

Deducción natural en lógica proposicional

Francisco J. Martín Mateos

Dpto. Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial
Universidad de Sevilla

Deducción natural en lógica proposicional

- Cálculo lógico que pretende capturar la forma en la que el ser humano realiza sus razonamientos
 - No se consideran axiomas (hechos asumidos como verdaderos)
 - Se consideran dos reglas de inferencia para cada conectiva, una para introducirla y otra para eliminarla
 - Se construyen reglas derivadas a partir de las básicas
- Una demostración es una secuencia de fórmulas donde cada una de ellas es una premisa o se obtiene a partir de las anteriores mediante la aplicación de una regla
 - Algunas reglas introducen supuestos de forma local

Reglas de la conjunción

- Regla de introducción de la conjunción

$$\frac{\mathbf{F} \quad \mathbf{G}}{\mathbf{F} \wedge \mathbf{G}} [\wedge i]$$

- Corrección $[\wedge i]$: $\{\mathbf{F}, \mathbf{G}\} \models \mathbf{F} \wedge \mathbf{G}$
- Reglas de eliminación de la conjunción

$$\frac{\mathbf{F} \wedge \mathbf{G}}{\mathbf{F}} [\wedge e_1] \qquad \frac{\mathbf{F} \wedge \mathbf{G}}{\mathbf{G}} [\wedge e_2]$$

- Corrección $[\wedge e_1]$: $\{\mathbf{F} \wedge \mathbf{G}\} \models \mathbf{F}$
- Corrección $[\wedge e_2]$: $\{\mathbf{F} \wedge \mathbf{G}\} \models \mathbf{G}$

Reglas de la conjunción

$\{p \wedge q, r\} \vdash q \wedge r$

1. $p \wedge q$ premisa
2. r premisa
3. q $[\wedge e_2 \ 1]$
4. $q \wedge r$ $[\wedge i \ 3 \ 2]$

Reglas de la doble negación

- Regla de introducción de la doble negación

$$\frac{\mathbf{F}}{\neg\neg\mathbf{F}} [\neg\neg\mathbf{i}]$$

- Corrección $[\neg\neg\mathbf{i}]$: $\{\mathbf{F}\} \models \neg\neg\mathbf{F}$
- Reglas de eliminación de la doble negación

$$\frac{\neg\neg\mathbf{F}}{\mathbf{F}} [\neg\neg\mathbf{e}]$$

- Corrección $[\neg\neg\mathbf{e}]$: $\{\neg\neg\mathbf{F}\} \models \mathbf{F}$

Reglas de la doble negación

$$\{p, \neg\neg(q \wedge r)\} \vdash \neg\neg p \wedge r$$

- | | | |
|----|------------------------|----------------------|
| 1. | p | premisa |
| 2. | $\neg\neg(q \wedge r)$ | premisa |
| 3. | $\neg\neg p$ | $[\neg\neg i \ 1]$ |
| 4. | $q \wedge r$ | $[\neg\neg e \ 2]$ |
| 5. | r | $[\wedge e_2 \ 4]$ |
| 6. | $\neg\neg p \wedge r$ | $[\wedge i \ 3 \ 5]$ |

Reglas del condicional

- Regla de eliminación del condicional (*modus ponens*)

$$\frac{\mathbf{F \rightarrow G} \quad \mathbf{F}}{\mathbf{G}} [\rightarrow e]$$

- Corrección $[\rightarrow e]$: $\{\mathbf{F \rightarrow G}, \mathbf{F}\} \models \mathbf{G}$

Reglas del condicional

$\{p, p \rightarrow q, p \rightarrow (q \rightarrow r)\} \vdash r$

- | | | |
|----|-----------------------------------|---------------------------|
| 1. | p | premisa |
| 2. | $p \rightarrow q$ | premisa |
| 3. | $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ | premisa |
| 4. | q | $[\rightarrow e \ 2 \ 1]$ |
| 5. | $q \rightarrow r$ | $[\rightarrow e \ 3 \ 1]$ |
| 6. | r | $[\rightarrow e \ 5 \ 4]$ |

- Regla *modus tollens*

$$\frac{F \rightarrow G \quad \neg G}{\neg F} \text{ [MT]}$$

- Corrección [MT]: $\{F \rightarrow G, \neg G\} \models \neg F$

Reglas del condicional

$\{p \rightarrow (q \rightarrow r), p, \neg r\} \vdash \neg q$

- | | | |
|----|-----------------------------------|---------------------------|
| 1. | $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ | premisa |
| 2. | p | premisa |
| 3. | $\neg r$ | premisa |
| 4. | $q \rightarrow r$ | $[\rightarrow e \ 1 \ 2]$ |
| 5. | $\neg q$ | $[MT \ 4 \ 3]$ |

Reglas del condicional

- Regla de introducción del condicional

$$\frac{\begin{array}{c} \mathbf{F} \\ \vdots \\ \mathbf{G} \end{array}}{\mathbf{F} \rightarrow \mathbf{G}} [\rightarrow i]$$

- Corrección $[\rightarrow i]$: Si $\{\mathbf{F}\} \models \mathbf{G}$, entonces $\models \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{G}$

Reglas del condicional

$\{p \rightarrow q\} \vdash \neg q \rightarrow \neg p$

1. $p \rightarrow q$ premisa
2. $\neg q$ supuesto
3. $\neg p$ [MT 1 2]
4. $\neg q \rightarrow \neg p$ [$\rightarrow$ i 2-3]

$\vdash p \rightarrow p$

1. p supuesto
2. $p \rightarrow p$ [$\rightarrow$ i 1-1]

Reglas del condicional

$\{\neg q \rightarrow \neg p\} \vdash p \rightarrow \neg\neg q$

1. $\neg q \rightarrow \neg p$ premisa

2. p supuesto

3. $\neg\neg p$ $[\neg\neg i \ 2]$

4. $\neg\neg q$ $[MT \ 1 \ 3]$

5. $p \rightarrow \neg\neg q$ $[\rightarrow i \ 2-4]$

Reglas del condicional

$\vdash (q \rightarrow r) \rightarrow ((\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow r))$

1.	$q \rightarrow r$	supuesto
2.	$\neg q \rightarrow \neg p$	supuesto
3.	p	supuesto
4.	$\neg \neg p$	$[\neg \neg i \ 3]$
5.	$\neg \neg q$	$[MT \ 2 \ 4]$
6.	q	$[\neg \neg e \ 5]$
7.	r	$[\rightarrow e \ 1 \ 6]$
8.	$p \rightarrow r$	$[\rightarrow i \ 3-7]$
9.	$(\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow r)$	$[\rightarrow i \ 2-8]$
10.	$(q \rightarrow r) \rightarrow ((\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow r))$	$[\rightarrow i \ 1-9]$

Reglas de la disyunción

- Reglas de introducción de la disyunción

$$\frac{\mathbf{F}}{\mathbf{F} \vee \mathbf{G}} [\vee i_1] \qquad \frac{\mathbf{G}}{\mathbf{F} \vee \mathbf{G}} [\vee i_2]$$

- Corrección $[\vee i_1]$: $\{\mathbf{F}\} \models \mathbf{F} \vee \mathbf{G}$
- Corrección $[\vee i_2]$: $\{\mathbf{G}\} \models \mathbf{F} \vee \mathbf{G}$

Reglas de la disyunción

- Regla de eliminación de la disyunción

$$\frac{\begin{array}{c} \mathbf{F \vee G} \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline \mathbf{F} \\ \vdots \\ \mathbf{H} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline \mathbf{G} \\ \vdots \\ \mathbf{H} \\ \hline \end{array}}{\mathbf{H}} [\vee e]$$

- Corrección $[\vee e]$: Si $\{F\} \models H$ y $\{G\} \models H$, entonces $\{F \vee G\} \models H$

Reglas de la disyunción

$$\{q \rightarrow r\} \vdash p \vee q \rightarrow p \vee r$$

1.	$q \rightarrow r$	premisa
2.	$p \vee q$	supuesto
3.	p	supuesto
4.	$p \vee r$	$[\vee i_1 3]$
5.	q	supuesto
6.	r	$[\rightarrow e 1 5]$
7.	$p \vee r$	$[\vee i_2 6]$
8.	$p \vee r$	$[\vee e 2 3-4 5-7]$
9.	$p \vee q \rightarrow p \vee r$	$[\rightarrow i 2-8]$

Regla de copia

- Consiste en reutilizar una fórmula de un paso previo

$\vdash p \rightarrow (q \rightarrow p)$		
1.	p	supuesto
2.	q	supuesto
3.	p	[copia 1]
4.	$q \rightarrow p$	$[\rightarrow i\ 2-3]$
5.	$p \rightarrow (q \rightarrow p)$	$[\rightarrow i\ 1-4]$

Reglas del bicondicional

- Regla de introducción del bicondicional

$$\frac{\mathbf{F \rightarrow G \quad G \rightarrow F}}{\mathbf{F \leftrightarrow G}} [\leftrightarrow i]$$

- Corrección $[\leftrightarrow i]$: $\{\mathbf{F \rightarrow G, G \rightarrow F}\} \models \mathbf{F \leftrightarrow G}$

Reglas del bicondicional

$$\vdash p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p$$

- | | | |
|----|--------------|------------------|
| 1. | $p \wedge q$ | supuesto |
| 2. | p | $[\wedge e_1 1]$ |
| 3. | q | $[\wedge e_2 1]$ |
| 4. | $q \wedge p$ | $[\wedge i 3 2]$ |
5. $p \wedge q \rightarrow q \wedge p$ $[\rightarrow i 1-4]$
- | | | |
|----|--------------|------------------|
| 6. | $q \wedge p$ | supuesto |
| 7. | q | $[\wedge e_1 6]$ |
| 8. | p | $[\wedge e_2 6]$ |
| 9. | $p \wedge q$ | $[\wedge i 7 8]$ |
10. $q \wedge p \rightarrow p \wedge q$ $[\rightarrow i 6-9]$
11. $p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p$ $[\leftrightarrow i 5 10]$

Reglas del bicondicional

- Reglas de eliminación del bicondicional

$$\frac{\mathbf{F \leftrightarrow G}}{\mathbf{F \rightarrow G}} [\leftrightarrow e_1] \qquad \frac{\mathbf{F \leftrightarrow G}}{\mathbf{G \rightarrow F}} [\leftrightarrow e_2]$$

- Corrección $[\leftrightarrow e_1]$: $\{\mathbf{F \leftrightarrow G}\} \models \mathbf{F \rightarrow G}$
- Corrección $[\leftrightarrow e_2]$: $\{\mathbf{F \leftrightarrow G}\} \models \mathbf{G \rightarrow F}$

Reglas del bicondicional

$$\{p \leftrightarrow q, p \vee q\} \vdash p \wedge q$$

1. $p \leftrightarrow q$ premisa
2. $p \vee q$ premisa
3. p supuesto
4. $p \rightarrow q$ $[\leftrightarrow e_1 1]$
5. q $[\rightarrow e 4 3]$
6. $p \wedge q$ $[\wedge i 3 5]$
7. q supuesto
8. $q \rightarrow p$ $[\leftrightarrow e_2 1]$
9. p $[\rightarrow e 8 7]$
10. $p \wedge q$ $[\wedge i 9 7]$
11. $p \wedge q$ $[\vee e 2 3-6 7-10]$

Reglas de la negación

- Extensiones de la lógica para usar $\perp$ (Falso)
 - Sintaxis: $\perp$ es una fórmula proposicional
 - Semántica: $I(\perp) = 0$ para cualquier interpretación I
- Regla de eliminación de falso

$$\frac{\perp}{\mathbf{F}} [\perp e]$$

- Regla de eliminación de la negación

$$\frac{\neg \mathbf{F} \quad \mathbf{F}}{\perp} [\neg e]$$

- Corrección $[\perp e]$: $\{\perp\} \models \mathbf{F}$
- Corrección $[\neg e]$: $\{\neg \mathbf{F}, \mathbf{F}\} \models \perp$

Reglas de la negación

$$\{\neg p \vee q\} \vdash p \rightarrow q$$

1. $\neg p \vee q$ premisa
2.

p	supuesto
3. $\neg p$	supuesto
4. $\perp$	$[\neg e \ 3 \ 2]$
5. q	$[\perp e \ 4]$
6. q	supuesto
7. q	$[\vee e \ 1 \ 3-5 \ 6-6]$
8. $p \rightarrow q$ $[\rightarrow i \ 2-7]$

Reglas de la negación

- Regla de introducción de la negación:

$$\frac{\begin{array}{c} \mathbf{F} \\ \vdots \\ \perp \end{array}}{\neg \mathbf{F}} [\neg i]$$

- Corrección $[\neg i]$: Si $\{\mathbf{F}\} \models \perp$, entonces $\models \neg \mathbf{F}$

Reglas de la negación

$\{p \rightarrow q, p \rightarrow \neg q\} \vdash \neg p$

1. $p \rightarrow q$ premisa
2. $p \rightarrow \neg q$ premisa
3. p supuesto
4. q $[\rightarrow e \ 1 \ 3]$
5. $\neg q$ $[\rightarrow e \ 2 \ 3]$
6. $\perp$ $[\neg e \ 5 \ 4]$
7. $\neg p$ $[\neg i \ 3-6]$

- Algunas reglas importantes se pueden obtener a partir de otras
 - Regla *modus tollens*
 - Regla de introducción de la doble negación
 - Regla de reducción al absurdo
 - Ley del tercio excluido

- Regla *modus tollens*

$$\frac{F \rightarrow G \quad \neg G}{\neg F} \text{ [MT]}$$

Derivación

- | | | | |
|----|-----------|---------------------|----------|
| 1. | F | F → G | premisa |
| 2. | | ¬G | premisa |
| 3. | F | | supuesto |
| 4. | G | | [→e 1 3] |
| 5. | ⊥ | | [¬e 2 4] |
| 6. | ¬F | | [¬i 2-4] |

- Regla derivada de introducción de la doble negación

$$\frac{F}{\neg\neg F} [\neg\neg i]$$

Derivación

- | | | |
|----|--------------|--------------------|
| 1. | F | premisa |
| 2. | $\neg F$ | supuesto |
| 3. | $\perp$ | $[\neg e \ 2 \ 1]$ |
| 4. | $\neg\neg F$ | $[\neg i \ 2-3]$ |

Reglas derivadas

- Regla de reducción al absurdo

$$\frac{\begin{array}{c} \neg F \\ \vdots \\ \perp \end{array}}{F} \text{ [RAA]}$$

Derivación

- | | | |
|----|----------------------------|---------------------------|
| 1. | $\neg F \rightarrow \perp$ | premisa |
| 2. | $\neg F$ | supuesto |
| 3. | $\perp$ | $[\rightarrow e \ 1 \ 2]$ |
| 4. | $\neg\neg F$ | $[\neg i \ 2-3]$ |
| 5. | F | $[\neg\neg e \ 4]$ |

Reglas derivadas

- Ley del tercio excluido

$$\frac{}{\mathbf{F} \vee \neg \mathbf{F}} \text{ [LEM]}$$

Derivación

- | | | |
|----|---|---------------------|
| 1. | $\neg(\mathbf{F} \vee \neg \mathbf{F})$ | supuesto |
| 2. | $\mathbf{F}$ | supuesto |
| 3. | $\mathbf{F} \vee \neg \mathbf{F}$ | $[\vee i_1 2]$ |
| 4. | $\perp$ | $[\neg e 1 3]$ |
| 5. | $\neg \mathbf{F}$ | $[\neg i 2-4]$ |
| 6. | $\mathbf{F} \vee \neg \mathbf{F}$ | $[\vee i_2 5]$ |
| 7. | $\perp$ | $[\neg e 1 6]$ |
| 8. | $\mathbf{F} \vee \neg \mathbf{F}$ | $[\text{RAA } 1-7]$ |

$$\{p \rightarrow q\} \vdash \neg p \vee q$$

1. $p \rightarrow q$ premisa
2. $p \vee \neg p$ [LEM]
- | | | |
|----|-----------------|---------------------------|
| 3. | p | supuesto |
| 4. | q | $[\rightarrow e \ 1 \ 3]$ |
| 5. | $\neg p \vee q$ | $[\vee i_2 \ 4]$ |
- | | | |
|----|-----------------|------------------|
| 6. | $\neg p$ | supuesto |
| 7. | $\neg p \vee q$ | $[\vee i_1 \ 6]$ |
8. $\neg p \vee q$ $[\vee e \ 2 \ 3-5 \ 6-7]$

- La táctica **rule**

- Objetivo: $\{H_1, \dots, H_m\} \Rightarrow C$
- Regla: $\{P_1, \dots, P_n\} \Rightarrow Q$
- Unificación: Hacer iguales **C** y **Q**
- Nuevos objetivos: $\{H_1, \dots, H_m\} \Rightarrow P_1$
 $\vdots$
 $\{H_1, \dots, H_m\} \Rightarrow P_n$

- La táctica **erule**

- Objetivo: $\{H_1, \dots, H_j, \dots, H_m\} \Rightarrow C$
- Regla: $\{P_1, \dots, P_n\} \Rightarrow Q$
- Unificación: Hacer iguales **C** y **Q**; y **P₁** y **H_j**
- Nuevos objetivos: $\{H_1, \dots, H_{j-1}, H_{j+1}, \dots, H_m\} \Rightarrow P_2$
 $\vdots$
 $\{H_1, \dots, H_{j-1}, H_{j+1}, \dots, H_m\} \Rightarrow P_n$

- La táctica **frule**

- Objetivo: $\{H_1, \dots, H_j, \dots, H_m\} \Rightarrow C$
- Regla: $\{P_1, \dots, P_n\} \Rightarrow Q$
- Unificación: Hacer iguales P_1 y H_j
- Nuevos objetivos: $\{H_1, \dots, H_m\} \Rightarrow P_2$

$\vdots$

$$\{H_1, \dots, H_m\} \Rightarrow P_n$$
$$\{H_1, \dots, H_m, Q\} \Rightarrow C$$

- La táctica **drule**

- Objetivo: $\{H_1, \dots, H_j, \dots, H_m\} \Rightarrow C$
- Regla: $\{P_1, \dots, P_n\} \Rightarrow Q$
- Unificación: Hacer iguales P_1 y H_j
- Nuevos objetivos: $\{H_1, \dots, H_{j-1}, H_{j+1}, \dots, H_m\} \Rightarrow P_2$

$\vdots$

$$\{H_1, \dots, H_{j-1}, H_{j+1}, \dots, H_m\} \Rightarrow P_n$$

$$\{H_1, \dots, H_{j-1}, H_{j+1}, \dots, H_m, Q\} \Rightarrow C$$

- C. Badesa, I. Jané y R. Jansana *Elementos de lógica formal*
Capítulo 16
- J.A. Díez. *Iniciación a la Lógica*
Capítulo 4
- M. Huth y M. Ryan. *Logic in computer science: modelling and reasoning about systems*
Capítulo 1
- E. Paniagua, J.L. Sánchez y F. Martín *Lógica computacional*
Capítulo 3.6