

LÓGICA MATEMÁTICA (Curso 2010/2011)

Créditos: 6.

Prerrequisitos: Ninguno

Programa:

Parte A: Introducción a la Teoría de Modelos

1. Lenguajes de Primer Orden.
2. Teorías de Primer Orden.
3. Los Teoremas de Completitud y Compacidad.

Parte B: Teoría de la Recursión.

4. Funciones Recursivas.
5. Conjuntos Recursivamente Enumerables.

Parte C: Los Teoremas de Incompletitud.

6. La Aritmética de Peano.
7. Los Teoremas de Incompletitud de Gödel.

Bibliografía.

1. Barwise, J. **Handbook of Mathematical Logic**. North Holland, 1977.
2. Boolos, G.S. **The unprovability of consistency**. Cambridge University Press, 1979.
3. Bridge, J. **Beginning Model Theory**. Clarendon Press, 1977.
4. Cutland, N.J. **Computability: Introduction to Recursive Function Theory**. Cambridge University Press, 1980.
5. Chang, C.C; Keisler, H.J. **Model theory**. North Holland, 1990.
6. Hodges, W. **Model Theory**. Cambridge University Press, 1993.
7. Odifreddi, P. **Classical Recursion Theory**. North Holland, 1989.
8. Shoenfield, J.R. **Mathematical Logic**. Addison Wesley, 1967.

Horario:

- (-) Periodo lectivo: Desde el 14 de Febrero hasta el 10 de Junio.
- (-) Aula 11.
- (-) Lunes y Jueves de 12:00 a 14:00.

Tutorías:

- (-) Módulo L2, primera planta (edificio de la Escuela Técnica Superior de Ingeniería Informática)
- (-) Martes, Miércoles y Viernes 11:00–13:00.

Métodos de calificación: Se entrega una relación de ejercicios (dividida en varias partes (A, B, C, D)) y una relación de problemas (dividida en dos partes (I, II)). Para aprobar la asignatura se deberá superar al menos una de las siguientes pruebas:

- (a) Ejercicios: Se entrega una relación de ejercicios (dividida en varias partes (A, B, C)). Cada alumno recibirá una calificación en cada una de las partes de la relación de ejercicios y una global a todas ellas. Para superar esta prueba se necesita una calificación global de al menos 5 puntos.

La calificación de cada una de las relaciones de ejercicios dependerá: del número y el grado de dificultad de los ejercicios resueltos, y de la corrección, claridad y estructuración de las soluciones presentadas.

Nota: Para que estos trabajos se admitan como parte de la calificación global es imprescindible que observen las siguientes reglas:

(–) No se puede intercambiar información sobre los ejercicios que se proponen; es decir, el trabajo debe ser individual.

(–) Para la resolución de los ejercicios sólo se podrá usar las notas que se entrega.

El incumplimiento de estas reglas conllevará la anulación del trabajo presentado.

- (b) Examen final: Consistirá en una prueba escrita compuesta de teoría y ejercicios. Para la resolución de los ejercicios se podrá usar las notas que se entrega (sin ningún añadido adicional). La calificación se medirá entre 0 y 10 puntos. Para superar esta prueba es necesario obtener al menos 5 puntos.

Otras actividades: Cada uno de los capítulos de las notas contiene una sección dedicada a ejercicios. La resolución de estos ejercicios puede abordarse de forma individual o en grupo. Cada alumno (o grupo) puede entregar el trabajo realizado. Estos trabajos servirán para complementar la calificación obtenida en las pruebas anteriores.

Fechas de entrega de las relaciones de ejercicios y examen final.

Relación	Fecha de entrega
A	21 de Marzo
B	25 de Abril
C	10 de Junio
Examen	27 de Junio

Profesor: Alejandro Fernández Margarit.

Contenido de la asignatura

El curso está dedicado a desarrollar la metodología básica de la Lógica Matemática y probar algunos de sus resultados fundamentales. En las distintas disciplinas de las Matemáticas se describen objetos (cuerpos, funciones integrables, ...) y se estudia si satisfacen determinadas propiedades. Para ello se presentan pruebas de que dichas propiedades son válidas. Ahora bien: ¿qué es una prueba?, ¿qué propiedades podemos formular sobre los objetos de estudio? Una prueba procede considerando propiedades más simples cuya validez admitimos o se ha obtenido con anterioridad y paso a paso establecemos la validez de la propiedad considerada. La dicotomía validez/prueba está ligada al uso de procesos finitos en la actividad Matemática para establecer:

- (-) propiedades de objetos infinitos (una función integrable es un objeto infinito), o
- (-) propiedades de tipo universal: todos los elementos satisfacen la propiedad. Para determinar que todos los elementos de un cuerpo infinito satisfacen una propiedad es necesario comprobar que cada uno de sus elementos (y hay un número infinito) la satisface.

Los conceptos de prueba y validez son elementos básicos en Lógica Matemática. Una definición explícita de lo que es una prueba es imprescindible para establecer cierto tipo de resultados. Por una parte, es posible que la propiedad que estamos analizando no sea demostrable. Por otra parte, una prueba es un algoritmo (pues es un objeto finito); por tanto, podemos estudiar qué tipo de cálculos se pueden describir mediante algoritmos.

En el curso estudiamos los lenguajes de Primer Orden y el concepto de fórmula. Con ello se especifica qué propiedades son admisibles. Así es posible dar una definición matemática de los conceptos de prueba y validez; es decir, si una fórmula es demostrable o si es válida. De este modo separamos de forma precisa las metodologías finitarias (pruebas) de las no finitarias (validez). En los resultados centrales del curso se estudian las relaciones entre estas dos metodologías y sus limitaciones.

Teorema 1. (Teorema de Completitud) Sea $\mathbf{T}$ una teoría de primer orden.

(a) Sea φ una fórmula del lenguaje de $\mathbf{T}$. Son equivalentes:

(a.1) φ es un teorema de $\mathbf{T}$

(a.2) φ es válida en todos los modelos de $\mathbf{T}$.

(b) Son equivalentes:

(b.1) $\mathbf{T}$ es consistente.

(b.2) $\mathbf{T}$ tiene un modelo.

Teorema 2. (Teorema de Compacidad) Sea $\mathbf{T}$ una teoría de primer orden. Son equivalentes:

(a) $\mathbf{T}$ tiene un modelo.

(b) Toda parte finita de $\mathbf{T}$ tiene un modelo.

Teorema 3. (Teorema de Indecibilidad) La Aritmética de Peano es indecidible.

Teorema 4. (Primer Teorema de Incompletitud) La Aritmética de Peano no es completa.

Teorema 5. (Segundo Teorema de Incompletitud) La Aritmética de Peano no prueba su consistencia.