# Ciencias de la Computación (2021–22)

## Programas universales y forma normal

**Ejercicio 1.–** Calcúlese $\#(\mathtt{p})$, donde $\mathtt{p}$ es el siguiente programa:

```
     IF X ≠ 0 GOTO A
[B]  X ← X + 1
     IF X ≠ 0 GOTO B
[A]  Y ← Y + 1
```

**Ejercicio 2.–** Sea $n \geq 1$. Probar que para cada $f \in \mathcal{P}^{(n)}$ existen infinitos índices $e \in \mathbb{N}$ tales que $\varphi_e^{(n)} = f$.

**Ejercicio 3.–** Sean $\mathtt{GOTO}_l$ y $\mathtt{GOTO}_f$ los modelos introducidos en la primera relación de problemas. Probar que los siguientes conjuntos son recursivos:

- $A = \{\#(\mathtt{p}) :\ \mathtt{p}$ es un $\mathtt{GOTO}_l -$ programa$\}$
- $B = \{\#(\mathtt{p}) :\ \mathtt{p}$ es un $\mathtt{GOTO}_f -$ programa$\}$

**Ejercicio 4.–** ¿Es cierto que $\mathcal{U}_2(1,2,3) = \mathcal{U}_2(3,2,1)$? Justifíquese la respuesta.

**Ejercicio 5.–** Calcúlese:

1. $\mathcal{U}_1(2, 575)$.
2. $\mathcal{U}_1(x, q^2 - 1)$, donde $q$ es un número primo.
3. $\mathcal{U}_2(1, 1, 3^m - 1)$ donde $m$ tal que $m + 1$ es potencia de 2.
4. $\mathcal{U}_2(1, 1, \#(\mathtt{U}_1))$.

**Ejercicio 6.–** Probar que son recursivos:

1. $A = \{\#(\mathtt{p}) :$ en $\mathtt{p}$ no aparece ninguna variable auxiliar$\}$
2. $B = \{x :$ el programa de código $x$ posee, a lo sumo, 7 instrucciones y alguna es un DECREMENTO $\}$
3. $C = \{\#(\mathtt{p}) :\ |\mathtt{p}| > 5$ y la última instrucción es un condicional $\}$
4. $D = \{x :$ el programa de código $x^2$ para sobre $x$ en exactamente $x$ pasos$\}$
5. $E = \{\#(\mathtt{p}) :$ el valor de la variable $\mathtt{Y}$, en el paso 100 de la computación de $\mathtt{p}$ sobre 0, es 32$\}$

**Ejercicio 7.–** Sea $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ recursiva, total, y estríctamente creciente. Probar que

$$l((\mu z)\mathcal{T}_n(\vec{x}, e, z)) = l((\mu z)\mathcal{T}_n(\vec{x}, e, \langle l(z), h(r(z))\rangle))$$

**Ejercicio 8.–** Encontrar $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ primitiva recursiva e inyectiva tal que para todo $n$, $\varphi_{f(n)} = \mathcal{O}$.

**Ejercicio 9.–** Probar que la función total $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \varphi_x(x) + 1 & \text{si } \varphi_x(x) \downarrow \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

**no** es recursiva (Indicación: Si fuese recursiva, tomar $e$ tal que $\varphi_e = f$).

**Ejercicio 10.–** Sea $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ una función total GOTO-computable y p un GOTO-programa tal que $[\![\mathtt{p}]\!]^{(n)} = f$. Supongamos que existe $g : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ primitiva recursiva tal que para todo $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{N}^n$ se verifica

$$STEP^{(n)}(x_1, \ldots, x_n, \#(\mathtt{p}), g(x_1, \ldots, x_n))$$

Probar que la función $f$ es primitiva recursiva.

**Ejercicio 11.–** Sea $\mathtt{p} \in \mathtt{GOTO}_\mathtt{P}$. Probar que es recursiva la función

$$g(x) = \begin{cases} \text{núm. de Gödel de la sucesión de valores que toma } \mathtt{Y} & \\ \quad \text{en la ejecución de } \mathtt{p} \text{ sobre } x & \text{si } [\![\mathtt{p}]\!](x) \downarrow \\ & \\ \uparrow & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

**Ejercicio 12.–** Probar que la siguiente función es recursiva: $h(x, y) = \text{máx}\{\varphi_0(y), \ldots, \varphi_x(y)\}$

**Ejercicio 13.–** Probar que las siguientes funciones son recursivas:

- $h_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \varphi_x(x) \downarrow \\ \uparrow & \text{si } \varphi_x(x) \uparrow \end{cases}$

- $h_2(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \varphi_x(x) \downarrow \\ 0 & \text{si } x \in A \\ \uparrow & \text{en otro caso} \end{cases}$ donde $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ finito es tal que $\varphi_{a_i}(a_i) \uparrow$ $(1 \leq i \leq n)$

**Ejercicio 14.–** Sea $f : \mathbb{N} - \to \mathbb{N}$ recursiva e inyectiva.

1. Probar que la siguiente función es recursiva: $h(y) = \begin{cases} x & \text{si } f(x) = y \\ \uparrow & \text{e.o.c.} \end{cases}$

2. Mostrar con un ejemplo que, en general, $h(y) \neq (\mu x)[|f(x) - y| = 0]$

**Ejercicio 15.–** Encontrar una enumeración $\{\psi_e \ : \ e \in \mathbb{N}\}$ de las funciones recursivas de $\mathcal{P}^{(1)}$ acotadas (en su dominio) por la función $f(x) = x^2$ (Indicación: Modificar la formal normal de Kleene).

**Ejercicio 16.–** Dada $f : \mathbb{N}^n - \to \mathbb{N}$, definimos

$$C_f = \{[x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n)] : \ f(x_1, \ldots, x_n) \downarrow\}$$

Probar que si $C_f$ es recursivo entonces $f \in \mathcal{P}$.

**Ejercicio 17.–** Sean $f, g : N \to N$ funciones `GOTO`–computables. Pruébese que $h : \mathbb{N}^2 - \to \mathbb{N}$ es `GOTO`–computable:

$$h(x,e) = \begin{cases} f(x) & \textit{si la computación de } \mathtt{p}\textit{, de código } e\textit{, sobre } x \textit{ para en un número par de pasos} \\ g(x) & \textit{si la computación de } \mathtt{p}\textit{, de código } e\textit{, sobre } x \textit{ para en un número impar de pasos} \\ \uparrow & \textit{si la computación de } \mathtt{p}\textit{, de código } e\textit{, sobre } x \textit{ no para} \end{cases}$$

**Ejercicio 18.–** Sea `p` un programa `GOTO` para el que existe $t \in \mathbb{N}$ tal que:

$$STEP^{(1)}(1, \#(\mathtt{p}), t) \neq STEP^{(1)}(1, \#(\mathtt{p}), t+1)$$

1. ¿Es cierto que $[\![\mathtt{p}]\!]^{(1)}(1) \downarrow$? Justifica la respuesta.
2. Sea `p` tal que $\#(\mathtt{p}) = 899$
   (a) Calcula el valor de t que verifica la desigualdad anterior.
   (b) Calcula el valor de $(r(di^{(1)}(1, 899, t-1)))_1$.
   (c) Calcula $\varphi_{899}(0)$.