## Ciencias de la Computación (2021-22)

**Conjuntos recursivamente enumerables.**

**Ejercicio 1.–** Sea $P(\vec{x}, y_1, \dots, y_n)$ un predicado recursivo. Probar que el conjunto

$$A = \{\vec{x} \ : \ (\exists y_1) \cdots (\exists y_n) \ P(\vec{x}, y_1, \dots, y_n)\}$$

es recursivamente enumerable.

**Ejercicio 2.–** Sea $P(x, y, u)$ un predicado recursivo. Probar que el conjunto

$$A = \{(x, z) \ : \ (\forall y)_{\leq z} (\exists u) \ P(x, y, u)\}$$

es recursivamente enumerable.

**Ejercicio 3.–** Sea $P(x, y, u)$ un predicado r.e. Probar que el conjunto

$$A = \{(x, z) \ : \ (\forall y)_{\leq z} (\exists u) \ P(x, y, u)\}$$

es recursivamente enumerable.

**Ejercicio 4.–** Sea $f \in \mathcal{P}^{(1)}$. Probar que:

1. $A \subseteq \mathbb{N} \wedge A$ r.e. $\Longrightarrow f(A)$ r.e. y $f^{-1}(A)$ r.e.
2. $f$ total $\wedge \ A \subseteq \mathbb{N} \wedge A$ recursivo $\Longrightarrow f^{-1}(A)$ recursivo.

**Ejercicio 5.–** Sea $A \subseteq \mathbb{N}$. Probar que son equivalentes:

1. $A$ es r.e.
2. Existe $f \in \mathcal{P}$ (posiblemente parcial) tal que $\text{rang}(f) = A$.
3. Existe $f \in \mathcal{PR}$ tal que $\text{rang}(f) = A$.

**Ejercicio 6.–** Sea $A \subseteq \mathbb{N}$ tal que $A$ es infinito. Probar que son equivalentes:

1. $A$ es r.e.
2. Existe $f \in \mathcal{R}^{(1)}$ tal que $f$ es inyectiva y, además, $A = \text{rang}(f)$.

**Ejercicio 7.–** Sea $A \subseteq \mathbb{N}$ tal que $A \neq \emptyset$. Probar que son equivalentes:

1. $A$ es recursivo.
2. Existe $f \in \mathcal{R}^{(1)}$ tal que $\forall x \in \mathbb{N} \ (f(x) \leq f(x+1)) \wedge A = \text{rang}(f)$.

**Ejercicio 8.–** Sea $A \subseteq \mathbb{N}$ infinito y r.e. Probar que existe $B \subseteq A$ recursivo e infinito.

**Ejercicio 9.–** Sean $A, B \subseteq \mathbb{N}$ conjuntos r.e. Sean $f$ y $g$ funciones recursivas totales $n$–arias. Probar que el conjunto $C = \{\vec{x} \in \mathbb{N}^n : \ f(\vec{x}) \in A \vee g(\vec{x}) \in B\}$ es r.e.

(**Indicación:** Utilícese el teorema de la proyección).

**Ejercicio 10.–** En un ejercicio anterior se ha probado que la función

$$f(x) = \begin{cases} \varphi_x(x) + 1 & \text{si } \varphi_x(x) \downarrow \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

no es recursiva. Usando este hecho, probar que el conjunto

$$\mathcal{K} = \{e \ : \ \varphi_e(e) \downarrow\}$$

es recursivamente enumerable y **no** recursivo.

**Ejercicio 11.–** ¿Es cierto que toda función total $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ cuyo rango sea un conjunto finito es recursiva?

**Ejercicio 12.–** Sean $A, B \subseteq N$. Diremos que $A$ y $B$ son recursivamente isomorfos ($A \equiv B$) si existe $f \in R$ biyectiva tal que

$$\forall x \in \mathbb{N}\, [x \in A \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) \in B]$$

Probar que

1. Si $A$ y $B$ son recursivos, entonces $\quad A \equiv B \quad \Longleftrightarrow \quad card(A) = card(B)$
2. Ningún conjunto recursivo es recursivamente isomorfo a uno r.e.

**Ejercicio 13.–** Utilizando el teorema de la forma normal, probar que el conjunto

$$\mathcal{K}_0 = \{(x, y) \ : \ x \in W_y\}$$

es recursivamente enumerable.

**Ejercicio 14.–** Probar que los siguientes conjuntos son recursivamente enumerables:

- Dado $\mathtt{q} \in \mathtt{GCOMP}$, el conjunto: $A = \{x \ : \ \mathtt{q} \text{ para en un número impar de pasos sobre } x\}$
- $B = \{\langle \#(\mathtt{p}), x\rangle \ : \ [\![\mathtt{p}]\!](x) \text{ es par}\}$
- $C = \{\#(\mathtt{p}) \ : \ \text{El programa } \mathtt{p} \text{ devuelve 0 para algún dato de entrada}\}$
- $D = \{\langle \#(\mathtt{p}), \#(\mathtt{q})\rangle \ : \ [\![\mathtt{p}]\!](0)\downarrow \text{ y } [\![\mathtt{p}]\!](0) = [\![\mathtt{q}]\!](0)\}$

**Ejercicio 15.–** Sea $A \subseteq \mathbb{N}^{n+1}$ un conjunto r.e. Probar que existe una función recursiva, $f \in \mathcal{P}^{(n)}$ tal que $\text{dom}(f) = \{\vec{x} \in \mathbb{N}^n : \ \exists y\ [(\vec{x}, y) \in A]\}$, y verificando que

$$\forall \vec{x} \in \text{dom}(f)\ [(\vec{x}, f(\vec{x})) \in A]$$

*Indicación:* Utilizar el teorema de la proyección.

**Ejercicio 16.–** Utilizando el ejercicio anterior y el predicado $HALT(x, y)$, probar que existe una función recursiva $f$ que selecciona un elemento de cada conjunto r.e. (no vacío), es decir,

$$\forall e \in \mathbb{N}[W_e \neq \emptyset \quad \Longrightarrow \quad f(e) \in W_e]$$

**Ejercicio 17.–** Dado un predicado $P : \mathbb{N}^{n+1} \to \{0,1\}$ se define el predicado $n$–ario $\forall y P(\vec{x}, y)$ como:

$$\forall y P(\vec{x}, y) = \begin{cases} 1 & \text{si para todo } y \in \mathbb{N} \text{ se tiene que } P(\vec{x}, y) = 1 \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

Probar que la clase de los predicados recursivos (y de los r.e.) no es cerrada bajo este tipo de cuantificación (*Indicación*: Considerar el conjunto $\mathbb{N} \setminus \mathcal{K}$).

**Ejercicio 18.–** Una función $f : \mathbb{N} - \to N$ se dice límite de una función $F : \mathbb{N}^2 - \to \mathbb{N}$ si $f$ es el límite de la sucesión $F_n(x) = F(x, n)$, es decir,

$$\forall x\ \exists n\ \forall m \geq n[F(x, m) \simeq f(x)]$$

1. ¿Existe límite de la función universal $\mathcal{U}_1$?

2. Demostrar que para toda función computable $f$ existe $g \in \mathcal{PR}$ inyectiva tal que el límite de $F(n, x) = \mathcal{U}_1(x, g(n))$ es $f$

3. ¿Existe $F(x, y)$ computable que posea límite pero que éste no sea recursivo? Razónese la respuesta