Ciencias de la Computación (2021-22)

Equivalencia entre modelos de computación

Ejercicio 1.– Sea M la máquina de Turing de lenguaje $\Sigma = \{1\}$ y tabla de transiciones:

$$\begin{array}{l}(q_1, B, R, q_2)\\(q_2, 1, R, q_3)\\(q_3, B, R, q_4)\\(q_4, 1, B, q_1)\\(q_4, B, R, q_4)\end{array}$$

Supongamos que q_1 es el estado inicial de M. Para cada $x \in \mathbb{N}$ sea $g(x)$ el número de 1's que quedan en la cinta de M tras detenerse la computación de M iniciada sobre una cadena de x 1's con la cabeza lectora situada a la izquierda del primer 1. ¿Cual es la función $g : \mathbb{N} - \to \mathbb{N}$ calculada por M de este modo?

Ejercicio 2.– Para cada una de las funciones siguientes, proporcionar una máquina de Turing que la calcule (x e y denotan palabras sobre el alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$):

1. $f_1(x) = abx$.
2. $f_2(x) = axb$.
3. $f_3(x, y) = xy$.
4. $f_4(x, y) = yx$.
5. $f_5(x) = x^R$, siendo x^R la palabra cuyos símbolos son los de x en orden inverso.

Ejercicio 3.– Una máquina de Turing P con alfabeto $\Sigma = \{0, 1\}$ puede utilizarse para calcular una función $f : \mathbb{N}^n - \to \mathbb{N}$ identificando cada número $n \in \mathbb{N}$ con su desarrollo binario. Escribir máquinas de Turing que calculen las siguientes funciones:

1. $f_1(x, y) = x + y$.
2. $f_2(x) = 2x$.
3. $f_3(x, y) = x \dot{-} y$.

Ejercicio 4.– Dar máquinas de Turing (deterministas y/o no deterministas) que acepten los siguientes lenguajes sobre el alfabeto $\Sigma^* = \{a, b\}$ (siendo $a^0 = \varepsilon$ y $a^{n+1} = a^n a$):

1. $L_0 = \{a^n b a^n : \ n \in \mathbb{N}\}$,
2. $L_1 = \{a^n b a^m b a^{n+m} : \ n, m \in \mathbb{N}\}$,
3. $L_2 = \{w \in \Sigma^* : w = w^R\}$.
4. $L_3 = \{w \in \Sigma^* : \ x$ contiene al menos dos estancias de b consecutivas$\}$.

Ejercicio 5.– Probar que $L = \{1^k : \ k \text{ es un cuadrado perfecto}\}$ es un lenguaje recursivo proporcionando una máquina de Turing que decide dicho lenguaje.

Ejercicio 6.– Para cada una de las funciones siguientes, escríbase un programa de Post-Turing que la calcule (x e y denotan palabras sobre el alfabeto $\Sigma = \{a,\, b\}$):

1. $f_1(x, y) = xy$.
2. $f_2(x, y) = yx$.
3. $f_3(x) = x^R$, siendo x^R la palabra cuyos símbolos son los de x en orden inverso.
4. $f_4(x) = \begin{cases} a & \text{si } |x| \text{ es par} \\ b & \text{si } |x| \text{ es impar} \end{cases}$

Ejercicio 7.– Un programa de Post–Turing P con alfabeto $\Sigma = \{1\}$ puede utilizarse para calcular una función $f : \mathbb{N}^n - \ \to \mathbb{N}$ identificando cada número $n \in \mathbb{N}$ con la única palabra de Σ^* de longitud n. Por definición, $f(n)$ es el número de 1's que quedan en la cinta de P tras detenerse la computación de P iniciada sobre una cadena de n 1's con la cabeza lectora situada a la izquierda del primer 1. Escribir programas de Post-Turing que calculen las siguientes funciones:

1. $f_1(x, y) = x + y$.
2. $f_2(x) = 2x$.
3. $f_3(x, y) = x \dot{-} y$.
4. $f_4(x, y) = 2x + y \dot{-} 1$.

Ejercicio 8.– Sea $\Sigma = V \cup T$ con $T = \{a,\, b,\, c\}$ y $V = \{A,\, B,\, C,\, S\}$ y consideremos la gramática $G = \langle V,\, T,\, \Phi,\, E\rangle$ donde Φ está formado por las reglas:

$$AB \to BA, \quad AC \to CA, \quad BC \to CB$$
$$BA \to AB, \quad CA \to AC, \quad CB \to BC$$
$$S \to \epsilon, \quad S \to ABCS, \quad A \to a, \quad B \to b, \quad C \to c$$

Se pide:

1. Dar una derivación de la palabra $baaccb$ en G.
2. Probar que $L(G) = \{w \in \{a, b, c\}^* : \ w \text{ contiene el mismo número de } a\text{'s}, b\text{'s y } c\text{'s}\}$.
3. Encuentra un gramática que genera el mismo lenguaje que G y tenga menos reglas.

Ejercicio 9.– Encuentra gramáticas que generen los siguientes lenguajes:

1. $\{a^n b^n c^n : \ n \geq 0\}$
2. $\{w \in \{a,\, b,\, c\}^* : \ w$ tiene más a's que b's y más b's que c's $\}$.
3. $\{ww : \ w \in \{a,\, b\}\}^*$.