Ciencias de la Computación (2021–22)

Funciones recursivas

Ejercicio 1.– Calcular $\mathcal{R}(\mathcal{O};\mathcal{C}(\mathcal{S};\mathcal{C}(\mathcal{S};\Pi_3^3)))(2,5)$ ¿Qué función calcula? Razónese la respuesta.

Ejercicio 2.– Sean $g_1, g_2 : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ y $g_3, g_4 : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funciones primitivas recursivas. Probar que las siguientes funciones h_1, h_2 y h_3 son primitivas recursivas.

$$h_1(x,y,z) = g_1(z,y,x) \quad h_2(x) = g_2(x,x,x) \quad h_3(w,x,y,z) = h_1(g_3(w,y), z, g_4(2, g_4(y,z)))$$

Ejercicio 3.– Probar que:

- Si $A \subseteq \mathbb{N}$ es primitivo recursivo y $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ primitiva recursiva, entonces $f^{-1}[A]$ es primitivo recursivo.
- Todo subconjunto finito de $\mathbb{N}^n$ es primitivo recursivo.
- Si A, B son conjuntos primitivos recursivos, entonces $A \times B$ es primitivo recursivo.
- Si $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ es p.r. y $a \in \mathbb{N}$ entonces el conjunto $A = \{\vec{x} \in \mathbb{N}^k : \ f(\vec{x}) = a\}$ es p.r.

Ejercicio 4.– Dada $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definimos $it_f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ como

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N}^2, \quad it_f(n,x) = f^n(x) = f(f(\overset{(n \ veces)}{\cdots} f(x)\cdots))$$

Probar que si $f \in \mathcal{PR}$ entonces $it_f \in \mathcal{PR}$.

Ejercicio 5.– Probar que las funciones m.c.d.: $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ y m.c.m.: $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ que calculan, respectivamente, el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de dos números naturales, son primitivas recursivas.

Ejercicio 6.– Probar que la función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por

$$f(x) = \text{número de dígitos de } x \text{ en base 10}$$

es primitiva recursiva.

Ejercicio 7.– Sea $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(2) = 2^2$, $f(3) = 3^{3^3}$, $f(4) = 4^{4^{4^4}}$, en general,

$$f(n) = n^{n^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{n}}}}} \quad (n \ veces)$$

Probar que $f \in \mathcal{PR}$.

Ejercicio 8.– Probar que las siguientes funciones de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ son primitivas recursivas:

1. $\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = \text{la suma de los divisores de } x & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$
2. $g(x) =$ el número de primos menores o iguales que x.
3. $h(x) =$ el único n tal que $n \leq \sqrt{2} \cdot x < n + 1$.

Ejercicio 9.– Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la función cuyos valores sucesivos son

$$1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

Probar que $f \in \mathcal{PR}$.

Ejercicio 10.– Sea $k \geq 1$. Encontrar una aplicación

$$\Phi_k : \mathbb{N} \cup \ldots \cup \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$$

biyectiva tal que para todo $j \leq n$, $\Phi \restriction_{\mathbb{N}^j} \in \mathcal{PR}^{(j)}$

Indicación Probar por inducción en k la existencia de tal función, utilizando la función par.

Ejercicio 11.– Dada f una función, la **función recorrido de** f, que notaremos por $\hat{f}$ es la función:

$$\hat{f}(n) = [f(0), \ldots, f(n)]$$

Probar que si f es p.r. si y sólo si $\hat{f}$ también lo es

Ejercicio 12.– Sea $k \in \mathbb{N}$ un número fijo y $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tales que $\forall x \in \mathbb{N},\ f(x+1) < x+1$. Probar que si $f, g \in \mathcal{PR}$ entonces la función $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por

$$\begin{array}{l} h(0) = k \\ h(x+1) = g(h(f(x+1))) \end{array}$$

es primitiva recursiva (utilicése la **función recorrido**).

Ejercicio 13.– Consideremos la función

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 & \text{si } x_2 = 0 \\ f(\lfloor \frac{x_1}{2} \rfloor, x_2 - 1) & \text{si } x_2 > 0 \end{cases}$$

1. Probar que la función
$$f_1(x_1, x_2) = [f(0, x_2), \ldots f(x_1, x_2)]$$
es primitiva recursiva
(*Indicación*: Encontrar una definición por recursión en x_2).
Nota: Tened en cuenta que todavía no se ha demostrado que $f \in \mathcal{PR}$
2. Probar que $f \in \mathcal{PR}$.

Ejercicio 14.– Consideremos las funciones totales $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ caracterizadas por las relaciones siguientes:

$$\left.\begin{array}{lcl} f(0) & = & 0 \\ f(n+1) & = & 1 + g(n) \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{lcl} g(0) & = & 0 \\ g(n+1) & = & 2 + f(n) \end{array}\right\}$$

Probar que las funciones f y g son primitivas recursivas. (**Indicación:** Considérese la función $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $h(n) = [f(n), g(n)]$).

Ejercicio 15.– Dada una función parcial $f : \mathbb{N} - \to \mathbb{N}$ definimos la función parcial $\nu_f : \mathbb{N} - \to \mathbb{N}$ como sigue:

$$\nu_f(x) = |\{y \in \mathbb{N} :\ y < x \wedge f(y) = 0\}|$$

Probar que si f es primitiva recursiva, entonces la función ν_f también lo es.

Ejercicio 16.– Dado un predicado primitivo recursivo $R(x,y)$, definamos

$$g(x,z) = \max_{y \le z} R(x,y)$$

como el mayor $y \le z$ tal que $R(x,y)$, si existe, y 0 si no existe ningún elemento $y \le z$ tal que $R(x,y)$. Probar que $g \in \mathcal{PR}$.

Ejercicio 17.– (Sucesión de Fibonacci) Probar que la siguiente función es primitiva recursiva:

$$\begin{cases} f(0) = 0, \ f(1) = 1 \\ f(n) = f(n-1) + f(n-2), \quad \text{para } n \ge 2 \end{cases}$$

Ejercicio 18.– Dada $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$, sea $f' : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por

$$f'(x) = \begin{cases} f(x_1, \dots, x_n) & \text{si } x = [x_1, \dots, x_n] \text{ y } \mathrm{Lt}(x) = n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Probar que $f \in \mathcal{PR} \iff f' \in \mathcal{PR}$.

Ejercicio 19.– Probar que las siguientes funciones son primitivas recursivas

1. $\begin{cases} h(0) = 3 \\ h(x+1) = \displaystyle\sum_{t=0}^{x} h(t) \end{cases}$
2. $\begin{cases} f(0) = 1, \ f(1) = 4, \ f(2) = 6 \\ f(x+3) = f(x) + f(x+1)^2 + f(x+2)^3 \end{cases}$

(Indicación: Usar las funciones recorrido de h y f (ver ejercicio anterior))

Ejercicio 20.– Probar que la función $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ definida por

$$\begin{cases} f([a_1, \dots, a_n], [b_1, \dots, b_m]) = [a_1, \dots, a_k] & \text{si existe } k, \ [a_1, \dots, a_k] = [b_1, \dots, b_k] \\ & \quad \text{y } a_{k+1} \ne b_{k+1} \\ f(x,y) = 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

es primitiva recursiva.

Ejercicio 21.– Dada $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definamos $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ como

$$\begin{array}{l} f(0,x) = g(x) \\ f(n+1,x) = f(n, f(n,x)) \end{array}$$

Probar que si $g \in \mathcal{PR}$ entonces $f \in \mathcal{PR}$.

Indicación: Probar que $f(n,x) = g^{2^n}(x)$.

Ejercicio 22.– Sea $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ definida por: $f(u,0) = 1$ y $f(u,x) = f(u, x \dot{-} (u+1)) + 5$ si $x > 0$.

Se pide:

1. Probar que para todos u, x se verifica que $f(u,x) \downarrow$. ¿Es inyectiva?
2. Diseñar un programa `GOTO`, `p`, tal que $[\![\mathtt{p}]\!] = f$.

3. Probar que f es primitiva recursiva

Ejercicio 23.– Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f([a_1, \ldots, a_n]) = [a_n, \ldots, a_1] & \text{si } a_n \neq 0 \end{cases}$$

Probar que:

1. $f(p_n) = 2$ y que $f(x^2) = f(x)^2$.
2. f es primitiva recursiva.

Ejercicio 24.– Sea $f(x, y) = (\mu z)[Primo(z) \wedge x = z \cdot y]$

- Determínense el dominio y el rango de f. ¿Es f inyectiva?
- ¿Es f recursiva?

Ejercicio 25.– Sea θ un predicado binario recursivo. Demuéstrese que existe una función $f \in \mathcal{P}$ tal que

$$f(x)\downarrow \iff \theta(x, f(x))$$

Ejercicio 26.– Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, recursiva y estríctamente creciente (es decir, para todo $x \in \mathbb{N}$, $f(x) < f(x+1)$). Probar que rang(f) es un conjunto recursivo (Indicación: Probar que para todo n, $f(n) \geq n$).

Ejercicio 27.– Sea $\theta(x)$ un predicado recursivo de aridad 1. Pruébese que la siguiente función es recursiva:

$$f(n) = \begin{cases} 0 & \text{si n=0} \\ n\text{-ésimo número } x \text{ tal que } \theta(x) & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

Ejercicio 28.– Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ recursiva y biyectiva. Probar que f^{-1} es recursiva.

Ejercicio 29.– Sea θ un predicado primitivo recursivo de aridad 1. Definimos $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ como:

$$f(x, y) = z, \textit{ donde } z \textit{ es el número de veces que } \theta \textit{ se satisface en el intervalo } [0, x+y]$$

1. Probar que f es recursiva diseñando un programa `GOTO` que la calcule.
2. Probar que f es primitiva recursiva.

Nota: En los siguientes ejercicios se estudian diversos conjuntos de funciones, definidos de manera similar a la clase $\mathcal{PR}$ de las funciones primitivas recursivas. Por tanto, es posible demostrar por inducción propiedades acerca de las funciones de dichos conjuntos.

Nota: Dadas $H : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$, $g : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ y $h : \mathbb{N}^{n+2} \to \mathbb{N}$, diremos que f se define por **recursión limitada** mediante g, h y H, (se notará por $f = R_l(g, h; H)$) si

$$f = R(g, h) \quad \text{y} \quad \forall \vec{x} \forall y [f(\vec{x}, y) \leq H(\vec{x}, y)]$$

Ejercicio 30.– Se define $\mathcal{E}^0$ como el menor conjunto de funciones tal que contiene a la función constante e igual a 0, la función siguiente y las proyecciones, y es cerrado bajo composición y recursión limitada.

Probar por inducción en la clase $\mathcal{E}^0$ que para toda función $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$, de dicha clase, existen k y $j \leq n$ tales que para toda n-upla $\vec{x}$:

$$f(\vec{x}) \leq x_j + k$$

Ejercicio 31.– Se define $\mathcal{E}^1$ como $\mathcal{E}^0$, pero añadiendo la suma como función básica. Probar que:

1. Si $f \in \mathcal{E}^1$ es de aridad n, entonces existen $a_0 \cdots a_n$ tales que para todo $\vec{x} \in \mathbb{N}^n$

   $$f(\vec{x}) \leq a_0 + a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$$

   Indicación: Probarlo por inducción en $\mathcal{E}^1$.

2. $\mathcal{E}^0 \subsetneq \mathcal{E}^1$.

Ejercicio 32.– La clase $\mathcal{E}^2$ extiende a $\mathcal{E}^1$ añadiendo la función $h(x) = x^2$ como función básica. Probar que:

1. Si $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ verifica que $f \in \mathcal{E}^2$, entonces f está acotada por un polinomio $p(x_1, \ldots x_k)$ con coeficientes naturales, es decir

   $$\forall \vec{x}(f(\vec{x}) \leq p(\vec{x}))$$

2. $\mathcal{E}^1 \subsetneq \mathcal{E}^2 \subsetneq \mathcal{PR}$.

Ejercicio 33.– La clase $\mathcal{L}^2$ es la menor clase de funciones que contiene a las funciones cero, sucesor, proyecciones y diferencia, y es cerrado bajo composición y sumas acotadas i.e.

$$f \in \mathcal{L}^2 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{y \leq z} f(\vec{x}, y) \in \mathcal{L}^2$$

Probar que $\mathcal{L}^2 \subseteq \mathcal{E}^2$. (**Indicación:** Demostrar previamente por inducción en $\mathcal{L}^2$ que toda función de dicha clase está acotada por un polinomio).

Ejercicio 34.– Sea $\mathcal{COMP}$ la menor clase de funciones que contiene a las funciones básicas y es cerrada bajo composición.

1. Probar que toda función $f(x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathcal{COMP}$ es de la forma

   $$f(x_1, \ldots, x_n) = \delta x_i + k$$

   para ciertos $i \leq n$, $k \in \mathbb{N}$ y $\delta \in \{0, 1\}$ fijos.

2. Probar que toda función $f \in \mathcal{COMP}$ es monótona, es decir, si $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ pertenece a $\mathcal{COMP}$

   $$\forall \vec{x} \in \mathbb{N}^n, \vec{y} \in \mathbb{N}^n, \quad [\forall i = 1, \ldots, n,\ x_i \leq y_i] \quad \Longrightarrow \quad f(x_1, \ldots, x_n) \leq f(y_1, \ldots, y_n)$$

3. Probar que $\mathcal{COMP} \subsetneq \mathcal{PR}$

4. Probar que $\texttt{GOTO}_l - \texttt{COMP} \subseteq \mathcal{COMP}$.

Ejercicio 35.– Sea $\mathcal{PR}_1$ la clase de las funciones que pueden obtenerse a partir de las funciones básicas usando composición y, a lo sumo, una vez recursión primitiva.

1. Dada $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ si $f \in \mathcal{COMP}$ entonces existe $k > 0$ tal que

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{N}^n, \quad f(x_1, \ldots, x_n) \leq \max(x_1, \ldots, x_n) + k$$

2. Dados $c \in \mathbb{N}$ y $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $g \in \mathcal{COMP}$ definamos $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ por

$$h(0) = c \qquad h(x+1) = g(x, h(x))$$

Probar que existe $k > 0$ tal que $\forall x \in \mathbb{N},\ h(x) \leq kx + c$.

3. Dadas $g : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ y $h : \mathbb{N}^{n+2} \to \mathbb{N}$, $g, h \in \mathcal{COMP}$, sea $f = R(g, h)$. Probar que existen $k, l > 0$ tales que

$$f(\vec{x}, y) \leq ky + \max(x_1, \ldots, x_n) + l$$

4. Dada $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$, si $f \in \mathcal{PR}_1$ entonces existen $k, l > 0$ tales que

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{N}^n, \quad f(x_1, \ldots, x_n) \leq \max(x_1, \ldots, x_n) \cdot k + l$$

5. Probar que $\mathcal{PR}_1 \subsetneq \mathcal{PR}$.

Ejercicio 36.– Sea $A : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ la función de Ackermann definida por

$$A(m,k) = \begin{cases} k+1 & \text{si } m = 0 \\ A(m-1, 1) & \text{si } m > 0, k = 0 \\ A(m-1, A(m, k-1)) & \text{si } m > 0, k > 0 \end{cases}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos $A_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ por $A_n(x) = A(n, x)$. Probar que se tienen las siguientes desigualdades para todo $n, x \in \mathbb{N}$.

1. $A_n(x) > 0$.

2. $A_n(x+1) > A_n(x)$.

3. $A_n(x) > x$.

4. $A_{n+1}(x) \geq A_n(x+1)$.