Ciencias de la Computación (2021-22)

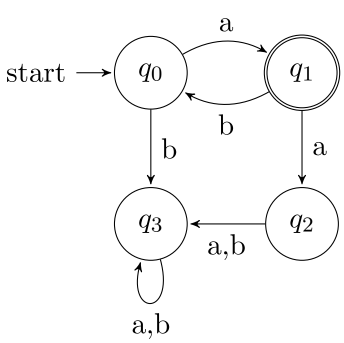
Autómatas, lenguajes y gramáticas

Ejercicio 1.– Para cada uno de los siguientes lenguajes sobre el alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$, construye un autómata finito determinista que lo acepte:

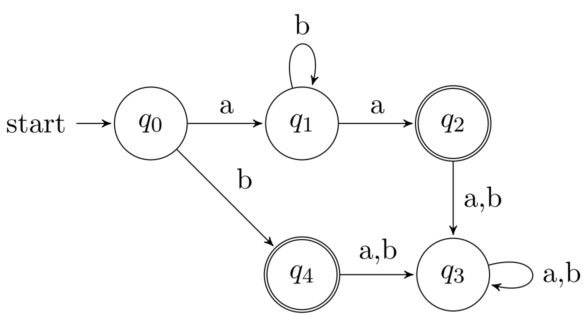
1. $L_1 = \{w \in \Sigma^* :$ cada a en w está seguida o precedida por una $b\}$.
2. $L_2 = \{w \in \Sigma^* :$ w contiene $abab$ como subpalabra$\}$.
3. $L_3 = \{w \in \Sigma^* :$ w contiene un número par de a's y un número impar de b's$\}$.
4. $L_3 = \{w \in \Sigma^* :$ w contiene ab y ba como subpalabras$\}$.

Ejercicio 2.– Describe el lenguaje aceptado por cada uno de los siguientes autómatas.

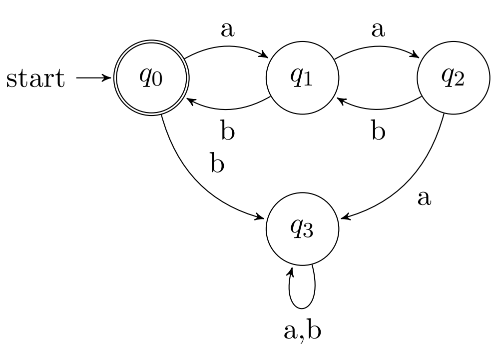
M_1:



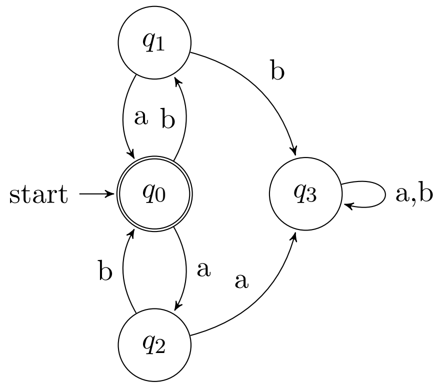
M_2:



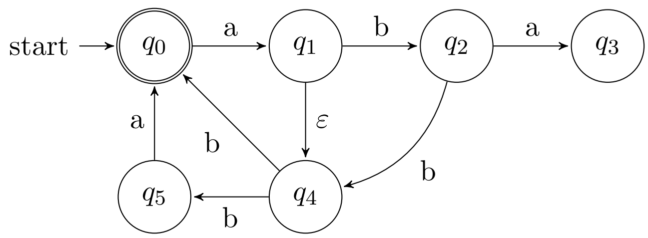
M_3:



$M4$:



Ejercicio 3.– ¿Cuáles de las siguientes palabras son aceptadas por el siguiente ε–AFND?



(1) aa, (2) aba, (3) abb, (4) $abab$.

Ejercicio 4.– Dadas dos expresiones regulares $\mathbf{e}$ y $\mathbf{d}$ sobre un alfabeto Σ, escribimos $\mathbf{e} \equiv \mathbf{d}$ para expresar que $L(\mathbf{e}) = L(\mathbf{d})$. Pruébense las siguientes identidades:

1. $\mathbf{e} + \mathbf{e} \equiv \mathbf{e}$.
2. $(\mathbf{e} \cdot \mathbf{d}) + (\mathbf{e} \cdot \mathbf{c}) \equiv \mathbf{e} \cdot (\mathbf{d} + \mathbf{c})$.
3. $\mathbf{e}^* \cdot \mathbf{e}^* \equiv \mathbf{e}^*$.
4. $(\mathbf{e}^*)^* \equiv \mathbf{e}^*$.
5. $(\mathbf{e} + \mathbf{d})^* \equiv (\mathbf{e}^* \cdot \mathbf{d}^*)^* \equiv (\mathbf{e}^* + \mathbf{d}^*)^*$.

Ejercicio 5.– Sea $L = \{x \in \{a, b\}^* : \; x \neq \varepsilon$ y bb no es una subpalabra de $x\}$.

1. Probar que L es regular construyendo un AFD M tal que $L(M) = L$.
2. Encontrar una expresión regular $\mathbf{e}$ tal que $L(\mathbf{e}) = L$.

Ejercicio 6.– Para cada una de las siguientes expresiones regulares construir un ε–AFND que acepte el lenguaje generado por ella:

1. $(ab)^*(ba)^* + aa^*$.
2. $((ab + aab)^*a^*)^*$.

3. $((a^*b * a^*)^*b)^*$.
4. $(ba + b)^* + (bb + a)^*$.

Ejercicio 7.– Sea $L = L(((aa) + (aaa))^*)$. Encontrar un AFD que acepte L.

Ejercicio 8.– Condieremos el alfabeto

$$\Sigma_3 = \{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \}$$

formado por todas la columnas de 0's y 1's de altura 3. Una palabra sobre Σ_3 puede identificarse con una matriz de 3 filas formada por 0's y 1's, cada una de las cuales puede considerarse un número natural en notación binaria. Probar que el lenguaje

$$B = \{w \in \Sigma_3^* : \text{ la fila inferior es la suma de las dos filas superiores}\}$$

es regular.

Ejercicio 9.– Consideremos el alfabeto

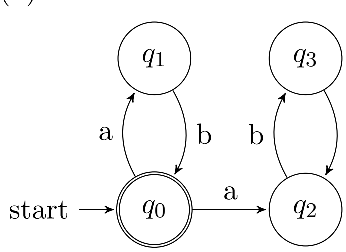
$$\Sigma_2 = \{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \}$$

formado por todas la columnas de 0's y 1's de altura 2. Una palabra sobre Σ_2 puede identificarse con una matriz de 2 filas formada por 0's y 1's, cada una de las cuales puede considerarse un número natural en notación binaria. Probar que los siguientes lenguajes son regulares:

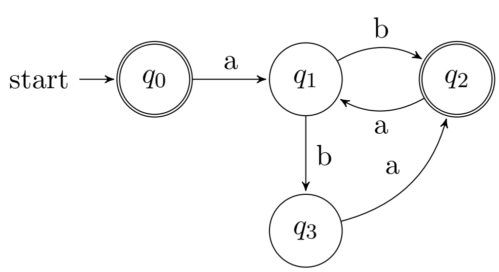
1. $C = \{w \in \Sigma_2^* : \text{ la fila inferior es la superior multiplicada por 3}\}$.
2. $D = \{w \in \Sigma_2^* : \text{ la fila inferior es menor que la superior}\}$.

Ejercicio 10.– Escribir expresiones regulares para los lenguajes aceptados por los siguientes autómatas:

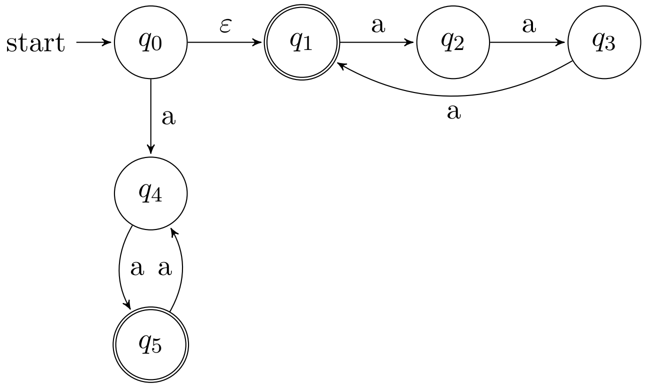
(a):



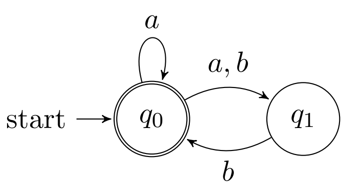
(b):



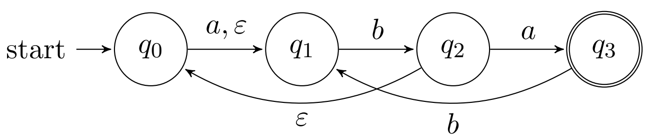
(c):



Ejercicio 11.– Construir un AFD equivalente al siguiente AFND:



Ejercicio 12.– Construir un AFD equivalente al siguiente AFND:



Ejercicio 13.– Consideremos la gramática regular:

$$\begin{array}{lcl} S & \to & xN \\ S & \to & x \\ N & \to & yM \\ N & \to & y \\ M & \to & zN \\ M & \to & z \end{array}$$

donde S es el símbolo inicial, $\{x, y, z\}$ son terminales y $\{S, N, M\}$ variables. Se pide:

1. Construir un ε–AFND que acepte el lenguaje generado por Γ.
2. Encontrar una expresión regular que genere el lenguaje generado por Γ.

Ejercicio 14.– La siguiente gramática genera el lenguaje $\underline{0}^*\underline{1}(\underline{0}+\underline{1})^*$:

$$\begin{array}{lcl} S & \to & A1B \\ A & \to & 0A \\ A & \to & \varepsilon \\ B & \to & \varepsilon \\ B & \to & 0B \\ B & \to & 1B \end{array}$$

siendo S, A, B variables, $0, 1$ terminales y S el símbolo inicial. Obtener derivaciones de las siguientes palabras:

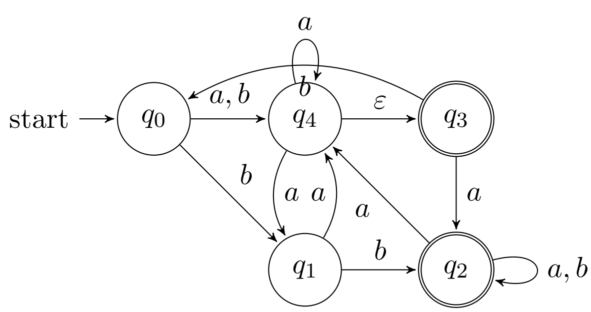
$$00101, \quad 1001, \quad 00011$$

Ejercicio 15.– Sea G la gramática regular que tiene como producciones:

$$\{S \to abA,\ S \to B,\ S \to baB,\ S \to \varepsilon,\ A \to bS,\ B \to aS,\ A \to b\}$$

siendo S el símbolo inicial, a, b terminales y A, B variables. Construir un ε–AFND que acepte el lenguaje generado por G.

Ejercicio 16.– Describir una gramática regular que genere el lenguaje aceptado por el siguiente autómata:



Ejercicio 17.– Probar que los siguientes lenguajes sobre el alfabeto $\Sigma = \{0, 1\}$ no son regulares:

- $L = \{x \in \Sigma^* : \ \ x$ contiene el mismo numero de 0's y de 1's$\}$
- $L = \{x \in \Sigma^* : \ |x|$ es primo$\}$.
- $L = \{0^p : p$ primo$\}$.
- $L = \{0^n 1^m : \ n \neq m\}$.
- $L = \{0^n 1^{2n} : \ n \neq 0\}$.
- $L = \{0^n 1^m : \ 0 < n \leq m\}$.

Ejercicio 18.– Sea L_1 y L_2 dos lenguajes sobre un alfabeto Σ. Definimos el cociente por la derecha de L_1 y L_2 como el lenguaje:

$$L_1/L_2 = \{x \in \Sigma^* : \text{ existe } y \in L_2 \text{ tal que } xy \in L_1\}$$

Probar que si L_1 y L_2 son regulares entonces L_1/L_2 también es regular.

Ejercicio 19.– Probar que el lenguaje sobre el alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$,

$$L = \{a^p b^m : \ p \text{ es primo y } m > 0\} + \{a^n : \ n \geq 0\}$$

no es regular.