

# Computación Bio-inspirada

## PRELIMINARES

David Orellana Martín  
Mario de J. Pérez Jiménez

Dpto. Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial  
E.T.S. Ingeniería Informática  
Universidad de Sevilla

dorellana@us.es (<http://www.cs.us.es/~dorellana/>)  
marper@us.es (<http://www.cs.us.es/~marper/>)

**Máster Universitario en Lógica, Computación e Inteligencia Artificial**



# Teoría de Zermelo-Fraenkel

Teoría intuitiva de conjuntos: G. Cantor (desarrollada entre 1873 y 1896).

Aparición de paradojas en la teoría de Cantor:

- \* C. Burali-Forti (1897): afectaba al conjunto de los ordinales.
- \* B. Russell (1901): afectaba a la relación de pertenencia.

Para resolver este escollo, algunos matemáticos optaron por la axiomatización.

- \* E. Zermelo (1908): Primer sistema de axiomas de la teoría de conjuntos.
- \* A. Fraenkel (1922): Complementa y “precisa” el sistema axiomático de Zermelo (en esa tarea, Th. Skolem realizó importantes contribuciones).

# Teoría de Zermelo-Fraenkel

Los objetos matemáticos de esta teoría son **conjuntos**.

Conceptos primitivos o indefinibles en la teoría:

- \* Concepto de **conjunto**.
- \* Concepto de **pertenencia** ( $a \in b$ : el conjunto  $a$  es un elemento del conjunto  $b$ ).

Sean  $a$  y  $b$  conjuntos. Notaremos  $a \notin b$  para indicar que  $a$  **no es un elemento** de  $b$

Fórmula  $\theta(x)$  sobre un conjunto  $a$ :

- Si  $b \in a$ , entonces  $\theta(b)$  es una proposición (verdadera o falsa).
- $\{x \mid \theta(x)\}$ : conjunto cuyos elementos son los conjuntos  $x$  tales que la proposición  $\theta(x)$  es verdadera.

Abreviaremos la expresión “**si y sólo si**” escribiendo “**sii**”.

# Teoría de Zermelo-Fraenkel

**Algunos axiomas** de la teoría de Z-F que destacamos:

**Axioma de extensionalidad:** dos conjuntos  $a$  y  $b$  son iguales ( $a = b$ ) **sii** poseen los mismos elementos:  $\forall x (x \in a \longleftrightarrow x \in b)$ .

Si los conjuntos  $a$  y  $b$  **no son iguales** entonces se notará  $a \neq b$ .

**Axioma del conjunto vacío:** existe un conjunto que carece de elementos (se denotará por  $\emptyset$  y se denomina **conjunto vacío**),

**Axioma del par no ordenado:** para cada par de conjuntos  $a$  y  $b$  existe un conjunto  $c$  cuyos únicos elementos son  $a$  y  $b$ . Se notará  $c = \{a, b\}$

- ★ El **par ordenado**, de primera componente el conjunto  $a$  y segunda componente el conjunto  $b$ , notaremos  $(a, b)$ , es el conjunto  $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ .
- ★ Dados los conjuntos  $a, b, c$  y  $d$  se tiene que  $(a, b) = (c, d)$  **sii**  $a = c$  y  $b = d$ .

# Teoría de Zermelo-Fraenkel

**Axioma de la unión:** dado un conjunto  $a$ , existe un conjunto (que se notará  $\bigcup a$ ) cuyos elementos son, exactamente, los elementos de los conjuntos que son elementos de  $a$ . Es decir,  $\bigcup a = \{x \mid \exists y (y \in a \wedge x \in y)\}$ .  
En el caso particular  $a = \{b, c\}$ , el conjunto  $\bigcup a$  se notará  $b \cup c$ . Por tanto, se verificará que  $b \cup c = \{x \mid x \in b \vee x \in c\}$ .

**Axioma del conjunto de partes:** para cada conjunto  $a$  existe un conjunto  $\mathcal{P}(a)$  cuyos elementos son todos los subconjuntos de  $a$ .

- ★ Se dice que un conjunto  $b$  es un **subconjunto** de  $a$  (y se notará  $b \subseteq a$ ) si se verifica que  $\forall x (x \in b \rightarrow x \in a)$ .
- ★ Se dice que un conjunto  $b$  es un **subconjunto estricto** (o propio) de  $a$  (y se notará  $b \subsetneq a$ ) si se verifica que  $b \subseteq a$  y  $b \neq a$ .

**Axioma del infinito:** existe un conjunto  $\mathbb{N}$  (denominado **conjunto de los números naturales**) tal que: (a)  $\emptyset \in \mathbb{N}$ ; y (b)  $\forall x (x \in \mathbb{N} \rightarrow x \cup \{x\} \in \mathbb{N})$ .

# El conjunto de los números naturales

Existencia del **conjunto de los números naturales** (axioma del infinito).

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

El conjunto  $\mathbb{N}$  se puede describir, de **manera recursiva**, como sigue:

- ★ 0 es el conjunto vacío.
- ★ Para cada número natural  $n$  se tiene que  $n + 1 = n \cup \{n\}$ .

Es decir:

- ★  $0 \stackrel{def}{=} \emptyset$ .
- ★  $1 \stackrel{def}{=} 0 \cup \{0\} = \{0\}$ .
- ★  $2 \stackrel{def}{=} 1 \cup \{1\} = \{0, 1\}$ .
- ★  $3 \stackrel{def}{=} 2 \cup \{2\} = \{0, 1, 2\}$ .
- ★ .....

# Qué son los números naturales

Los números naturales son los siguientes

- ★ 0 es el conjunto vacío.
- ★ Para cada número natural  $n \neq 0$  se tiene que:
  - \*  $n$  es un conjunto.
  - \*  $n$  es un conjunto que consta, exactamente, de  $n$  elementos.
  - \*  $n$  es el conjunto cuyos elementos son, exactamente:  $0, 1, \dots, n - 1$ ; es decir:  $n = \{0, 1, \dots, n - 1\}$ .

# Tuplas ordenadas

Par ordenado  $(a, b)$ : también se denomina 2-tupla ordenada.

A partir de aquí, se define, **manera recursiva**, las  $n$ -tuplas ordenadas, para cada  $n \geq 3$ , como sigue:

- ★  $(x_1, x_2, x_3) \stackrel{def}{=} (x_1, (x_2, x_3))$ .
- ★  $(x_1, x_2, x_3, x_4) \stackrel{def}{=} (x_1, (x_2, x_3, x_4))$ .
- ★  $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \stackrel{def}{=} (x_1, (x_2, x_3, x_4, x_5))$ .
- ★ .....

En general:  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \stackrel{def}{=} (x_1, (x_2, \dots, x_n))$ , para cada  $n \geq 3$ .

Así se tiene el concepto de  $n$ -tupla ordenada  $(x_1, \dots, x_n)$ , para cada  $n \geq 2$ .

# Operaciones con conjuntos

Sean  $a$  y  $b$  dos conjuntos arbitrarios:

★ **Unión:**  $a \cup b = \{x \mid x \in a \vee x \in b\}$

★ **Intersección:**  $a \cap b = \{x \mid x \in a \wedge x \in b\}$

\* Dos conjuntos  $a$  y  $b$  se dicen que son **disjuntos** sii  $a \cap b = \emptyset$ .

★ **Diferencia:**  $a \setminus b = \{x \mid x \in a \wedge x \notin b\}$

★ **Complementario:** Si  $b \subseteq a$ , el complementario de  $b$  en  $a$  es  $a \setminus b$ .

★ **Conjunto de las partes** de  $a$ :  $\mathcal{P}(a) = \{x \mid x \subseteq a\}$ .

★ **Producto cartesiano** de  $a$  y  $b$  (¡en ese orden!):

$$a \times b = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in a \wedge x_2 \in b\}$$

Para cada número natural  $n \geq 2$ , si  $a_1, \dots, a_n$  son conjuntos entonces se define

$$a_1 \times \dots \times a_n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 \in a_1 \wedge \dots \wedge x_n \in a_n\}.$$

Se define  $a^1 = a$  y  $a^n = a \times \overset{(n)}{\dots} \times a$ , para cada número natural  $n \geq 2$ .

# Funciones

★ Una **relación** es un conjunto de **pares ordenados**.

★ Una **función**  $f$  es una relación tal que

$$\forall x \forall y \forall z ((x, y) \in f \wedge (x, z) \in f \implies y = z)$$

★ Una **función**  $f$  es **inyectiva** si satisface la siguiente condición:

$$\forall x \forall y \forall z ((x, y) \in f \wedge (z, y) \in f \implies x = z)$$

★ El **dominio** de una función  $f$  es el conjunto:

$$\text{dom}(f) = \{x \mid \exists y ((x, y) \in f)\}$$

★ El **rango** de  $f$  es el conjunto:

$$\text{rang}(f) = \{y \mid \exists x ((x, y) \in f)\}$$

★ Si  $f$  es una función y  $a \in \text{dom}(f)$ , entonces existe un único  $b \in \text{rang}(f)$  tal que  $(a, b) \in f$ . Notaremos  $f(a) = b$  para expresar que  $(a, b) \in f$ .

★ Si  $x \in \text{dom}(f)$ , notaremos  $f(x) \downarrow$  ( $f$  está definida en  $x$ ).

★ Si  $x \notin \text{dom}(f)$ , notaremos  $f(x) \uparrow$  ( $f$  no está definida en  $x$ ).

★  $[f = g] \iff [\text{dom}(f) = \text{dom}(g) \wedge \forall x \in \text{dom}(f) (f(x) = g(x))]$ .

# Tipos de funciones

Sean  $A$  y  $B$  dos conjuntos.

- ★ Una **función total**  $f$  de  $A$  en  $B$  (notaremos  $f : A \rightarrow B$ ) es una función que verifica:  $\text{dom}(f) = A$  y  $\text{rang}(f) \subseteq B$ .
  - Una **aplicación**  $f$  de  $A$  en  $B$  es una función total  $f$  de  $A$  en  $B$ .
- ★ Una **función parcial**  $f$  de  $A$  en  $B$  (notaremos  $f : A \dashrightarrow B$ ) es una función que verifica:  $\text{dom}(f) \subseteq A$  y  $\text{rang}(f) \subseteq B$ .
  - Toda función total de  $A$  en  $B$  es una función parcial de  $A$  en  $B$ .
  - Existen funciones parciales de  $A$  en  $B$  que no son funciones totales de  $A$  en  $B$  (por ejemplo: la función  $f$  de  $\mathbb{N}$  en  $\mathbb{N}$  definida por  $f(x) = \text{raíz cuadrada de } x$ . Se tiene que  $f(10) \uparrow$ ).
- ★ Una función parcial  $f$  de  $A$  en  $B$  es:
  - **sobreyectiva** (o suprayectiva) si  $\text{rang}(f) = B$ .
  - **biyectiva** si es total, inyectiva y sobreyectiva.

Si  $A$  un conjunto, la **función identidad** sobre  $A$  es la función  $Id_A : A \rightarrow A$ , definida por  $Id_A(x) = x$ .



# Composición de funciones

Sean  $f : A \rightarrow B$  y  $g : B \rightarrow C$ . La **composición** de  $f$  y  $g$  (¡en ese orden!) es la función parcial  $h$  de  $A$  en  $C$  definida así:

$$h = \{(x, y) \in A \times C : \exists z \in B (f(x) = z \wedge g(z) = y)\}$$

Gráficamente,

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \\ x & \mapsto & f(x) & \mapsto & g(f(x)) \quad (= h(x)) \end{array}$$

Notación:  $h = g \circ f$ .

# Función inversa

Si  $f$  es una **función** entonces se define el **conjunto**  $f^{-1} = \{(x, y) \mid (y, x) \in f\}$ .

- ★ El conjunto  $f^{-1}$  **no tiene por qué** ser una función.
- ★  $f^{-1}$  es una función **sii**  $f$  es inyectiva (**función inversa** de  $f$ ). Además, en este caso se tiene que  $(f^{-1})^{-1} = f$ .

**Proposición:** Sea  $f$  una función total de  $A$  en  $B$ .

- $f^{-1}$  es una aplicación de  $B$  en  $A$  **sii**  $f$  es biyectiva.
- Si  $f$  es biyectiva, entonces  $f \circ f^{-1} = Id_B$  y  $f^{-1} \circ f = Id_A$ .

## Imagen directa e imagen inversa por una función

Sea  $f$  una función parcial de un conjunto  $A$  en un conjunto  $B$ .

- ★ Si  $C \subseteq A$  entonces la **imagen directa** de  $C$  por  $f$  es el conjunto  $f[C] = \{y \in B \mid \text{Existe } x \in \text{dom}(f) \cap C \text{ tal que } f(x) = y\}$
- ★ Si  $D \subseteq B$  entonces la **imagen inversa** de  $D$  por  $f$  es el conjunto  $f^{-1}[D] = \{x \in A \mid x \in \text{dom}(f) \text{ y } f(x) \in D\}$

# Familia de conjuntos

Sea  $I$  un conjunto no vacío.

- ★ Una **familia de conjuntos, con conjunto de índices  $I$** , es una función  $F$  cuyo dominio es  $I$  (los elementos de  $I$  se denominan **índices** de la familia).
  - \* La familia  $F$  se representará así:  $\{F(i) \mid i \in I\}$ .
  - \* Si  $I = \{1, \dots, n\}$ , con  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , entonces la familia  $F$  se representará así:  $\{F(1), \dots, F(n)\}$ .
- ★ Sea  $F$  una familia de conjuntos, con conjunto de índices  $I$ .
  - \* La **unión** de los conjuntos de la familia  $F$ , que se notará  $\bigcup_{i \in I} F(i)$ , es el conjunto  $\{x \mid \exists i (i \in I \wedge x \in F(i))\}$ .
  - \* La **intersección** de los conjuntos de la familia  $F$ , que se notará  $\bigcap_{i \in I} F(i)$ , es el conjunto  $\{x \mid \forall i (i \in I \rightarrow x \in F(i))\}$ .

# Familia de conjuntos

Sea  $F$  una familia de conjuntos, con conjunto de índices  $I \neq \emptyset$ .

- ★ Se dice que  $F$  es una **familia de conjuntos disjuntos dos a dos** si satisface la siguiente propiedad:
  - \* Para cada  $i, j \in I$  tales que  $i \neq j$ , se tiene que los conjuntos  $F(i)$  y  $F(j)$  de la familia, son disjuntos.
- ★ Se dice que  $F$  es un **recubrimiento de un conjunto  $A$**  si satisface la siguiente propiedad:  $A \subseteq \bigcup_{i \in I} F(i)$ .
- ★ Se dice que  $F$  es una **partición de un conjunto  $A$**  si satisface:
  - \*  $F$  es una familia de subconjuntos de  $A$ .
  - \*  $F$  es un recubrimiento de  $A$ .
  - \*  $F$  es una familia de conjuntos disjuntos dos a dos.

# Sucesiones de elementos de un conjunto

**Sucesión finita** de elementos de un conjunto  $A$ : es una aplicación de un número natural  $n \in \mathbb{N}$  en el conjunto  $A$ .

- ★ El número natural  $n$  se denomina **longitud** de la sucesión.
- ★ La sucesión finita de longitud 0 será la función vacía.
- ★ Una sucesión finita,  $f$ , de longitud  $n + 1$  se representará así:  
 $f(0) f(1) \dots f(n)$ .

Toda sucesión finita de elementos de un conjunto  $A$ , de longitud  $n \in \mathbb{N}$ , es una familia de conjuntos (que son elementos de  $A$ ), cuyo conjunto de índice es  $n$ .

**Sucesión infinita** de elementos de un conjunto  $A$ : es una aplicación del conjunto  $\mathbb{N}$  de los números naturales en el conjunto  $A$ .

- ★ Una sucesión infinita,  $f$ , se representará así:  $f(0) f(1) \dots$

Toda sucesión infinita de elementos de un conjunto  $A$  es una familia de conjuntos (que son elementos de  $A$ ), cuyo conjunto de índice es  $\mathbb{N}$ .

# Conjuntos infinitos

Un conjunto  $A$  es **infinito sii** existe un subconjunto estricto  $B$  de  $A$  tal que es **equipotente** a  $A$  (es decir, existe una aplicación biyectiva de  $B$  en  $A$ ).

- ★ El conjunto  $\mathbb{N}$  es infinito: existe una biyección entre dicho conjunto y el subconjunto de los números pares.

Un conjunto  $A$  es **numerable sii** existe una aplicación biyectiva de  $\mathbb{N}$  en  $A$ .

## Ejemplos:

- ★ El conjunto  $\mathbb{N}^2$  es numerable: se prueba que la función  $J : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$  definida por  $J(x, y) = \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} + x$  es **biyectiva**.
- ★ Para cada  $k \geq 2$ , el conjunto  $\mathbb{N}^k$  es numerable.
- ★ El conjunto  $\mathbb{Q}$  de los números racionales es numerable.
- ★ El conjunto  $\mathbb{R}$  de los números reales **no** es numerable.
- ★ El intervalo  $[0, 1) \subseteq \mathbb{R}$  **no** es numerable.
- ★  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  **no** es numerable.

# Método diagonal de Cantor: $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ no es numerable

Caso contrario,  $\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \{A_0, A_1, A_2, \dots, A_n, \dots\}$ .

- ★ Cada subconjunto  $B$  de  $\mathbb{N}$  se puede identificar con una sucesión infinita compuesta de SÍES y NOES:

	0	1	2	...	n	...
B	SÍ	NO	NO	...	SÍ	...

En la posición  $j$ -ésima aparece SÍ cuando  $j \in B$  y NO en caso contrario.

- ★ Formemos una tabla infinita con la información de los conjuntos  $A_j$  (de acuerdo con el criterio anterior).

	0	1	2	..	n	..
$A_0$	SÍ	no	no	..	no	..
$A_1$	no	NO	sí	..	sí	..
$A_2$	sí	sí	NO	..	no	..
⋮	⋮	⋮	⋮	..	⋮	..
$A_n$	no	sí	no	..	SÍ	..
⋮	⋮	⋮	⋮	..	⋮	..

- ★ El conjunto  $D \subseteq \mathbb{N}$  definido como sigue a través de la diagonal de la tabla (permutando SÍ y NO, entre sí)

	0	1	2	...	n	...
D	NO	-	-	...	-	...
	-	SÍ	-	...	-	...
	-	-	SÍ	...	-	...
	-	-	-	...	-	...
	-	-	-	...	NO	...
	-	-	-	...	-	...
	-	-	-	...	-	...

Entonces  $D \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$  y  $D$  es un conjunto distinto de  $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ . Lo que es una **contradicción**.

# Método diagonal de Cantor: $[0, 1)$ no es numerable

Recuérdese que  $[0, 1) = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 1\}$

Veamos ahora que

- ★ Cada número real  $x \in [0, 1)$  se puede escribir en base 10 como:  $0^{\prime} a_0 a_1 a_2 \dots$ , en donde cada  $a_k \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ . Por tanto podemos identificar  $x$  con la sucesión  $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$
- ★ Si el conjunto  $[0, 1)$  fuese numerable, entonces  $[0, 1) = \{x_0, x_1, x_2, \dots\}$ . Ahora bien, cada  $x_j$  tendría una expresión decimal:  $0^{\prime} a_{j,0} a_{j,1} a_{j,2} \dots$
- ★ Formemos una tabla infinita con las expresiones decimales de los  $x_j$ :

$x_0$	$a_{0,0}$	$a_{0,1}$	$a_{0,2}$	..	$a_{0,n}$	..
$x_1$	$a_{1,0}$	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	..	$a_{1,n}$	..
$x_2$	$a_{2,0}$	$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	..	$a_{2,n}$	..
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	..	$\vdots$	..
$x_n$	$a_{n,0}$	$a_{n,1}$	$a_{n,2}$	..	$a_{n,n}$	..
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	..	$\vdots$	..

- ★ Definamos ahora el número real  $d = 0^{\prime} d_0 d_1 d_2 \dots, d_n \dots$ , en donde  $d_j = \begin{cases} 0 & \text{si } a_{j,j} \neq 0 \\ 1 & \text{si } a_{j,j} = 0 \end{cases}$
- ★ Entonces  $d \in [0, 1)$  y para todo  $j \in \mathbb{N}$ ,  $x_j \neq d$ ; es decir,  $d \notin \{x_0, x_1, x_2, \dots\} = [0, 1)$ . Lo que es una **contradicción**.

# Predicados

Sea  $A$  un conjunto. Si  $(x_1, \dots, x_n) \in A^n$ ,  $n \neq 0$ , entonces notaremos  $\vec{x} \in A^n$ .

Un **predicado**  $n$ -ario,  $n \neq 0$ ,  $\theta$  sobre  $A$  es una aplicación de  $A^n$  en  $\{0, 1\}$ .

- ★ Si  $\theta(\vec{x}) = 1$  para  $\vec{x} \in A^n$ , diremos que el predicado  $\theta$  se verifica para  $\vec{x}$ .  
Caso contrario, diremos que el predicado  $\theta$  no se verifica para  $\vec{x}$ .
- ★ Todo predicado  $n$ -ario,  $\theta$ , sobre  $A$  determina un subconjunto de  $A^n$  definido así:  $S_\theta = \{\vec{x} \in A^n \mid \theta(\vec{x}) = 1\}$ .
- ★ Todo subconjunto de  $B \subseteq A^n$  determina un predicado  $n$ -ario  $\theta_B$  sobre  $A$  tal que  $\theta_B(\vec{x}) = 1$  **sii**  $\vec{x} \in B$ .

La **función característica** de  $B \subseteq A^n$  es el siguiente predicado sobre  $A^n$ :

$$C_B(\vec{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \vec{x} \in B \\ 0 & \text{si } \vec{x} \in A^n \setminus B \end{cases}$$

La función característica del subconjunto  $B$  es el predicado  $n$ -ario asociado a  $B$ .

# Operaciones con predicados

Sean  $\theta$  y  $\theta'$  predicados  $n$ -arios,  $n \neq 0$ , sobre un conjunto  $A$ . Se definen los siguientes predicados  $n$ -arios sobre  $A$ :

- ★  $(\neg\theta)(\vec{x}) = 1 - \theta(\vec{x})$ . Se notará  $\neg\theta(\vec{x})$  en lugar de  $(\neg\theta)(\vec{x})$
- ★  $(\theta \vee \theta')(\vec{x}) = \max \{\theta(\vec{x}), \theta'(\vec{x})\}$ . Se notará  $\theta(\vec{x}) \vee \theta'(\vec{x})$  en lugar de  $(\theta \vee \theta')(\vec{x})$ .
- ★  $(\theta \wedge \theta')(\vec{x}) = \min \{\theta(\vec{x}), \theta'(\vec{x})\}$ . Se notará  $\theta(\vec{x}) \wedge \theta'(\vec{x})$  en lugar de  $(\theta \wedge \theta')(\vec{x})$ .
- ★  $\theta \rightarrow \theta' \stackrel{\text{def}}{=} (\neg\theta) \vee \theta'$ .
- ★  $\theta \leftrightarrow \theta' \stackrel{\text{def}}{=} (\theta \rightarrow \theta') \wedge (\theta' \rightarrow \theta)$ .

Se verifican las siguientes relaciones:

- ★  $S_{\theta \vee \theta'} = S_{\theta} \cup S_{\theta'}$ .
- ★  $S_{\theta \wedge \theta'} = S_{\theta} \cap S_{\theta'}$ .
- ★  $S_{\neg\theta} = A^n \setminus S_{\theta}$ .



# Cuantificación **acotada**

Sea  $\theta(x_1, \dots, x_n, y)$  un predicado  $(n + 1)$ -ario sobre  $\mathbb{N}$ .

- ★ El predicado obtenido a partir de  $\theta$  por **cuantificación existencial acotada** es el siguiente predicado  $(n + 1)$ -ario sobre  $\mathbb{N}$ :

$$(\exists z)_{\leq y} \theta(\vec{x}, z) = \begin{cases} 1 & \text{si existe } z_0 \leq y \text{ tal que } \theta(\vec{x}, z_0) = 1. \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Obsérvese que  $(\exists z)_{\leq y} \theta(\vec{x}, z) = \theta(\vec{x}, 0) \vee \theta(\vec{x}, 1) \vee \dots \vee \theta(\vec{x}, y)$ .

- ★ El predicado obtenido a partir de  $\theta$  por **cuantificación universal acotada** es el siguiente predicado  $(n + 1)$ -ario sobre  $\mathbb{N}$ :

$$(\forall z)_{\leq y} \theta(\vec{x}, z) = \begin{cases} 1 & \text{si para todo } z_0 \leq y \text{ se tiene } \theta(\vec{x}, z_0) = 1. \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Obsérvese que  $(\forall z)_{\leq y} \theta(\vec{x}, z) = \theta(\vec{x}, 0) \wedge \theta(\vec{x}, 1) \wedge \dots \wedge \theta(\vec{x}, y)$ .

# Cuantificación **no acotada**

Sea  $\theta(x_1, \dots, x_n, y)$  un predicado  $(n + 1)$ -ario sobre  $\mathbb{N}$ , con  $n \neq 0$ .

- ★ El predicado obtenido a partir de  $\theta$  por **cuantificación existencial no acotada** es el siguiente predicado  $n$ -ario sobre  $\mathbb{N}$ :

$$(\exists z)\theta(\vec{x}, z) = \begin{cases} 1 & \text{si existe } z_0 \text{ tal que se verifica } \theta(\vec{x}, z_0) = 1. \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

- ★ El predicado obtenido a partir de  $\theta$  por **cuantificación universal no acotada** es el siguiente predicado  $n$ -ario sobre  $\mathbb{N}$ :

$$(\forall z)\theta(\vec{x}, z) = \begin{cases} 1 & \text{si para todo } z_0 \text{ se verifica } \theta(\vec{x}, z_0) = 1. \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

# El principio de minimización

**Expresión sobre predicados.** Sea  $\theta(x)$  un predicado 1-ario sobre  $\mathbb{N}$ . Si  $\exists x \theta(x)$  entonces  $\exists m (\theta(m) \wedge \forall y < m (\neg\theta(y)))$

★ Notación:  $m = \mu x(\theta(x))$  (**m** es **el mínimo** de los  $x$  que verifican  $\theta(x)$ ).

**Expresión conjuntista.** Sea  $A \subseteq \mathbb{N}$  tal que  $A \neq \emptyset$ . Entonces  $\exists m (m \in A \wedge \forall y < m (y \notin A))$

★ Notación:  $m = \min(A)$  (**m** es el **menor elemento** de  $A$ ).

## Ejercicio.

★ Probar que todo número natural  $n \geq 2$  es divisible por un número primo.

**Indicación:** considérese el conjunto  $A = \{x \mid x > 1 \wedge x \text{ divide a } n\}$ , pruébese que es no vacío y justifíquese que el menor elemento de ese conjunto es un número primo.

# El principio de inducción débil

**Teorema:** Sea  $\theta(x)$  un predicado 1-ario sobre  $\mathbb{N}$  tal que se verifica  $\theta(0)$  y  $\forall x (\theta(x) \rightarrow \theta(x + 1))$ . Entonces se tiene que  $\forall x \theta(x)$ .

**Corolario:** Sean  $\theta(x)$  un predicado 1-ario sobre  $\mathbb{N}$  y  $a \in \mathbb{N}$  tales que se verifica  $\theta(a)$  y  $\forall x \geq a (\theta(x) \rightarrow \theta(x + 1))$ . Entonces se tiene que  $\forall x \geq a (\theta(x))$ .

## Ejercicios.

★ Probar que para cada  $n \in \mathbb{N}$  se tiene que  $\sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$

★ Probar que para cada  $n \in \mathbb{N}$  se tiene que  $\sum_{i=0}^n (2i + 1) = (n + 1)^2$

# El principio de inducción fuerte

**Teorema:** Sea  $\theta(x)$  un predicado 1-ario sobre  $\mathbb{N}$  tal que se verifica  $\theta(0)$  y  $\forall x ([\forall p \leq x \theta(p)] \longrightarrow \theta(x + 1))$ . Entonces se tiene que  $\forall x \theta(x)$ .

**Corolario:** Sean  $\theta(x)$  un predicado 1-ario sobre  $\mathbb{N}$  y  $a \in \mathbb{N}$  tales que se verifica  $\theta(a)$  y  $\forall x \geq a ([\forall p \geq a (p \leq x \longrightarrow \theta(p))] \longrightarrow \theta(x + 1))$ . Entonces  $\forall x \geq a (\theta(x))$ .

## Ejercicio.

- ★ Probar que todo número natural  $n \geq 2$  se puede descomponer en un producto de números primos.