

Computación Bio–inspirada

Tema 10: Una nueva metodología para atacar el problema P versus NP

David Orellana Martín
Mario de J. Pérez Jiménez

Grupo de Investigación en Computación Natural
Dpto. Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial
Universidad de Sevilla

dorellana@us.es (<http://www.cs.us.es/~dorellana/>)

marper@us.es (<http://www.cs.us.es/~marper/>)

Máster Universitario en Lógica, Computación e Inteligencia Artificial
Curso 2023–2024



Índice

- * El problema **P** versus **NP**.
- * Tratabilidad e intratabilidad de problemas abstractos.
- * Eficiencia y presumible eficiencia de modelos de computación.
- * Nueva metodología para atacar el problema **P** versus **NP**.
- * Fronteras de la tratabilidad en Computación Celular con Membranas.

El problema **P** versus **NP** (I)

$$P = NP?$$

- ★ **Encontrar** soluciones versus **comprobar la corrección** de las soluciones.
- ★ **Demostración** versus **verificación de su corrección**.
- Informalmente, en esto consiste, básicamente, el **problema central** de la Teoría de la Complejidad Computacional.

El problema **P** versus **NP** (II)

Es creencia generalizada que es más difícil:

- * **resolver** un problema que **comprobar** si una posible solución del mismo es una solución correcta.

Es decir, la comunidad científica está convencida de que $P \neq NP$.



Atacando la resolución del problema P versus NP

Aproximación clásica (1970):

- $P \neq NP$.
 - * Encontrar un problema **NP**-completo que no pertenece a la clase **P**.
- $P = NP$.
 - * Encontrar un problema **NP**-completo que pertenece a la clase **P**.

En este tema, se proporciona una nueva metodología para atacar el problema **P** versus **NP** y, en particular, se aplica al paradigma de Membrane Computing.

Problemas tratables e intratables

Problema **tratable** respecto de una medida de complejidad:

- ★ Existe una MTD que resuelve el problema y usa una cantidad de recursos (respecto de esa medida) que es polinomial en el tamaño de la entrada.

Problema **intratable** respecto de una medida de complejidad:

- ★ Toda MTD que resuelve el problema requiere una cantidad de recursos (respecto de esa medida) que es, al menos, exponencial en el tamaño de la entrada.

Problemas tratables e intratables

- En cualquier modelo de computación y respecto de cualquier medida de complejidad, **existen problemas intratables**.
- **P** es la **clase** de complejidad **de los problemas tratables** respecto de la **medida** de complejidad **tiempo**.
- Si **P = NP** entonces los problemas NP-completos son **tratables**, respecto de la **medida** de complejidad **tiempo**.
- Si **P \neq NP** entonces los problemas NP-completos son **intratables**, respecto de la **medida** de complejidad **tiempo**.
- Es creencia generalizada que **P \neq NP**. Por ello, a los problemas **NP-completos** se les denomina presuntamente intratables (respecto de la **medida** de complejidad **tiempo**).

Eficiencia de un modelo de computación

A partir de ahora, vamos a centrarnos en la **medida** de complejidad **tiempo**.

Modelo de computación eficiente: capacidad para resolver problemas intratables en tiempo polinomial.

De acuerdo con esta definición y respecto de la **medida** de complejidad **tiempo**:

- ★ El modelo de las **MTDs** **no** es **eficiente**.
- ★ Si $P \neq NP$ entonces el modelo de las **MTNDs** es **eficiente** (ya que, en este caso, los problemas **NP**-completos son intratables).

Modelo de computación presumiblemente eficiente: capacidad para resolver problemas NP-completos en tiempo polinomial.

De acuerdo con esta definición y respecto de la **medida** de complejidad **tiempo**:

- ★ El modelo de las **MTNDs** es presumiblemente eficiente.
- ★ Si $P \neq NP$ entonces los modelos presumiblemente eficientes son modelos eficientes.

Extensión de un modelo de computación

Sean M_1 y M_2 dos modelos de computación.

- ★ M_2 es una **extensión** de M_1 (o bien, M_1 es un **submodelo** de M_2) si todo procedimiento mecánico de M_1 **es**, así mismo, un procedimiento mecánico de M_2 .

Si un modelo de computación M_2 es una extensión de un modelo de computación M_1 , entonces:

- Toda solución S de un problema abstracto X en M_1 **es**, así mismo, una solución de X en M_2 .
- Los procedimientos mecánicos de M_2 se obtienen a partir de los de M_1 **añadiendo** una serie de ingredientes sintácticos y/o semánticos.

Fronteras entre **no eficiencia** y **presumible eficiencia**

Sean M_1 y M_2 dos modelos de computación tales que:

- ★ M_1 es un modelo modelo **no eficiente**.
- ★ M_2 es un modelo **presumiblemente eficiente**.
- ★ M_2 es una **extensión** de M_1 .

Entonces, una **frontera** entre la **no eficiencia** y la **presumible eficiencia** se obtiene al “pasar” del modelo M_1 al modelo M_2 . Es decir:

- ★ Los ingredientes añadidos a M_1 para obtener M_2 proporcionan una **frontera** entre la **no eficiencia** y la **presumible eficiencia**.

**Non
efficiency**

M₁

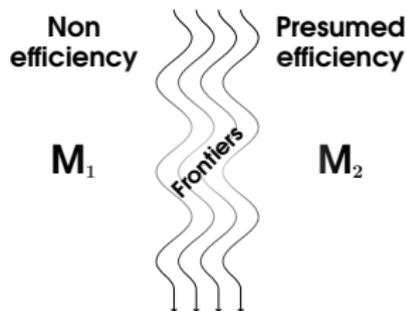


**Presumed
efficiency**

M₂

!!! Cada una de esas fronteras proporciona una nueva forma de atacar el problema P versus NP !!!

Atacando el problema P versus NP



P = NP

- ★ Hallar una solución eficiente S de un problema **NP**-completo, X , en M_2 tal que:
 - A partir de S , se pueda diseñar una solución eficiente de X en M_1 (los ingredientes añadidos a M_1 para obtener M_2 **no juegan un papel relevante en esa solución S**).

P \neq NP

- ★ Hallar una solución eficiente S de un problema **NP**-completo, X , en M_2 tal que:
 - A partir de S , no se pueda diseñar una solución eficiente de X en M_1 (los ingredientes añadidos a M_1 para obtener M_2 **juegan un papel relevante en esa solución S**).

Uso de la metodología en el paradigma de la computación celular

Sea \mathcal{R} un modelo de computación en el paradigma de la computación celular; es decir, sea \mathcal{R} un conjunto de sistemas de membranas reconocedores (con ciertas características comunes).

- ★ \mathcal{R} es no eficiente **sii** $\text{PMC}_{\mathcal{R}} = \text{P}$.
- ★ \mathcal{R} es presumiblemente eficiente **sii** $\text{NP} \cup \text{co-NP} \subseteq \text{PMC}_{\mathcal{R}}$.

Fronteras de la eficiencia en sistemas P que trabajan a modo de células

Recuérdese que:

- ★ \mathcal{NAM} denota el modelo de computación de los sistemas P reconocedores con membranas activas y sin reglas de división.
- ★ \mathcal{AM} denota el modelo de computación de los sistemas P reconocedores con membranas activas y con reglas de división.

Entonces se verifica lo siguiente:

- * El modelo de computación \mathcal{NAM} es **no eficiente**.
 - ★ $\text{PMC}_{\mathcal{NAM}} = \text{P}$ (resultado establecido en ¹)
- * El modelo de computación \mathcal{AM} es **presumiblemente eficiente**.
 - ★ $\text{SAT} \in \text{PMC}_{\mathcal{AM}}$ (resultado establecido en ²) y, por tanto, $\text{NP} \cup \text{co-NP} \subseteq \text{PMC}_{\mathcal{AM}}$.

¹A. E. Porreca. Computational complexity classes for membrane systems. *Master Degree Thesis*, Università di Milano-Bicocca, Italy, 2008.

²M.J. Pérez-Jiménez, A. Romero, F. Sancho. Complexity classes in models of cellular computing with membranes. *Natural Computing*, 2, 3 (2003), 265-285.

Fronteras de la eficiencia en sistemas P que trabajan a modo de células

Es decir:

- * El modelo de computación $\mathcal{N}AM$ es **no eficiente**.
- * El modelo de computación AM es **presumiblemente eficiente**.
- * El modelo AM es una extensión del modelo $\mathcal{N}AM$.

Fronteras de la eficiencia en sistemas P que trabajan a modo de células

Así pues, “pasar” del modelo de computación $\mathcal{N}AM$ al modelo AM equivale a “pasar” de la **no eficiencia** a la **presumible eficiencia**. Por tanto:

- ★ El ingrediente añadido al modelo $\mathcal{N}AM$ para obtener el modelo AM (la regla de división) proporciona una **frontera** entre la **no eficiencia** y la **presumible eficiencia**.

En consecuencia, en el marco de los sistemas P reconocedores con membranas activas y bajo el supuesto de que $P \neq NP$:

- ★ La **regla de división** proporciona una **frontera de la eficiencia** (o de la **tratabilidad** de problemas).
 - Específicamente, permitir o no las reglas de división en el modelo de computación de los sistemas P reconocedores con membranas activas, equivale a “pasar” de la eficiencia a la no eficiencia.

Fronteras de la eficiencia en sistemas P que trabajan a modo de células

Recuérdese que $\text{SAT} \in \text{PMC}_{\mathcal{AM}(-d)}$.

Algunos resultados importantes:

- * $\text{PMC}_{\mathcal{AM}^0(-d,+ne)} = \mathbf{P}^3$ (técnica del **grafo de dependencia**).
- * $\text{Subset-Sum} \in \text{PMC}_{\mathcal{AM}^0(+d,+ne)}^3$.
- * ¿Se pueden resolver problemas **NP**-completos mediante familias de $\mathcal{AM}^0(+d,-ne)$, en tiempo polinomial?
- * Conjetura de Păun (2005): $\text{PMC}_{\mathcal{AM}^0(+d,-ne)} = \mathbf{P}$.

³M.A. Gutiérrez, M.J. Pérez-Jiménez, A. Riscos, F.J. Romero. On the power of dissolution in P systems with active membranes. **Lecture Notes in Computer Science**, 3850 (2006), 224-240.

Fronteras de la eficiencia en sistemas P que trabajan a modo de células

Es decir, por una parte:

- * El modelo de computación $AM^0(-d)$ es **no eficiente**.
- * El modelo de computación $AM(-d)$ es **presumiblemente eficiente**.
- * El modelo $AM(-d)$ es una extensión del modelo $AM^0(-d)$.

Por otra:

- * El modelo de computación $AM^0(-d, +ne)$ es **no eficiente**.
- * El modelo de computación $AM^0(+d, +ne)$ es **presumiblemente eficiente**.
- * El modelo $AM^0(+d, +ne)$ es una extensión del modelo $AM^0(-d, +ne)$.

Fronteras de la eficiencia en sistemas P que trabajan a modo de células

Nuevas fronteras entre la no eficiencia y la presumible eficiencia:

- * Pasar de $AM^0(-d)$ a $AM(-d)$: **la polarización**.
- * Pasar de $AM^0(-d, +ne)$ a $AM^0(+d, +ne)$: **la regla de disolución**.

Fronteras de la eficiencia en sistemas P que trabajan a modo de tejidos

Para cada $k \geq 1$,

- ★ $TC(k)$: modelo de computación de los sistemas P reconocedores de tejidos con reglas de comunicación que tienen **longitud, a lo sumo, k** .
- ★ $TDC(k)$: modelo de computación de los sistemas P reconocedores de tejidos con reglas de división celular y cuyas reglas de comunicación tienen **longitud, a lo sumo, k** .

Se verifica lo siguiente:

- * Los modelos de computación $TC(k)$ y $TDC(1)$ son **no eficientes**,
 - ★ $P = PMC_{TC(k)} = PMC_{TDC(1)}$ (resultado establecido en ⁴)
- * El modelo de computación $TDC(2)$ es **presumiblemente eficiente**.
 - ★ $HAM - CYCLE \in PMC_{TDC(2)}$ (resultado establecido en ⁵)

⁴R. Gutiérrez-Escudero, M.J. Pérez-Jiménez, M. Rius-Font. Characterizing tractability by tissue-like P systems. *Lecture Notes in Computer Science*, 5957 (2010), 289-300.

⁵A.E. Porreca, N. Murphy, M.J. Pérez-Jiménez. An optimal frontier of the efficiency of tissue P systems with cell division. In M. García-Quismondo, L.F. Macías-Ramos, Gh. Paun, I. Pérez Hurtado, L. Valencia-Cabrera (eds.) *Proceedings of the Tenth Brainstorming Week on Membrane Computing*, Volume II, Seville, Spain, January 30-February 3, 2012, Report RGNC 01/2012, Fénix Editora, 2012, pp. 141-166.

Fronteras de la eficiencia en sistemas P que trabajan a modo de tejidos

Es decir, por una parte:

- * El modelo de computación $TC(2)$ es **no eficiente**.
- * El modelo de computación $TDC(2)$ es **presumiblemente eficiente**.
- * El modelo $TDC(2)$ es una extensión del modelo $TC(2)$.

Por otra:

- * El modelo de computación $TDC(1)$ es **no eficiente**.
- * El modelo de computación $TDC(2)$ es **presumiblemente eficiente**.
- * El modelo $TDC(2)$ es una extensión del modelo $TDC(1)$.

Fronteras de la eficiencia en sistemas P que trabajan a modo de tejidos

“Pasar” del modelo de computación $TC(2)$ al modelo $TDC(2)$ equivale a “pasar” de la **no eficiencia** a la **presumible eficiencia**. Por tanto:

- ★ El ingrediente añadido al modelo $TC(2)$ para obtener $TDC(2)$ (permitir reglas de división) proporciona una **frontera** entre la **no eficiencia** y la **presumible eficiencia**.

En consecuencia, en el marco de los sistemas P de tejidos con reglas de comunicación de longitud, a lo sumo, 2, y bajo el supuesto de que $P \neq NP$:

- ★ La **regla de división** proporcionan una **frontera de la tratabilidad** de problemas.
 - Específicamente, permitir o no reglas de división en el modelo de computación $TC(2)$ equivale a “pasar” de la eficiencia a la no eficiencia.

Fronteras de la eficiencia en sistemas P que trabajan a modo de tejidos

“Pasar” del modelo de computación $TDC(1)$ al modelo $TDC(2)$ equivale a “pasar” de la **no eficiencia** a la **presumible eficiencia**. Por tanto:

- ★ El ingrediente añadido al modelo $TDC(1)$ para obtener $TDC(2)$ (permitir reglas de comunicación de longitud 2) proporciona una **frontera** entre la **no eficiencia** y la **presumible eficiencia**.

En consecuencia, en el marco de los sistemas P de tejidos con reglas de división celular y reglas de comunicación, y bajo el supuesto de que $P \neq NP$:

- ★ La **longitud de las reglas de comunicación** proporciona una **frontera de la eficiencia** (o de la **tratabilidad** de problemas).
 - Específicamente, permitir o no reglas de comunicación de longitud 2 en el modelo de computación $TDC(1)$ equivale a “pasar” de la eficiencia a la no eficiencia.

Fronteras de la eficiencia en sistemas de membranas reconocedores

Modelo no eficiente	Modelo presumiblemente eficiente	Frontera
NAM	AM	Regla de división
$AM^0(-d)$	$AM(-d)$	Polarización
$AM^0(-d, +ne)$	$AM^0(+d, +ne)$	Regla de disolución
$TC(2)$	$TDC(2)$	Regla de división
$TDC(1)$	$TDC(2)$	Longitud de la regla