de conclusión basada en el disparo de reglas.

DEFINICIÓN 3.1. Sean $R : \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \rightarrow \psi$ una regla y Σ un conjunto de hechos. Diremos que el conjunto de hechos Σ dispara a la regla R si existe una sustitución σ tal que $\mathrm{IF}(R^\sigma) \subseteq \Sigma$.

DEFINICIÓN 3.2. Por recursión sobre $n \in \omega$ definimos los conjuntos Σ_n como sigue:

(–) $\Sigma_0 = \Sigma$

(–) $\Sigma_{n+1} = \Sigma_n \cup \{\psi^\sigma : \text{ existe } R \text{ tal que } (\mathrm{IF}(R^\sigma) \subseteq \Sigma_n \wedge \mathrm{THEN}(R^\sigma) = \{\psi^\sigma\})\}$.

Definimos $\Sigma_* = \bigcup_{n\in\omega} \Sigma_n$

Definición 3.3. Sean **KB** la teoría asociada a una Base de Conocimientos y Σ un conjunto de hechos. Diremos que un literal θ es deducible de **KB** y Σ por disparo de reglas, $\mathbf{KB} + \Sigma \vdash_{\mathbf{FR}} \theta$, si $\theta \in \Sigma_*$.

La definición de deducción por disparo de reglas prescinde de los axiomas lógicos en el proceso de deducción en teorías de primer orden.

Definición 3.4. Sean Σ un conjunto de hechos y **KB** una Base de Conocimientos.

(a) Diremos que Σ es inconsistente con **KB**, si para todo literal, φ, $\mathbf{KB} + \Sigma \vdash \varphi$.

(b) Diremos que Σ es **FR**–inconsistente con **KB**, si para todo literal, φ, $\mathbf{KB}+\Sigma \vdash_{\mathbf{FR}} \varphi$. En caso contrario diremos que es **FR**–consistente.

Puesto que $\mathbf{F} \to \varphi$ es una restricción tenemos que:

Proposición 3.5. Las condiciones siguientes son equivalentes:

(a) Σ es **FR**–inconsistente con **KB**

(b) $\mathbf{KB} + \Sigma \vdash_{\mathbf{FR}} \mathbf{F}$. Ξ

Es evidente que si Σ es consistente con **KB**, entonces es **FR**–consistente. Sin embargo, el recíproco no es cierto. En efecto, sea **KB** el siguiente conjunto de reglas

$$\{\varphi \wedge \psi \to \theta, \varphi \wedge \neg\psi \to \theta\}$$

Sea $\Sigma = \{\varphi, \neg\theta\}$. Es evidente que Σ es inconsistente con **KB**. Sin embargo, Σ es **FR**–consistente con **KB**.

Seguidamente probaremos un teorema que muestra que para ciertos tipos de Bases de Conocimientos el concepto usual de consistencia coincide con el concepto de **FR**–consistencia.

Definición 3.6. Una Base de Conocimientos, **KB**, diremos que que es de Horn si todas las reglas son del tipo

$$\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \to \psi$$

en donde φ_i $(1 \leq i \leq n)$, ψ son fórmulas atómicas.

Teorema 3.7. Sea **KB** una Base de Conocimientos de Horn. Las condiciones siguientes son equivalentes:

(a) Σ es consistente con **KB**.

(b) Σ es **FR**–consistente con **KB**.

Demostración: ((**a**) $\Longrightarrow$ (**b**)): Trivial.

((**b**) $\Longrightarrow$ (**a**)): Sea $H(\mathbf{KB})$ el conjunto de los términos cerrados del lenguaje de **KB**; es decir, la base de Herbrand. Consideremos la siguiente estructura, $\mathfrak{A}$:

Universo: $|\mathfrak{A}| = H(\mathbf{KB})$.

Sea φ una fórmula atómica cerrada.

$$\mathfrak{A} \models \varphi \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi \in \Sigma_*$$

Puesto que **KB** es **FR**–consistente, la definición de validez es correcta. Además, $\mathfrak{A} \models \mathbf{KB} + \Sigma$. En efecto, dividiremos la prueba en los casos siguientes:

<u>Caso 1</u>: $\varphi \in \Sigma$. Si φ es atómica, entonces de $\varphi \in \Sigma_*$ se sigue que $\mathfrak{A} \models \varphi$. Si φ es $\neg\psi$ donde ψ es atómica, como Σ es **FR**–consistente con **KB**, entonces $\psi \notin \Sigma_*$. Por tanto, $\mathfrak{A} \not\models \psi$. Es decir, $\mathfrak{A} \models \varphi$.

<u>Caso 2</u>: $R\ :\ \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \to \psi$. Supongamos que

$$\mathfrak{A} \models \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n$$

Entonces para todo i, $1 \leq i \leq n$, $\mathfrak{A} \models \varphi_i$. Por tanto, para todo i, $\varphi_i \in \Sigma_*$. Para cada i sea $k_i \in \omega$ tal que $\varphi_i \in \Sigma_{k_i}$. Sea $k = \max(\{k_1, \ldots, k_n\})$. Entonces $\varphi_i \in \Sigma_k$, $1 \leq i \leq n$. Por tanto, $\psi \in \Sigma_{k+1}$. Luego, $\psi \in \Sigma_*$ y, en consecuencia, $\mathfrak{A} \models \psi$. De lo anterior se sigue que $\mathfrak{A} \models R$.

Por tanto, $\mathfrak{A} \models \mathbf{KB} + \Sigma$. Puesto que $\mathbf{KB} + \Sigma$ tiene un modelo, es consistente. Lo que prueba el teorema. Ξ

Aunque la consistencia y la **FR**–consistencia coinciden para Bases de Conocimientos de Horn, los conceptos de deducción no coinciden para estas tipos de Bases de Conocimientos. Consideremos la siguiente Base de Conocimientos

$$\{\varphi \wedge \psi \to \theta, \theta \to \mathbf{F}\}$$

Sea $\Sigma = \{\psi\}$. Entonces $\mathbf{KB} + \Sigma \vdash \neg\varphi$ y $\mathbf{KB} + \Sigma \not\vdash_{\mathbf{FR}} \neg\varphi$.

La prueba del teorema **??** muestra que la diferencia entre los conceptos de deducción sólo se da para la negación de fórmulas atómicas.

Corolario 3.8. Sean **KB** una Base de Conocimientos de Horn, Σ un conjunto de hechos y φ una fórmula atómica cerrada. Entonces las condiciones siguientes son equivalentes:

(**a**) $\mathbf{KB} + \Sigma \vdash \varphi$.

(**b**) $\mathbf{KB} + \Sigma \vdash_{\mathbf{FR}} \varphi$. Ξ

Para la negación de una fórmula atómica se tiene la siguiente propiedad que describe la deducción por disparo de reglas como un proceso de refutación.

Corolario 3.9. Sean **KB** una Base de Conocimientos de Horn, Σ un conjunto de hechos y φ una fórmula atómica cerrada. Entonces las condiciones siguientes son equivalentes:

(**a**) $\mathbf{KB} + \Sigma \vdash \neg\varphi$.

(**b**) $\Sigma \cup \{\varphi\}$ es **FR**–inconsistente con **KB**.

Demostración: En efecto, por ??

$$\begin{aligned} \mathbf{KB} + \Sigma \vdash \neg\varphi \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathbf{KB} + \Sigma + \varphi \text{ es inconsistente} \\ &\Longleftrightarrow \quad \Sigma \cup \{\varphi\} \text{ es } \mathbf{FR}\text{–inconsistente con } \mathbf{KB} \end{aligned}$$

Lo que prueba el resultado. Ξ

Notas 3.10. **(Anomalías entre reglas)**. Vamos a describir usando las pruebas por disparo de reglas distintas relaciones entre las reglas de una Base de Conocimientos. Aunque estas anomalías no representan defectos de la Base de Conocimientos, pueden dar lugar a errores del sistema cuando se modifican las reglas.

Redundancia: Una regla, R, diremos que es redundante si para todo conjunto de hechos, Σ, y para todo literal φ

$$(\mathbf{KB} - R) + \Sigma \vdash_{\mathbf{FR}} \varphi \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{KB} + \Sigma \vdash_{\mathbf{FR}} \varphi$$

Donde $\mathbf{KB} - R$ es la Base de Conocimientos que se obtiene de $\mathbf{KB}$ suprimiendo la regla R como axioma no lógico.

Subsunción: Sean R_1 y R_2 reglas de $\mathbf{KB}$. Diremos que R_2 está subsumida por R_1 si existe una sustitución σ tal que para todo conjunto de hechos Σ

(a) $(\mathbf{KB} - R_2) + (\Sigma + \mathrm{IF}(R_2)) \vdash_{\mathbf{FR}} \varphi^\sigma$, para todo $\varphi \in \mathrm{IF}(R_1)$
(b) $(\mathbf{KB} - R_2) + (\Sigma + \mathrm{THEN}(R_1^\sigma)) \vdash_{\mathbf{FR}} \mathrm{THEN}(R_2)$

Deficiencia: Diremos que una Base de Conocimientos, $\mathbf{KB}$, es deficiente con respecto a un conjunto de hechos, Σ, si para todo literal, φ

$$\mathbf{KB} + \Sigma \vdash_{\mathbf{FR}} \varphi \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi \in \Sigma$$

Notas 3.11. **(Clasificación de metas y hechos)**. Una meta es un literal del lenguaje de la Base de Conocimientos. Los hechos y las metas se clasifican atendiendo a su distribución en las reglas.

Base de hechos: Definimos la base de hechos, FB, como el conjunto de literales (o estancias de literales) que son antecedentes de alguna regla pero que no son consecuentes de ninguna otra regla; es decir,

$$\mathrm{FB} = \bigcup_{R \in \mathbf{KB}} \mathrm{IF}(R) - \bigcup_{R \in \mathbf{KB}} \mathrm{THEN}(R)$$

Desde un punto de vista operativo estas son las condiciones que el usuario de la Base de Conocimientos tiene que proporcionarle al sistema; es decir, el sistema debe requerir del usuario que le indique la validez de estos literales.

Metas finales: La colección de metas finales, FG, son los literales o estancias de literales que son consecuentes de alguna regla y no son antecedentes de ninguna regla. Es decir,

$$\mathrm{FG} = \bigcup_{R \in \mathbf{KB}} \mathrm{THEN}(R) - \bigcup_{R \in \mathbf{KB}} \mathrm{IF}(R)$$

El propósito de la Base de Conocimientos es establecer la validez de las metas finales. Por tanto, el usuario no puede proporcionarle la validez de estos literales.

Metas/Hechos intermedios: Es la colección de literales o estancias de literales que son consecuentes de alguna regla y antecedentes de otra.

La validez de algunos de estos literales puede ser proporcionada al sistema por el usuario.

NOTAS 3.12. **(Razonamiento hacia atrás)**. La idea de conflicto en razonamiento hacia atrás entre un conjunto de hechos y una meta describe anomalías de la Base de Conocimientos para deducir la meta a partir de los hechos. La definición que presentamos usa el proceso de prueba por disparo de reglas. Sea Σ un conjunto consistente de hechos y ψ un meta. Diremos que ψ está en conflicto con Σ respecto de **KB** si

(–) $\mathbf{KB} + \Sigma \nvdash_{\mathbf{FR}} \psi$

(–) Existe una restricción de **KB**: $\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \to \mathbf{F}$ tal que para todo j, $1 \leq j \leq n$,
$$\mathbf{KB} + (\Sigma + \neg\varphi_j) \vdash_{\mathbf{FR}} \psi$$

La definición anterior trata de describir las pruebas por casos, usando condiciones mutuamente contradictorias, como la formalización de conflicto en la prueba de una propiedad.

§4 M-ideales

Vamos a presentar un modelo formal que es una extensión de los m–ideales de A. Robinson ([11], [12]) en el cual caracterizar, usando la definición de pruebas por disparo de reglas, problemas relativos a la Verificación de Bases de Conocimientos. En particular, prestaremos especial atención al problema de la consistencia.

En una serie de trabajos ([3]–[7]) hemos utilizado los m–ideales como modelo formal para describir problemas relativos a la Verificación de Sistemas Basados en Conocimiento. La propiedades fundamentales de los m–ideales las hemos estudiado en [1] y [2].

DEFINICIÓN 4.1. Sean Γ un conjunto de literales $\Delta \subseteq \Gamma$. Diremos que Δ es un m–**FR**–ideal de Γ sobre **KB** si para todo $\psi \in \Gamma$
$$\mathbf{KB} + \Delta \vdash \psi \quad \Longleftrightarrow \quad \psi \in \Delta$$

Puesto que la intersección de una colección de m–**FR**–ideales es un m–**FR**–ideal, podemos definir el m–**FR**–ideal generado por un conjunto de literales $\Sigma \subseteq \Gamma$, y notaremos $\langle\Sigma\rangle$, como la intersección de todos los m–**FR**–ideales que contienen a Σ. Lo anterior permite considerar el menor m–**FR**–ideal que contiene a un conjunto de literales. Diremos que Γ es contradictorio si para todo literal φ existen $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \Gamma$ tales que $\mathbf{KB} + \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \vdash_{\mathbf{FR}} \varphi$. Es evidente que si Γ es contradictorio, entonces existen $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \Gamma$ tales que para todo literal φ, $\mathbf{KB} + \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \vdash_{\mathbf{FR}} \varphi$. Se tiene el siguiente resultado. Todo m–**FR**–ideal propio de un conjunto contradictorio está contenido en uno maximal.

Sea $\varphi \in \Gamma$. El m–**FR**–ideal generado por φ sobre Γ es el conjunto
$$\mathrm{E}^{\varphi}_{\mathbf{FR}} = \{\psi \in \Gamma : \ \mathbf{KB} + \varphi \vdash_{\mathbf{FR}} \psi\}$$
Si Σ es un conjunto de literales, en m–**FR**–ideal generado por Σ es el conjunto

$$\mathrm{E}^{\Sigma}_{\mathbf{FR}} = \{\psi \in \Gamma : \ \mathbf{KB} + \Sigma \vdash_{\mathbf{FR}} \psi\}$$

Diremos que φ es una unidad si $\mathrm{E}^{\varphi}_{\mathbf{FR}} = \Gamma$; es decir, el m–**FR**–ideal generado por φ no es propio. Un conjunto finito de fórmulas, Σ, diremos que es unitario si $\mathrm{E}^{\Sigma}_{\mathbf{FR}}$ no es propio. Evidentemente, todo conjunto contradictorio contiene conjuntos unitarios.

A continuación pasamos a presentar algunos de los resultados que sobre verificación de Bases de Conocimientos en términos de m–**FR**–ideales.

TEOREMA 4.2. Sea Γ un conjunto contradictorio. Las condiciones siguientes son equivalentes:
- **(a)** Σ es **FR**–consistente con **KB**.
- **(b)** $\mathrm{E}^{\Sigma}_{\mathbf{FR}}$ es propio. Ξ

TEOREMA 4.3. Sea Γ un conjunto contradictorio. Si $\mathrm{E}^{\Sigma}_{\mathbf{FR}}$ no contiene ningún conjunto unitario, entonces Σ es **FR**–consistente con **KB**. Ξ

TEOREMA 4.4. Sea Γ un conjunto contradictorio. Si Σ es un conjunto unitario, entonces podemos añadir $\Sigma \to \mathbf{F}$ como una restricción a la Base de Conocimientos. Ξ

Para las anomalías entre reglas se tiene los siguientes relaciones con el concepto de m–**FR**–ideal.

TEOREMA 4.5. Una regla R es redundante si el m–**FR**–ideal, sobre el conjunto de los literales, $\mathrm{E}_{\mathbf{FR}}{}^{\mathrm{IF}(R)}$ es el mismo en **KB** y en $\mathbf{KB} - R$. Ξ

TEOREMA 4.6. Sean R_1 y R_2 dos reglas. La regla R_2 está subsumida por R_1 si existe una sustitución σ tal que el m–ideal $\mathrm{E}_{\mathbf{FR}}^{\mathrm{IF}(R_1^{\sigma})}$ es el mismo en **KB** y en $\mathbf{KB} - R_2$. Ξ

En los resultados que siguen usaremos el concepto usual de m–ideal para estudiar algunas propiedades de las pruebas por disparo de reglas. Sea Δ un m–ideal. Diremos que Δ es irreducible si para cualesquiera m–ideales Δ_1, Δ_2 tales que $\Delta = \Delta_1 \cap \Delta_2$, entonces $\Delta = \Delta_1$ ó $\Delta = \Delta_2$.

LEMA 4.7. Sea Γ el conjunto de las fórmulas atómicas cerradas. Sean $\Delta \subseteq \Gamma$ un m–ideal irreducible y $\varphi_1, \varphi_2 \in \Gamma$. Si $\mathbf{KB} + \Delta \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2$, entonces $\varphi_1 \in \Delta$ ó $\varphi_2 \in \Delta$.

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que $\varphi_1, \varphi_2 \notin \Delta$. Sean

$$\Delta_1 = \langle \Delta \cup \{\varphi_1\} \rangle, \quad \Delta_2 = \langle \Delta \cup \{\varphi_2\} \rangle$$

Sean $\theta \in \Delta_1 \cap \Delta_2$ y $\mathfrak{A}$ ffl $\mathbf{KB} + \Delta$. De $\mathbf{KB} + \Delta \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2$ se sigue que $\mathfrak{A}$ ffl θ. Luego, por el teorema de completitud, $\mathbf{KB} + \Delta \vdash \theta$. Puesto que Δ es un m–ideal, $\theta \in \Delta$.

De lo anterior se sigue que $\Delta = \Delta_1 \cap \Delta_2$. Lo cual está en contradicción con que Δ es irreducible. Ξ

El resultado anterior sugiere que el concepto de m–ideal irreducible proporciona un instrumento adecuado para modelizar la metodología de la Hipótesis del Mundo Cerrado (CWA) en Bases de Conocimientos. Si φ es una fórmula atómica cerrada tal que $\mathbf{KB}+\Sigma \not\vdash \varphi$, la Hipótesis del Mundo Cerrado consiste en añadir la negación de dicha fórmula como axioma. Por tanto, en el modelo formal debemos usar los m–ideales sobre el conjunto de las fórmulas atómicas (cerradas) del lenguaje de la Base de Conocimientos.

Sea Σ un conjunto de hechos la Hipótesis del Mundo Cerrado consiste en añadir a Σ el siguiente conjunto de hechos

$$\Sigma' = \{\neg\varphi : \ \varphi \text{ atómica cerrada y } \mathbf{T} + \Sigma \not\vdash \varphi\}$$

Sea $\Sigma^{\mathrm{CWA}} = \Sigma \cup \Sigma'$ el conjunto de hechos obtenido con el proceso anterior. La cuestión es que Σ^{CWA} puede ser **FR**–inconsistente con **KB** Por ejemplo, podemos tener que:

(–) $\mathbf{KB} + \Sigma \not\vdash_{\mathbf{FR}} \varphi_1, \dots, \mathbf{KB} + \Sigma \not\vdash_{\mathbf{FR}} \varphi_n$
(–) $\neg\varphi_1 \wedge \dots \wedge \neg\varphi_n \to \mathbf{F}$ es una restricción de **KB**.

Los m–ideales irreducibles caracterizan los conjuntos de hechos a los que se les puede aplicar la metodología de la Hipótesis del Mundo Cerrado sin obtener teorías inconsistentes. Veamos cual es la situación con respecto a las pruebas por disparo de reglas.

Teorema 4.8. Sea **KB** una Base de Conocimientos de Horn. Sea Γ el conjunto de las fórmulas atómicas cerradas y $\Sigma \subseteq \Gamma$ un conjunto de hechos. Si el m–ideal E^{Σ} es irreducible, entonces Σ^{CWA} es **FR**–consitente con **KB**.

Demostración: Supongamos que Σ^{CWA} es **FR**–inconsistente con **KB**. Por **3.7**, Σ^{CWA} es inconsistente con **KB**. Entonces existen $\neg\varphi_1, \dots, \neg\varphi_n \in \Sigma^{\mathrm{CWA}}$ tales que

$$\mathbf{KB} + \Sigma \vdash \varphi_1 \vee \dots \vee \varphi_n$$

Puesto que E^{Σ} es irreducible, de **4.7** se sigue que existe i tal que $\varphi_i \in \mathrm{E}^{\Sigma}$; es decir, $\mathbf{KB} + \Sigma \vdash \varphi_i$. La fórmula φ_i es atómica y **KB** es una Base de Conocimientos de Horn, luego de **??** se tiene que $\mathbf{KB} + \Sigma \vdash_{\mathbf{FR}} \varphi_i$. Lo cual está en contradicción con $\neg\varphi_i \in \Sigma^{\mathrm{CWA}}$.
Ξ

§5 Extensiones del razonamiento por disparo de reglas

Anteriormente se ha presentado el concepto de prueba por disparo de reglas. En dicha definición sólo se consideraban pruebas para literales a partir de un conjunto de hechos (literales). La cuestión que nos planteamos es la ampliación de pruebas por disparo de reglas, tanto en el sentido de probar fórmulas que no son literales, como en el de añadir fórmulas al conjunto de hechos que no son literales. Algunas ampliaciones del concepto de prueba por disparo de reglas son evidentes:

(–) $\mathbf{KB} + \Sigma \vdash_{\mathbf{FR}} \psi_1 \wedge \psi_1 \iff \mathbf{KB} + \Sigma \vdash_{\mathbf{FR}} \psi_1$ y $\mathbf{KB} + \Sigma \vdash_{\mathbf{FR}} \psi_2$.
(–) $\mathbf{KB} + \Sigma + \theta_1 \wedge \theta_2 \vdash_{\mathbf{FR}} \psi \iff \mathbf{KB} + \Sigma + \theta_1 + \theta_2 \vdash_{\mathbf{FR}} \psi$.
(–) Si θ es de la forma

$$\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \to \gamma$$

donde φ_i $(1 \leq i \leq n)$, γ son literales (es decir, θ tiene la estructura de una regla de la Base de Conocimientos).

$$\mathbf{KB} + \Sigma + \theta \vdash_{\mathbf{FR}} \psi \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{KB} + \theta + \Sigma \vdash_{\mathbf{FR}} \psi$$

Para la disyunción de fórmulas una ampliación natural de la definición de deducción vendría dada por:

(–) $\mathbf{KB} + \Sigma \vdash_{\mathbf{FR}} \psi_1 \vee \psi_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{KB} + \Sigma \vdash_{\mathbf{FR}} \psi_1$ ó $\mathbf{KB} + \Sigma \vdash_{\mathbf{FR}} \psi_2$.

En el modelo formal dado por los m–**FR** ideales la propiedad anterior dice, ver **??**, que para la deducción por disparo de reglas los m–**FR**–ideales son irreducibles.

Sin embargo, no es evidente cómo definir la relación de deducción por disparo de reglas cuando la hipótesis es una disyunción. Es decir, cómo definir $\mathbf{T} + \Sigma + \theta_1 \vee \theta_2 \vdash_{\mathbf{FR}} \psi$. En principio, la definición natural sería

$$\mathbf{KB} + \Sigma + \theta_1 \vee \theta_2 \vdash_{\mathbf{FR}} \psi \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{KB} + \Sigma + \theta_1 \vdash_{\mathbf{FR}} \psi \text{ ó } \mathbf{KB} + \Sigma + \theta_2 \vdash_{\mathbf{FR}} \psi$$

Sin embargo, esta definición presenta problemas con la que proponíamos más arriba cuando la fórmula que añadiamos como axioma tiene la estructura de una regla. En efecto, consideremos la fórmula

$$(\mathbf{p}(x) \to \mathbf{r}(x)) \vee (\mathbf{q}(x) \to \mathbf{r}(x))$$

Esta fórmula es equivalente a la fórmula

$$\mathbf{p}(x) \wedge \mathbf{q}(x) \to \mathbf{r}(x)$$

Esta fórmula dice que para obtener $\mathbf{r}(a)$ es necesario obtener $\mathbf{p}(a)$ y $\mathbf{q}(a)$. Sin embargo, con la definición propuesta para la disyunción, es suficiente obtener $\mathbf{p}(a)$ ó $\mathbf{q}(a)$.

Las ampliaciones de la definición para la negación y la implicación presentan el problema sobre que versiones de los teoremas de la reducción y de la deducción deseamos que se verifiquen en razonamiento por disparo de reglas.

Bibliografía.

[1] Fernández Margarit, A. **Introducción de métodos algebraicos en la Teoría de Modelos**. Tesis Doctoral, Universidad de Sevilla (1983).

[2] Fernández Margarit, A; Laita, L.M. **Abraham Robinson's meta–algebra revisited**. Zeitschrift für Math. Logik, 33, 1987, 497-505.

[3] Laita, L.M.; Ledesma, L.; Fernández Margarit, A.; Riscos, A. **Two Approaches to Verification of Bivalued KBS's**. AAAI-90 Workshop on Knowledge Based Systems, Verification and Testing (1990). (Boston, Massachusetts).

[4] Laita, L.M.; Couto, J.I.; Ledesma, L.; Fernández Margarit, A. **A Bivalued Model of Validation of KB Systems**. Proceedings of the Fourth International Symposium on Knowledge Engineering, 1990, 144-149. (Barcelona).

[5] Laita, L.M.; Couto, J.I.; Ledesma, L.; Fernández Margarit, A. **A formal Model for Knowledge Based Systems Verification**. Workshop Notes on VVT from the Ninth National Conference on Artificial Intelligence (1991). (Anaheim, California)

[6] Laita, L.M.; Couto, J.I.; Ledesma, L.; Fernández Margarit, A. **A Formal Study of Consistency of KBS's**. Proceedings of de European Workshop on the Verification and Validation of Knowledge Baded Systems. Logica, Cambridge, 1991, 31-38.

[7] Laita, L.M.; Couto, J.I.; Ledesma, L.; Fernández Margarit, A. **A Formal Model for Knowledge Based Systems Verification**. The International Journal on Intelligent Systems, 9, 9, 1994, 769-786.

[8] Laita, L.M.; Ledesma, L.; Pérez, A.; de Antonio, A.; Fernández Margarit, A. **Non monotonic logic, a formal model for the CWA, and an interpretation of non–monotonic KBS's**. Tercer curso de Conferencias sobre Fronteras de la Informática, 1994, 211-230. Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. (Madrid).

[9] Perkins, W.A.; Laffey, T.J.; Pecora, D.; Nguyen, T.A. **Knowledge Base Verification**. Topics in Expert System Desing, 353-376. North Holland, 1989.

[10] Preece, A.D.; Shinghal, R.; Batarekh, A. **Principles and practice in verifying rule–based systems**. The Knowledge Engineering Review, 7, 1992, 115-141.

[11] Robinson, A. **Théorie metamathématique des idéaux**. Gauthier Villars, 1955.

[12] Robinson, A. **Introduction to Model Theory**. North Holland, 1963.

[13] Shoenfield, J.R. **Mathematical Logic**. Addison Wesley, 1967.

[14] Zhang, D.; Nguyen, D. **A tool for Knowledge Base Verification**. Knowledge Engineering Shells: Systems and Tecniques. Advanced Series on Artificial Intelligence, 2, 1993, 455-486. World Scientific.