

Tema 7: Reducibilidad

Dpto. Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial
UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Ciencias de la Computación
(4^o curso, Grado en Matemáticas)
Curso 2021–22

El teorema de Rice

Aplicaciones del Teorema de Rice

Predicados no extensionales: El método diagonal

Relativización

Reducibilidades

Contenido

El teorema de Rice

Aplicaciones del
Teorema de Rice

Predicados no
extensionales: El
método diagonal

Relativización

Reducibilidades

El teorema de Rice

A continuación estudiaremos otros problemas sobre programación; concretamente, el problema de decidir algorítmicamente si la función calculada por un programa satisface una propiedad dada.

Definición: Sea $\Gamma \subseteq \mathcal{P}^{(n)}$ una clase de funciones recursivas. Se define el **conjunto de índices asociado a Γ** , I_Γ , como

$$I_\Gamma = \{e \in \mathbb{N} : \varphi_e^{(n)} \in \Gamma\}$$

Es decir, $I_\Gamma = \{\#(p) : \llbracket p \rrbracket^{(n)} \in \Gamma\}$

Teorema de Rice:

Si $\Gamma \subseteq \mathcal{P}^{(1)}$ tal que $\Gamma \neq \emptyset, \mathcal{P}^{(1)}$, entonces I_Γ **no** es recursivo.

Contenido

El teorema de Rice

Aplicaciones del
Teorema de Rice

Predicados no
extensionales: El
método diagonal

Relativización

Reducibilidades

m -reducibilidad

Para demostrar el teorema de Rice, utilizaremos una noción de reducibilidad entre conjuntos:

- ▶ Dados $A, B \subseteq \mathbb{N}$, diremos que A es m -reducible a B , $A \leq_m B$, si existe una función $f \in \mathcal{R}$ tal que

$$\text{Para todo } x \in \mathbb{N}, \quad x \in A \iff f(x) \in B$$

- ▶ **Observaciones:**

- ▶ Si $A \leq_m B$ y B es recursivo, entonces A es recursivo (ya que $C_A(x) = C_B(f(x))$).
 - ▶ Por tanto, si $A \leq_m B$ y A no es recursivo, entonces B no es recursivo.
- ▶ Como consecuencia, dado $B \subseteq \mathbb{N}$,

Si $\mathcal{K} \leq_m B$, entonces B NO es recursivo.

Contenido

El teorema de Rice

Aplicaciones del
Teorema de Rice

Predicados no
extensionales: El
método diagonal

Relativización

Reducibilidades

Demostración del teorema de Rice

Sea h la función vacía (*siempre indefinido*), $f \in \Gamma$ y $g \notin \Gamma$.

- Caso $h \notin \Gamma$: Sea q el código del programa

$$\begin{aligned} Z &\leftarrow \mathcal{U}(X_2, X_2) \\ Y &\leftarrow f(X_1) \end{aligned}$$

Dado $i \in \mathbb{N}$, por el teorema s - n - m

$$\varphi_q(x_1, i) = \varphi_{S_1^1(q, i)}$$

El programa de código $S_1^1(q, i)$ es

$$\begin{aligned} X_2 &\leftarrow i \\ Z &\leftarrow \mathcal{U}(X_2, X_2) \\ Y &\leftarrow f(X_1) \end{aligned}$$

Por tanto, se verifica que

$$\begin{aligned} i \in \mathcal{K} &\implies \mathcal{U}(i, i) \downarrow && \implies \varphi_{S_1^1(q, i)}(x_1) = f(x_1) \\ &\implies S_1^1(q, i) \in I_\Gamma \end{aligned}$$

Contenido

El teorema de Rice

Aplicaciones del
Teorema de Rice

Predicados no
extensionales: El
método diagonal

Relativización

Reducibilidades

Demostración del teorema de Rice (II)

$$\begin{aligned}
 i \notin \mathcal{K} &\implies \mathcal{U}(i, i) \uparrow \implies \forall x [\varphi_{S_1^1(q, i)}(x) \uparrow] \\
 &\implies \varphi_{S_1^1(q, i)} = h \implies S_1^1(q, i) \notin I_\Gamma
 \end{aligned}$$

Luego $i \in \mathcal{K} \iff S_1^1(q, i) \in I_\Gamma$

Hemos probado que $\mathcal{K} \leq_m I_\Gamma$, luego si I_Γ fuese recursivo, $\mathcal{K}$ lo sería: $C_{\mathcal{K}}(i) = C_{I_\Gamma}(S_1^1(q, i))$ y no lo es.

- $h \in \Gamma$: Se razona como en el caso anterior, tomando g y $\bar{\Gamma} = \mathcal{P} \setminus \Gamma$, llegando a la conclusión de que

$$\mathbb{N} \setminus \mathcal{K} \leq_m I_{\bar{\Gamma}}$$

Luego $I_{\bar{\Gamma}}$ no es recursivo (ya que $\mathbb{N} \setminus \mathcal{K}$ no es recursivo), pero como $I_{\bar{\Gamma}} = \mathbb{N} \setminus I_\Gamma$, deducimos que I_Γ no es recursivo.

El teorema de Rice se generaliza a $\Gamma \subseteq \mathcal{P}^n$, $n \geq 1$

Contenido

El teorema de Rice

Aplicaciones del
Teorema de RicePredicados no
extensionales: El
método diagonal

Relativización

Reducibilidades

Ejemplos de aplicación del teorema de Rice

Corolario: El conjunto

$$A = \{e : \varphi_e \text{ es total}\}$$

no es recursivo

- **Demostración** (Indicación): Tómese $\Gamma = \mathcal{R} \neq \emptyset, \mathcal{P}$.
Como $I_\Gamma = A$, del teorema de Rice se deduce que A no es recursivo.

Corolario: Sea $f \in \mathcal{P}^{(1)}$. El conjunto

$$B = \{e : \varphi_e = f\}$$

no es recursivo

- **Demostración** (Indicación): Tómese $\Gamma = \{f\} \neq \emptyset, \mathcal{P}$.
Como $I_\Gamma = B$, del teorema de Rice se deduce que A no es recursivo.

Contenido

El teorema de Rice

Aplicaciones del
Teorema de Rice

Predicados no
extensionales: El
método diagonal

Relativización

Reducibilidades

Predicados extensionales

El problema asociado al conjunto de índices de $\Gamma \subseteq \mathcal{P}$ es:

- ▶ Entrada: $e \in \mathbb{N}$
- ▶ Salida: Sí, si $\varphi_e \in \Gamma$. No, en otro caso.

Los conjuntos de índices definen predicados sobre programas,

$$P : \text{GOTO}_P \rightarrow \{0, 1\}$$

o problemas sobre programas:

- ▶ Entrada: $p \in \text{GOTO}_P$
- ▶ Salida: 1 (Sí), si $\#(p) \in I_\Gamma$; 0 (No), en otro caso.

Sólo los **extensionales** provienen de un conjunto de índices

Definición: Un predicado $P : \text{GOTO}_P \rightarrow \{0, 1\}$ se dice **n -extensional** si se verifica la siguiente propiedad

$$\llbracket p \rrbracket^{(n)} = \llbracket q \rrbracket^{(n)} \text{ y } P(p) = 1, \text{ entonces } P(q) = 1$$

Contenido

El teorema de Rice

Aplicaciones del
Teorema de Rice

Predicados no
extensionales: El
método diagonal

Relativización

Reducibilidades

Predicados extensionales como conjuntos de índices

Lema Sea $n > 0$.

- Si P es n -extensional, entonces existe $\Gamma \subseteq \mathcal{P}^{(n)}$ tal que

$$I_\Gamma = \{\#(p) : P(p) = 1\}$$

Además, P es recursivo sii I_Γ es recursivo.

- Dada $\Gamma \subseteq \mathcal{P}^{(n)}$, existe un predicado n -extensional P tal que

$$P(p) = 1 \iff \llbracket p \rrbracket^{(n)} \in \Gamma$$

La demostración es trivial

Contenido

El teorema de Rice

Aplicaciones del
Teorema de Rice

Predicados no
extensionales: El
método diagonal

Relativización

Reducibilidades

Ejemplo

El predicado

$$\text{TOT}(p) \equiv \llbracket p \rrbracket^{(1)} \text{ es total}$$

es extensional.

El problema asociado a TOT es:

- ▶ Entrada: $p \in \text{GOTO}_p$
- ▶ Salida:
 - ▶ 1 (*sí*), si p para siempre (sobre entradas de $\mathbb{N}$).
 - ▶ 0 (*no*), en otro caso.

De este modo, nos podemos plantear si el problema anterior es resoluble algorítmicamente, planteándonos la cuestión:

¿Es el conjunto $\{e : \varphi_e \text{ es total}\}$ recursivo?

que es el conjunto de índices asociado a $\mathcal{R}^{(1)}$.

Contenido

El teorema de Rice

Aplicaciones del
Teorema de Rice

Predicados no
extensionales: El
método diagonal

Relativización

Reducibilidades

Aplicaciones del resultado (I)

Corolario: Si $f \in \mathcal{P}^{(1)}$, el problema de la corrección para f ,

- ▶ Entrada: $p \in \text{GOTO}_p$
- ▶ Salida: Sí, si $\llbracket p \rrbracket = f$. No, en otro caso.

No es resoluble algorítmicamente

Demostración: El predicado es

$$\text{CORRECCION}_f(p) \equiv \llbracket p \rrbracket = f$$

Sea $\Gamma = \{f\} \neq \emptyset, \mathcal{P}$. Entonces

$$I_\Gamma = \{\#(p) : \llbracket p \rrbracket = f\}$$

no es recursivo, y es el conjunto de índices asociado a CORRECCION_f .

Contenido

El teorema de Rice

Aplicaciones del
Teorema de Rice

Predicados no
extensionales: El
método diagonal

Relativización

Reducibilidades

Aplicaciones del resultado (II)

Corolario: El problema de la equivalencia

- ▶ Entrada: $p, q \in \text{GOTO}_P$
- ▶ Salida: 1 (Sí), si $\llbracket p \rrbracket = \llbracket q \rrbracket$; 0 (No) en otro caso.

No es decidible.

Demostración: Si el conjunto

$$A = \{(e_1, e_2) \in \mathbb{N}^2 : \varphi_{e_1} = \varphi_{e_2}\}$$

fuese recursivo, si tomamos $f \in \mathcal{P}$ y e_0 tal que $\varphi_{e_0} = f$, entonces

$$\varphi_e = f \iff (e_0, e) \in A$$

y, por tanto, el problema de la corrección sería recursivo.
Contradicción.

Contenido

El teorema de Rice

Aplicaciones del
Teorema de Rice

Predicados no
extensionales: El
método diagonal

Relativización

Reducibilidades

Ejemplos de predicados no extensionales

Problema: Diremos que p *reconoce su longitud* si

$$\forall x \in \mathbb{N} \llbracket p \rrbracket(\#(p)) = |p|$$

¿**Es decidable** el problema de reconocer estos programas?;

- ▶ Entrada: $p \in \text{GOTO}_p$
- ▶ Salida: 1, si p reconoce su longitud. 0 en otro caso

Un código e codifica un tal programa si $\varphi_e(e) = \text{Lt}(e + 1)$.

El predicado **no** es extensional, pues el programa p

$$Y \leftarrow Y + 1$$

reconoce su longitud, pero el programa $q \begin{cases} Y \leftarrow Y + 1 \\ X \leftarrow X + 1 \end{cases}$ no

reconoce su longitud, $|q|$, y $\llbracket p \rrbracket = \llbracket q \rrbracket$. Por tanto, **no** podemos aplicar el teorema de Rice.

Contenido

El teorema de Rice

Aplicaciones del
Teorema de Rice

Predicados no
extensionales: El
método diagonal

Relativización

Reducibilidades

Aplicando el método diagonal

Supongamos que fuese recursivo. Entonces sería recursivo

$$A = \{e : \varphi_e(e) = \text{Lt}(e + 1)\}$$

En este caso definimos la función:

	0	1	2	...
φ_0	$\varphi_0(0)$	$\varphi_0(1)$	$\varphi_0(2)$	...
φ_1	$\varphi_1(0)$	$\varphi_1(1)$	$\varphi_1(2)$	...
φ_2	$\varphi_2(0)$	$\varphi_2(1)$	$\varphi_2(2)$	...
φ_3	$\varphi_3(0)$	$\varphi_3(1)$	$\varphi_3(2)$	...
$\vdots$				
f	δ_0	δ_1	δ_2	...

$$f(x) = \begin{cases} \uparrow & x \in A \\ \text{Lt}(x + 1) & x \notin A \end{cases}$$

Contenido

El teorema de Rice

Aplicaciones del
Teorema de Rice

Predicados no
extensionales: El
método diagonal

Relativización

Reducibilidades

Aplicando el método diagonal (II)

Es computable, pues su grafo es r.e. (de hecho, es recursivo):

$$f(x) = y \iff x \notin A \wedge \text{Lt}(x) = y$$

por tanto, existe $e \in N$ tal que $\varphi_e = f$.

- ▶ Si $e \in A$, entonces $\varphi_e(e) = \text{Lt}(e + 1)$, pero $f(e) \uparrow$. Contradicción.
- ▶ Si $e \notin A$, entonces $\varphi_e(e) \neq \text{Lt}(e + 1)$, y sin embargo $f(e) = \text{Lt}(e + 1)$. Contradicción

Contenido

El teorema de Rice

Aplicaciones del
Teorema de Rice

Predicados no
extensionales: El
método diagonal

Relativización

Reducibilidades

Programas con oráculos

- ▶ El lenguaje GOTO con oráculo, $GOTO^o$, se obtiene a partir de GOTO eliminando las instrucciones de la forma $V \leftarrow V$ y añadiendo una instrucción de la forma $V \leftarrow O(V)$ para cada variable V .
- ▶ Un programa de $GOTO^o$ es una sucesión instrucciones (con o sin etiquetas) cuya última instrucción no es $Y \leftarrow O(Y)$.
- ▶ Las nociones de **estado**, **descripción instantánea** y descripción instantánea **terminal** se definen como en el caso de GOTO.
- ▶ Sin embargo, las computaciones de un programa con oráculos sólo pueden describirse de manera relativa a una función dada, que nos sirva para interpretar las instrucciones del tipo $V \leftarrow O(V)$.

Contenido

El teorema de Rice

Aplicaciones del
Teorema de Rice

Predicados no
extensionales: El
método diagonal

Relativización

Reducibilidades

Computación relativa

- ▶ Sea $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ una función **total** cualquiera.
- ▶ Dado un programa P de GOTO^o y dos descripciones instantáneas $s_1 = (i, \sigma)$, $s_2 = (j, \tau)$ de P . Si s_1 no es terminal decimos que s_2 es g -**sucesora** de s_1 si se verifican la mismas condiciones que para un programa de GOTO excepto cuando la i -ésima instrucción de P es $V \leftarrow O(V)$. En este caso,
 - ▶ $j = i + 1$,
 - ▶ $\tau(W) = \sigma(W)$, para toda variable W distinta de V , y
 - ▶ $\tau(V) = g(\sigma(V))$.
- ▶ La función calculada por un programa P relativa a g , es la función $\llbracket P \rrbracket_g^{(n)} : \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$, definida a partir de P como en el caso de los programas GOTO.
- ▶ Defimos que $f : \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$ es g -**computable** si existe un programa P de GOTO^o tal que $f = \llbracket P \rrbracket_g^{(n)}$.

Contenido

El teorema de Rice

Aplicaciones del
Teorema de Rice

Predicados no
extensionales: El
método diagonal

Relativización

Reducibilidades

Computación relativa (II)

- ▶ Si partimos de una función $g : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ decimos que f es g -computable si es $\bar{g}$ -computable, siendo $\bar{g} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ la función definida por:

$$\bar{g}(x) = g((x)_1, \dots, (x)_k)$$

- ▶ Dado un conjunto $A \subseteq \mathbb{N}^n$, decimos que una función f es A -computable si es C_A -computable.
- ▶ Un conjunto B es A -recursivo si la función característica C_B es A -recursiva.

Contenido

El teorema de Rice

Aplicaciones del
Teorema de Rice

Predicados no
extensionales: El
método diagonal

Relativización

Reducibilidades

Relativización

Muchos de los resultados que hemos probado para las funciones GOTO-computables se extienden a las funciones g -computables, para cualquier función total $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Por ejemplo:

- ▶ La clase de las funciones g -computables es la menor clase de funciones que contiene a las funciones básicas junto con g y es cerrada bajo composición, recursión primitiva y μ -recursión.
- ▶ Hay versiones relativizadas de los teoremas de la función universal y de la forma normal y del teorema de parametrización (s-n-m).

Contenido

El teorema de Rice

Aplicaciones del Teorema de Rice

Predicados no extensionales: El método diagonal

Relativización

Reducibilidades

Reducibilidades

Dados $A, B \subseteq \mathbb{N}$, decimos que:

- ▶ A es **m -reducible** a B , $A \leq_m B$, si existe $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ recursiva tal que

$$\forall x \in \mathbb{N}, \quad x \in A \iff f(x) \in B$$

- ▶ A es **1-reducible** a B , $A \leq_1 B$, si existe $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ **recursiva e inyectiva** tal que

$$\forall x \in \mathbb{N}, \quad x \in A \iff f(x) \in B$$

- ▶ Dados $A, B \subseteq \mathbb{N}$, decimos que A es **Turing-reducible** a B , $A \leq_T B$, A es B -recursivo, es decir, C_A es C_B -computable.
- ▶ Las tres relaciones $\leq_m$, $\leq_1$ y $\leq_T$ son reflexivas y transitivas.
- ▶ Si $A \leq_1 B$ entonces $A \leq_m B$.
- ▶ Si $A \leq_m B$ entonces $A \leq_T B$.

Contenido

El teorema de Rice

Aplicaciones del
Teorema de Rice

Predicados no
extensionales: El
método diagonal

Relativización

Reducibilidades

Conjuntos completos

Denotemos por $\leq_Q$ a cualquiera de las reducibilidades anteriores y sea $\mathcal{C}$ una clase de subconjuntos de $\mathbb{N}$.

- Decimos que $\mathcal{C}$ es Q -cerrada si para todo $A, B \in \mathcal{C}$

$$A \leq_Q B \text{ y } B \in \mathcal{C} \implies A \in \mathcal{C}$$

- Decimos que $A \subseteq \mathbb{N}$ es Q -completo para $\mathcal{C}$ si $A \in \mathcal{C}$ y para todo $B \in \mathcal{C}$, $B \leq_Q A$.
- La clase de los conjuntos r.e. es m -cerrada.
- $\mathcal{K} = \{x \in \mathbb{N} : \varphi_x(x) \downarrow\}$ es 1-completo para la clase de los conjuntos recursivamente enumerables.

Contenido

El teorema de Rice

Aplicaciones del
Teorema de Rice

Predicados no
extensionales: El
método diagonal

Relativización

Reducibilidades