

Sintaxis y semántica de la lógica proposicional

Francisco J. Martín Mateos

Dpto. Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial
Universidad de Sevilla

- Objetivos de la lógica
 - Formalización del lenguaje natural
 - Desarrollar métodos de razonamiento independientes del contexto
- Sistemas lógicos
 - Lógica proposicional
 - Lógica de primer orden
 - Lógica de orden superior
 - Lógicas modales
 - Lógicas descriptivas
- Aplicaciones de la lógica
 - Fundamento de lenguajes de programación
 - Verificación y síntesis automática de programas
 - Representación del conocimiento y razonamiento
 - Modelización y razonamiento sobre sistemas

- Las lógicas clásicas son sistemas formales que cumplen:
 - *Principio de tercio excluso*: Cualquier afirmación es verdadera o falsa.
 - *Principio de no contradicción*: No hay afirmaciones que sean verdaderas y falsas al mismo tiempo.
 - *Principio de explosión*: De una afirmación contradictoria se puede deducir cualquier cosa.
 - *Principio de monotonía de la implicación*: Las hipótesis de cualquier hecho derivado pueden ampliarse con supuestos adicionales.
- Ejemplos:
 - **Lógica proposicional**
 - Lógica de primer orden

- Argumentaciones

- Si el tren llega a las 7 y no hay taxis en la estación, entonces Juan llegará tarde a la reunión. Juan no ha llegado tarde a la reunión. El tren llegó a las 7. Por tanto, había taxis en la estación.
- Si hay corriente y la lámpara no está fundida, entonces está encendida. La lámpara no está encendida. Hay corriente. Por tanto, la lámpara está fundida.

- Formalización
 - Primer caso
 - $p \equiv$ “el tren llega a las 7”
 - $q \equiv$ “hay taxis en la estación”
 - $r \equiv$ “Juan llegará tarde a la reunión”
 - Segundo caso
 - $p \equiv$ “hay corriente”
 - $q \equiv$ “la lámpara está fundida”
 - $r \equiv$ “la lámpara está encendida”
- En ambos casos
 - Argumentación: Si p y no q , entonces r . No r . p . Por tanto, q .
 - Formulación: $\{p \wedge \neg q \rightarrow r, \neg r, p\} \models q$

Sintaxis de la lógica proposicional

- Alfabeto proposicional
 - Variables proposicionales: $\mathbf{p, q, r, \dots, p_1, p_2, \dots}$
 - Conectivas lógicas
 - Conectivas monarias:
negación, $\neg$
 - Conectivas binarias:
conjunción, $\wedge$
disyunción, $\vee$
condicional, $\rightarrow$
bicondicional, $\leftrightarrow$
 - Símbolos adicionales: (y)

Sintaxis de la lógica proposicional

- Fórmulas proposicionales:
 - **Fórmulas atómicas:** Variables proposicionales
 - Si **F** y **G** son fórmulas entonces también son fórmulas
 - Negación: $\neg F$
 - Conjunción: $(F \wedge G)$
 - Disyunción: $(F \vee G)$
 - Condicional: $(F \rightarrow G)$
 - Bicondicional: $(F \leftrightarrow G)$
- Ejemplos
 - Son fórmulas: **p**, $(p \vee \neg q)$, $((p \wedge q) \rightarrow (q \vee p))$
 - No es fórmula: $(p \wedge \vee q)$

Sintaxis de la lógica proposicional

- Notación
 - Variables proposicionales: **p, q, r**
 - Conjunto de todas las variables proposicionales: **VP**
 - Fórmulas proposicionales: **F, G, H**
 - Conjunto de todas las fórmulas proposicionales: **Prop**
 - Una conectiva binaria cualquiera: **★**
- Los paréntesis se eliminan cuando no hay duda sobre el uso de las conectivas lógicas.
 - Se eliminan los paréntesis externos:
 - **$F \vee G$** en lugar de **$(F \vee G)$** .
 - Se usa una precedencia entre las conectivas: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$.
 - **$F \wedge G \rightarrow \neg F \vee G$** en lugar de **$(F \wedge G) \rightarrow (\neg F \vee G)$**
 - Asociación por la derecha de las conectivas:
 - **$F \vee G \vee H$** en lugar de **$F \vee (G \vee H)$**

Sintaxis de la lógica proposicional

- Definiciones recursivas
 - Comportamiento para las variables proposicionales
 - Comportamiento para las fórmulas dependiendo del tipo de conectiva y usando el comportamiento en las componentes
- Número de variables proposicionales

$$\text{nvp}(\mathbf{F}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{F} \text{ es atómica} \\ \text{nvp}(\mathbf{G}) & \text{si } \mathbf{F} = \neg \mathbf{G} \\ \text{nvp}(\mathbf{G}) + \text{nvp}(\mathbf{H}) & \text{si } \mathbf{F} = \mathbf{G} \star \mathbf{H} \end{cases}$$

- $\text{nvp}(\mathbf{p}) = 1$
- $\text{nvp}(\neg \mathbf{q}) = 1$
- $\text{nvp}(\neg \mathbf{q} \vee \mathbf{p}) = 2$
- $\text{nvp}(\mathbf{p} \rightarrow \neg \mathbf{q} \vee \mathbf{p}) = 3$

Sintaxis de la lógica proposicional

- Definiciones recursivas
 - Comportamiento para las variables proposicionales
 - Comportamiento para las fórmulas dependiendo del tipo de conectiva y usando el comportamiento en las componentes
- Número de conectivas binarias

$$\text{ncb}(\mathbf{F}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathbf{F} \text{ es atómica} \\ \text{ncb}(\mathbf{G}) & \text{si } \mathbf{F} = \neg \mathbf{G} \\ 1 + \text{ncb}(\mathbf{G}) + \text{ncb}(\mathbf{H}) & \text{si } \mathbf{F} = \mathbf{G} \star \mathbf{H} \end{cases}$$

- $\text{ncb}(\mathbf{p}) = 0$
- $\text{ncb}(\neg \mathbf{q}) = 0$
- $\text{ncb}(\neg \mathbf{q} \vee \mathbf{p}) = 1$
- $\text{ncb}(\mathbf{p} \rightarrow \neg \mathbf{q} \vee \mathbf{p}) = 2$

Sintaxis de la lógica proposicional

- Definiciones recursivas
 - Comportamiento para las variables proposicionales
 - Comportamiento para las fórmulas dependiendo del tipo de conectiva y usando el comportamiento en las componentes
- Conjunto de **subfórmulas**

$$\text{subf}(F) = \begin{cases} \{F\} & \text{si } F \text{ es atómica} \\ \{\neg G\} \cup \text{subf}(G) & \text{si } F = \neg G \\ \{G \star H\} \cup \text{subf}(G) \cup \text{subf}(H) & \text{si } F = G \star H \end{cases}$$

- $\text{subf}(p) = \{p\}$
- $\text{subf}(\neg q) = \{\neg q, q\}$
- $\text{subf}(\neg q \vee p) = \{\neg q \vee p, \neg q, q, p\}$
- $\text{subf}(p \rightarrow \neg q \vee p) = \{p \rightarrow \neg q \vee p, p, \neg q \vee p, \neg q, q, p\}$

- Principio de inducción: Si $\mathcal{P}$ es una propiedad sobre las fórmulas que verifica
 - Todas las fórmulas atómicas cumplen la propiedad $\mathcal{P}$
 - Si $\mathbf{F}$ cumple la propiedad $\mathcal{P}$ entonces $\neg\mathbf{F}$ también la cumple
 - Si $\mathbf{F}$ y $\mathbf{G}$ cumplen la propiedad $\mathcal{P}$ entonces $\mathbf{F} \star \mathbf{G}$ también la cumpleEntonces cualquier fórmula proposicional cumple la propiedad $\mathcal{P}$

Sintaxis de la lógica proposicional

- El número de variables proposicionales es uno más que el número de conectivas binarias: $\mathbf{nvp(F) = 1 + ncb(F)}$
 - Caso base:** Si $\mathbf{F}$ es atómica entonces

$$\mathbf{nvp(F) = 1 = 1 + 0 = 1 + ncb(F)}$$

- Caso de inducción 1:** Supongamos que $\mathbf{nvp(F) = 1 + ncb(F)}$ (**hipótesis de inducción**), entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{nvp(\neg F)} &= \mathbf{nvp(F)} && \text{def. de } \mathbf{nvp} \\ &= \mathbf{1 + ncb(F)} && \text{hip. de inducción} \\ &= \mathbf{1 + ncb(\neg F)} && \text{def. de } \mathbf{ncb}\end{aligned}$$

- Caso de inducción 2:** Supongamos que $\mathbf{nvp(F) = 1 + ncb(F)}$ y $\mathbf{nvp(G) = 1 + ncb(G)}$ (**hipótesis de inducción**), entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{nvp(F \star G)} &= \mathbf{nvp(F) + nvp(G)} && \text{def. de } \mathbf{nvp} \\ &= \mathbf{1 + ncb(F) + 1 + ncb(G)} && \text{hip. de inducción} \\ &= \mathbf{1 + ncb(F \star G)} && \text{def. de } \mathbf{ncb}\end{aligned}$$

Semántica de la lógica proposicional

- Valores de verdad: verdadero ($\top$ o **1**) y falso ($\perp$ o **0**)
 - El conjunto de los valores de verdad es $\mathbb{B}$
- Funciones de verdad asociadas a las conectivas:

$$H_{\neg}(i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 0 \\ 0 & \text{si } i = 1 \end{cases}$$

$$H_{\wedge}(i, j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j = 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$H_{\vee}(i, j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j = 0 \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$H_{\rightarrow}(i, j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i = 1 \text{ y } j = 0 \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$H_{\leftrightarrow}(i, j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Semántica de la lógica proposicional

- Tablas de verdad:
 - Conectivas monarias:

i	$\neg i$
1	0
0	1

- Conectivas binarias:

i	j	$i \wedge j$	$i \vee j$	$i \rightarrow j$	$i \leftrightarrow j$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Semántica de la lógica proposicional

- Una **interpretación** es una función del conjunto de las variables proposicionales en el conjunto de valores de verdad.

$$I : VP \longrightarrow \mathbb{B}$$

- Para cada interpretación **I** existe una única función que da significado a las fórmulas, **I' : Prop $\longrightarrow \mathbb{B}$** , tal que:

$$I'(F) = \begin{cases} I(F) & \text{si } F \text{ es atómica} \\ H_{\neg}(I'(G)) & \text{si } F = \neg G \\ H_{\star}(I'(G), I'(H)) & \text{si } F = G \star H \end{cases}$$

- **I'(F)** es el **valor de verdad de F con respecto a I**

Semántica de la lógica proposicional

- Ejemplos

- Valor de verdad de $\mathbf{F} = (\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \wedge (\neg \mathbf{q} \vee \mathbf{r})$ con respecto a la interpretación $\mathbf{l}_1$ tal que $\mathbf{l}_1(\mathbf{p}) = \mathbf{l}_1(\mathbf{r}) = 1$ e $\mathbf{l}_1(\mathbf{q}) = 0$

$\mathbf{p}$	$\mathbf{q}$	$\mathbf{r}$	$\mathbf{p} \vee \mathbf{q}$	$\neg \mathbf{q}$	$\neg \mathbf{q} \vee \mathbf{r}$	$\mathbf{F}$
1	0	1	1	1	1	1

- Valor de verdad de $\mathbf{F} = (\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \wedge (\neg \mathbf{q} \vee \mathbf{r})$ con respecto a la interpretación $\mathbf{l}_2$ tal que $\mathbf{l}_2(\mathbf{r}) = 1$ e $\mathbf{l}_2(\mathbf{p}) = \mathbf{l}_2(\mathbf{q}) = 0$

$\mathbf{p}$	$\mathbf{q}$	$\mathbf{r}$	$\mathbf{p} \vee \mathbf{q}$	$\neg \mathbf{q}$	$\neg \mathbf{q} \vee \mathbf{r}$	$\mathbf{F}$
0	0	1	0	1	1	0

- Propiedad: Si dos interpretaciones $\mathbf{l}_1$ e $\mathbf{l}_2$ coinciden en las variables proposicionales de $\mathbf{F}$ entonces $\mathbf{l}'_1(\mathbf{F}) = \mathbf{l}'_2(\mathbf{F})$
 - Esto demuestra la unicidad de la construcción de $\mathbf{I}'$ a partir de $\mathbf{I}$
 - A partir de ahora escribiremos $\mathbf{I}(\mathbf{F})$ en lugar de $\mathbf{I}'(\mathbf{F})$

- Una interpretación **I** es **modelo** de una fórmula **F** ($I \models F$), si **F** es verdadera con respecto a **I**
 - Si $I_1(p) = I_1(r) = 1$ e $I_1(q) = 0$, entonces
 $I_1 \models (p \vee q) \wedge (\neg q \vee r)$
 - Si $I_2(r) = 1$ e $I_2(p) = I_2(q) = 0$, entonces
 $I_2 \not\models (p \vee q) \wedge (\neg q \vee r)$
- Una fórmula es **satisfacible** si tiene modelos
 - La fórmula $(p \vee q) \wedge (\neg q \vee r)$ es satisfacible
- Una fórmula es **insatisfacible** si no tiene modelos
 - La fórmula $p \wedge \neg p$ es insatisfacible

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$
1	0	0
0	1	0

Tautologías y contradicciones

- Una fórmula **F** es una **tautología** o **válida** ($\models F$), si toda interpretación es modelo de **F**
 - La fórmula $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$ es una tautología
- Una fórmula **F** es una **contradicción** o **insatisfacible**, si ninguna interpretación es modelo de **F**
 - La fórmula $(p \rightarrow q) \wedge \neg(p \rightarrow q)$ es una contradicción
- Una fórmula **F** es **contingente**, si no es una tautología ni una contradicción
 - La fórmula $p \rightarrow q$ es contingente

Clasificaciones de fórmulas

Prop		
Tautologías	Contingentes	Contradicciones
Verdadera en todas las interpretaciones $p \vee \neg p$	Verdadera en algunas interpretaciones y falsa en otras $p \vee q$	Falsa en todas las interpretaciones $p \wedge \neg p$
Satisfacibles		Insatisfacibles
Prop		

Satisfacibilidad y validez

- Los problemas SAT y TAUT
 - Problema SAT: Dada una fórmula, determinar si es satisfacible
 - Problema TAUT: Dada una fórmula, determinar si es una tautología
- Relaciones entre estos dos problemas
 - $\mathbf{F}$ es una tautología $\iff \neg \mathbf{F}$ es insatisfacible
 - $\mathbf{F}$ es una tautología $\implies \mathbf{F}$ es satisfacible
 - $\mathbf{F}$ es satisfacible $\not\implies \neg \mathbf{F}$ es insatisfacible
 - $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}$ es satisfacible
 - $\neg(\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q})$ es satisfacible
- Hay distintos métodos para comprobar SAT y TAUT, el más simple es el basado en las tablas de verdad

Satisfacibilidad y validez

- Tabla de verdad para $\models (p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	1
0	1	1	0	1
0	0	1	1	1

- Tabla de verdad simplificada

p	q	$(p \rightarrow q)$			$\vee$	$(q \rightarrow p)$		
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1	1	0	0
0	0	0	1	0	1	0	1	0

Satisfacibilidad y validez

- Tabla de verdad para $\not\models (p \leftrightarrow q) \vee (q \leftrightarrow p)$

p	q	$p \leftrightarrow q$	$q \leftrightarrow p$	$(p \leftrightarrow q) \vee (q \leftrightarrow p)$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	0
0	1	0	0	0
0	0	1	1	1

- Tabla de verdad simplificada

p	q	$(p \leftrightarrow q)$			$\vee$	$(q \leftrightarrow p)$		
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	0	0	1
0	1	0	0	1	0	1	0	0
0	0	0	1	0	1	0	1	0

- Algunas tautologías importantes
 - Ley de identidad: $\mathbf{F} \rightarrow \mathbf{F}$
 - Ley del tercio excluido: $\mathbf{F} \vee \neg \mathbf{F}$
 - Principio de no contradicción: $\neg(\mathbf{F} \wedge \neg \mathbf{F})$
 - Ley de Clavius: $(\neg \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{F}) \rightarrow \mathbf{F}$
 - Ley de Duns Scoto: $\neg \mathbf{F} \rightarrow (\mathbf{F} \rightarrow \mathbf{G})$
 - Ley de Pierce: $((\mathbf{F} \rightarrow \mathbf{G}) \rightarrow \mathbf{F}) \rightarrow \mathbf{F}$
 - Modus ponens: $(\mathbf{F} \rightarrow \mathbf{G}) \wedge \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{G}$
 - Modus tollens: $(\mathbf{F} \rightarrow \mathbf{G}) \wedge \neg \mathbf{G} \rightarrow \neg \mathbf{F}$

Fórmulas equivalentes

- Dos fórmulas **F** y **G** son **equivalentes** ($F \equiv G$), si para toda interpretación **I** se tiene que $I(F) = I(G)$

- Equivalencias importantes:

- Idempotencia:

$$F \vee F \equiv F$$

$$F \wedge F \equiv F$$

- Conmutatividad:

$$F \vee G \equiv G \vee F$$

$$F \wedge G \equiv G \wedge F$$

- Asociatividad:

$$F \vee (G \vee H) \equiv (F \vee G) \vee H$$

$$F \wedge (G \wedge H) \equiv (F \wedge G) \wedge H$$

- Absorción:

$$F \wedge (F \vee G) \equiv F$$

$$F \vee (F \wedge G) \equiv F$$

Fórmulas equivalentes

- Dos fórmulas **F** y **G** son **equivalentes** ($F \equiv G$), si para toda interpretación **I** se tiene que $I(F) = I(G)$
- Equivalencias importantes:

- Distributividad:

$$F \vee (G \wedge H) \equiv (F \vee G) \wedge (F \vee H)$$

$$F \wedge (G \vee H) \equiv (F \wedge G) \vee (F \wedge H)$$

- Leyes de tautologías. Si **F** es una tautología:

$$F \wedge G \equiv G$$

$$F \vee G \equiv F$$

- Leyes de contradicciones. Si **F** es una contradicción:

$$F \wedge G \equiv F$$

$$F \vee G \equiv G$$

Fórmulas equivalentes

- Dos fórmulas **F** y **G** son **equivalentes** ($F \equiv G$), si para toda interpretación **I** se tiene que $I(F) = I(G)$

- Equivalencias importantes:

- Ley del condicional:

$$F \rightarrow G \equiv \neg F \vee G$$

- Ley del bicondicional:

$$F \leftrightarrow G \equiv (F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F)$$

- Doble negación:

$$\neg\neg F \equiv F$$

- Leyes de De Morgan:

$$\neg(F \wedge G) \equiv \neg F \vee \neg G$$

$$\neg(F \vee G) \equiv \neg F \wedge \neg G$$

Propiedades de la equivalencia lógica

- La equivalencia lógica es una relación de equivalencia
 - Reflexividad: $F \equiv F$
 - Simetría: Si $F \equiv G$, entonces $G \equiv F$
 - Transitividad: Si $F \equiv G$ y $G \equiv H$, entonces $F \equiv H$
- Relación entre equivalencia y bicondicional

$$F \equiv G \text{ si y solo si } \models F \leftrightarrow G$$

- Principio de sustitución de fórmulas equivalentes: Si en una fórmula F se sustituye una subfórmula G por otra lógicamente equivalente G' , entonces la fórmula obtenida F' es lógicamente equivalente a la original
 - $F = \neg(p \wedge q) \rightarrow \neg(p \wedge \neg\neg r)$
 - $G = \neg(p \wedge \neg\neg r)$
 - $G' = \neg p \vee \neg r$
 - $F' = \neg(p \wedge q) \rightarrow \neg p \vee \neg r$

Conjunto completo de conectivas

- Un conjunto de conectivas $\mathcal{C}$ es **funcionalmente completo** si cualquier fórmula proposicional tiene una equivalente en la que sólo se utilizan las conectivas de $\mathcal{C}$
 - El conjunto $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ es funcionalmente completo por definición de **Prop**
 - El conjunto $\{\neg, \wedge, \vee\}$ es funcionalmente completo (ley del condicional, ley de bicondicional y principio de sustitución)
 - Los conjuntos $\{\neg, \wedge\}$ y $\{\neg, \vee\}$ son funcionalmente completos (ley del condicional, ley del bicondicional, leyes de De Morgan y principio de sustitución)
 - Si definimos la conectiva $\uparrow$ con la siguiente función de verdad

$$H_{\uparrow}(i, j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j = 1 \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

entonces $\{\uparrow\}$ es un conjunto funcionalmente completo

Conjuntos de fórmulas

- Una interpretación **I** es **modelo** de un conjunto de fórmulas **S** ($I \models S$), si para toda $F \in S$ se tiene que $I \models F$
- Sea $S = \{F_1 = (p \vee q) \wedge (\neg q \vee r), F_2 = p \rightarrow r\}$
 - La interpretación I_1 tal que $I_1(p) = I_1(r) = 1$ e $I_1(q) = 0$ es modelo de **S**.

p	q	r	$p \vee q$	$\neg q$	$\neg q \vee r$	$p \rightarrow r$	F_1	F_2
1	0	1	1	1	1	1	1	1

- La interpretación I_2 tal que $I_2(p) = I_2(q) = 0$ e $I_2(r) = 1$ no es modelo de **S**.

p	q	r	$p \vee q$	$\neg q$	$\neg q \vee r$	$p \rightarrow r$	F_1	F_2
0	0	1	0	1	1	1	0	1

Consistencia y consecuencia lógica

- Un conjunto **S** es **consistente**, si tiene algún modelo
 - El conjunto $\{(p \vee q) \wedge (\neg q \vee r), p \rightarrow r\}$ es consistente
- Un conjunto **S** es **inconsistente**, si no tiene ningún modelo
 - El conjunto $\{p \vee q, \neg p \vee q, p \vee \neg q, \neg p \vee \neg q\}$ es inconsistente.
- Una fórmula **F** es **consecuencia lógica** de un conjunto de fórmulas **S** ($S \models F$) si todos los modelos de **S** son a su vez modelos de **F**.
 - $\{p \rightarrow q, q \rightarrow r\} \models p \rightarrow r$
 - $\{p\} \not\models p \wedge q$

Propiedades de la consecuencia lógica

- Propiedades básicas de la relación de consecuencia lógica:
 - *Reflexividad*: Para toda $F \in S$, $S \models F$.
 - *Monotonía*: Si $S_1 \models F$ y $S_1 \subseteq S_2$, entonces $S_2 \models F$.
 - *Transitividad*: Si $S \models F$ y $\{F\} \models G$, entonces $S \models G$.
- Relación entre consecuencia, validez, satisfacibilidad y consistencia. Las siguientes condiciones son equivalentes:
 - $\{F_1, \dots, F_n\} \models G$.
 - $\models F_1 \wedge \dots \wedge F_n \rightarrow G$.
 - $\neg(F_1 \wedge \dots \wedge F_n \rightarrow G)$ es insatisfacible.
 - $\{F_1, \dots, F_n, \neg G\}$ es inconsistente.

- Un cálculo lógico es un procedimiento de decisión que permite comprobar la validez de una fórmula.
 - La deducción en un cálculo lógico se representa con el símbolo $\vdash$.
 - También permiten comprobar la satisfacibilidad, la consistencia y la consecuencia lógica.
- La combinación exhaustiva de todos los valores de verdad de las variables proposicionales y el cálculo del valor de verdad mediante las tablas de verdad es un ejemplo de cálculo lógico.
- Otros cálculos lógicos: tableros semánticos, secuentes, deducción natural, resolución, ...

Propiedades de los cálculos lógicos

- Un cálculo lógico es correcto ($\vdash \implies \models$), si toda fórmula que se puede demostrar que es válida con el cálculo lógico, es válida en la lógica.
 - Todo cálculo lógico debería cumplir esta propiedad.
- Un cálculo lógico es completo ($\models \implies \vdash$), si para toda fórmula válida en la lógica, se puede demostrar su validez utilizando únicamente el cálculo lógico.
- Existen cálculos lógicos para la lógica proposicional que son correctos y completos.
 - Los cálculos lógicos mencionados para la lógica proposicional son correctos y completos: tablas de verdad, tableros semánticos, secuentes, deducción natural, resolución, ...
- La lógica proposicional es decidible: existen procedimientos capaces de decidir si una fórmula es válida o no, en un número finito de pasos.

- Problema de los animales: Se sabe que
 - Los animales con pelo o que dan leche son mamíferos
 - Los mamíferos que rumian o tienen pezuñas son ungulados
 - Los ungulados de cuello largo son jirafas
 - Los ungulados con rayas negras son cebras

Se observa que un animal tiene pelos, pezuñas y rayas negras.
Por tanto, se concluye que el animal es una cebra

- Simbolización
 - **p**: el animal tiene pelo
 - **l**: el animal da leche
 - **m**: el animal es un mamífero
 - **r**: el animal rumia
 - **pz**: el animal tiene pezuñas
 - **u**: el animal es ungulado
 - **cl**: el animal tiene cuello largo
 - **j**: el animal es una jirafa
 - **rn**: el animal tiene rayas negras
 - **c**: el animal es una cebra

- Formalización de las premisas y la conclusión
 - Los animales con pelo o que dan leche son mamíferos
 $\mathbf{p \vee l \rightarrow m}$
 - Los mamíferos que rumian o tienen pezuñas son ungulados
 $\mathbf{m \wedge (r \vee pz) \rightarrow u}$
 - Los ungulados de cuello largo son jirafas
 $\mathbf{u \wedge cl \rightarrow j}$
 - Los ungulados con rayas negras son cebras
 $\mathbf{u \wedge rn \rightarrow c}$
 - Se observa que un animal tiene pelos, pezuñas y rayas negras
 $\mathbf{p \wedge pz \wedge rn}$
 - Por tanto, se concluye que el animal es una cebra
 $\mathbf{c}$
- Formalización de la argumentación

$$\{\mathbf{p \vee l \rightarrow m, m \wedge (r \vee pz) \rightarrow u, u \wedge cl \rightarrow j, u \wedge rn \rightarrow c, p \wedge pz \wedge rn}\models \mathbf{c}$$

Problemas lógicos: veraces y mentirosos

- En una isla hay dos tribus, la de los veraces (que siempre dicen la verdad) y la de los mentirosos (que siempre mienten). Un viajero se encuentra con tres isleños A, B y C y cada uno le dice una frase:
 - A dice “B y C son veraces si y solo si C es veraz”
 - B dice “Si A y C son veraces, entonces B y C son veraces y A es mentiroso”
 - C dice “B es mentiroso si y solo si A o B es veraz”
- ¿A qué tribu pertenece cada uno de ellos?
- Simbolización
 - **a**: A es veraz
 - **b**: B es veraz
 - **c**: C es veraz

Problemas lógicos: veraces y mentirosos

- Formalización de las premisas
 - A dice “B y C son veraces si y solo si C es veraz”
 $\mathbf{F_1 : a \leftrightarrow (b \wedge c \leftrightarrow c)}$
 - B dice “Si A y C son veraces, entonces B y C son veraces y A es mentiroso”
 $\mathbf{F_2 : b \leftrightarrow (a \wedge c \rightarrow b \wedge c \wedge \neg a)}$
 - C dice “B es mentiroso si y solo si A o B es veraz”
 $\mathbf{F_3 : c \leftrightarrow (\neg b \leftrightarrow a \vee b)}$
- Modelos de $\{\mathbf{F_1, F_2, F_3}\}$:
 - Si $\mathbf{I \models F}$, entonces $\mathbf{I(a) = 1, I(b) = 1, I(c) = 0}$
 - Por tanto, A y B son veraces y C es mentiroso

- M. Ben-Ari. *Mathematical logic for computer science*
Capítulos 1 y 2
- J.A. Díez. *Iniciación a la Lógica*
Capítulos 2 y 3
- M. Huth y M. Ryan. *Logic in computer science: modelling and reasoning about systems*
Capítulo 1
- R. Smullyan. *¿Cómo se llama este libro?*