

# Sintaxis y semántica de la lógica de primer orden

Francisco J. Martín Mateos

Dpto. Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial  
Universidad de Sevilla

# Limitación expresiva de la lógica proposicional

- Si Sevilla es vecina de Cádiz, entonces Cádiz es vecina de Sevilla. Sevilla es vecina de Cádiz. Por tanto, Cádiz es vecina de Sevilla.
  - Formalización en lógica proposicional:  $\{\mathbf{SvC} \rightarrow \mathbf{CvS}, \mathbf{SvC}\} \models \mathbf{CvS}$
- Si una provincia es vecina de otra, entonces la segunda es vecina de la primera. Sevilla es vecina de Cádiz. Por tanto, Cádiz es vecina de Sevilla.
  - Formalización en lógica proposicional: Imposible.
  - Es necesario poder hacer referencia a individuos genéricos caracterizados por funciones.
    - *Ser una provincia*
    - *Ser vecinas*

- Símbolos lógicos
  - Variables:  $x, y, z, \dots, x_1, x_2, \dots$
  - Conectivas lógicas:  $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
  - Cuantificadores:
    - Cuantificador universal:  $\forall$
    - Cuantificador existencial:  $\exists$
- Símbolos propios
  - Constantes de individuos:  $a, b, c, \dots, a_1, a_2, \dots$
  - Predicados (con aridad):  $P, Q, R, \dots, P_1, P_2, \dots$
  - Funciones (con aridad):  $f, g, h, \dots, f_1, f_2, \dots$
- Símbolos auxiliares:  $(, ), ,$

# Lenguaje de primer orden

- Notación:
  - Lenguajes de primer orden:  $L, L_1, \dots$
  - Conjunto de las variables: **Var**
- Observaciones:
  - Un lenguaje de primer orden se describe con sus constantes, predicados y funciones propias. Los símbolos lógicos siempre están presentes en el lenguaje.
  - Los símbolos de predicado de aridad 1 (un argumento) se llaman propiedades.
  - Los símbolos de predicado de aridad mayor que 1 (dos o más argumentos) se llaman relaciones.
  - La mayoría de los lenguajes de primer orden incluyen el predicado de igualdad ( $=$ ), de dos argumentos.

# Lenguaje de primer orden

- Lenguaje de la vecindad entre provincias:
  - Símbolos de constantes:  $\{\mathbf{Sevilla}, \mathbf{Cadiz}\}$
  - Símbolos de predicado:  $\{\mathbf{provincia}, \mathbf{vecinas}\}$
  - Símbolos de función:  $\{\}$
- Lenguaje de la aritmética natural:
  - Símbolos de constantes:  $\{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \dots\}$
  - Símbolos de predicado:  $\{<, \leq, =, \dots\}$
  - Símbolos de función:  $\{+, -, *\}$

- **Términos** en un lenguaje de primer orden **L**:
  - Las variables son términos de **L**.
  - Las constantes de **L** son términos de **L**.
  - Si **f** es un símbolo de función de **L** de aridad **n** (o **n**-aria) y  $t_1, \dots, t_n$  son términos de **L**, entonces  $f(t_1, \dots, t_n)$  es un término de **L**.
- Notación:
  - Términos de un lenguaje de primer orden: **t**, **s**, ...,  $t_1$ ,  $t_2$ , ...
  - Conjunto de términos del lenguaje **L**: **Term(L)**
- Ejemplos:
  - En el lenguaje de la vecindad entre provincias: **Sevilla**, **Cadiz**.
  - En el lenguaje de la aritmética:  $+(*(x, 1), y)$  (o  $(x * 1) + y$ ).

- **Fórmulas atómicas** en un lenguaje de primer orden **L**:
  - Si **P** es un símbolo de predicado **n**-ario y  $t_1, \dots, t_n$  son términos del lenguaje **L**, entonces **P**( $t_1, \dots, t_n$ ) es una fórmula atómica.
- Notación:
  - Fórmulas atómicas de un lenguaje de primer orden:  
**A, B, ..., A<sub>1</sub>, A<sub>2</sub>, ...**
  - Conjunto de fórmulas atómicas del lenguaje **L**: **Atom(L)**
- Ejemplos:
  - En el lenguaje de la vecindad entre provincias: **provincia(x), vecinas(Cadiz, y)**.
  - En el lenguaje de la aritmética:  **$<(x, *(2, s(x)))$  (o  $x < 2 * s(x)$ ).**

- **Fórmulas** en un lenguaje de primer orden **L**:
  - Las fórmulas atómicas de **L** son fórmulas en **L**.
  - Si **F** y **G** son fórmulas en **L**, entonces  $(\neg F)$ ,  $(F \wedge G)$ ,  $(F \vee G)$ ,  $(F \rightarrow G)$  y  $(F \leftrightarrow G)$  son fórmulas en **L**.
  - Si **F** es una fórmula en **L**, entonces  $\forall x F$  y  $\exists x F$  son fórmulas en **F**.
- Notación:
  - Fórmulas en un lenguaje de primer orden: **F**, **G**, ..., **F**<sub>1</sub>, **F**<sub>2</sub>, ...
  - Conjunto de las fórmulas del lenguaje **L**: **Form(L)**
  - Se siguen los mismos criterios para eliminar paréntesis que en la lógica proposicional, con  $\forall$  y  $\exists$  con la mayor precedencia.  
 $\forall x P(x) \rightarrow Q(x)$  es una abreviatura de  $((\forall x P(x)) \rightarrow Q(x))$
- Ejemplos:
  - En el lenguaje de la vecindad entre provincias:  $\forall x \text{ provincia}(x)$ ,  $\forall x \exists y \text{ vecinas}(x, y)$ .
  - En el lenguaje de la aritmética:  $\exists x \forall y \leq(x, y)$  (o  $\exists x \forall y (x \leq y)$ ).



- Si una provincia es vecina de otra, entonces la segunda es vecina de la primera. Sevilla es vecina de Cádiz. Por tanto Cádiz es vecina de Sevilla.
- Lenguaje de la vecindad entre provincias:
  - Símbolos de constantes: **{Sevilla, Cadiz}**
  - Símbolos de predicado: **{provincia, vecinas}**
  - Símbolos de función: **{}**

# Expresividad de la lógica de primer orden

- Formalización:
  - Si una provincia es vecina de otra, entonces la segunda es vecina de la primera:  
$$\forall x \forall y (\text{provincia}(x) \wedge \text{provincia}(y) \wedge \text{vecina}(x, y) \rightarrow \text{vecina}(y, x))$$
  - Sevilla es vecina de Cádiz:  
$$\text{vecina}(\text{Sevilla}, \text{Cadiz})$$
  - Por tanto Cádiz es vecina de Sevilla:  
$$\text{vecina}(\text{Cadiz}, \text{Sevilla})$$
- Información implícita:
  - Sevilla es una provincia:  
$$\text{provincia}(\text{Sevilla})$$
  - Cádiz es una provincia:  
$$\text{provincia}(\text{Cadiz})$$

# Expresividad de la lógica de primer orden

- Representación de conocimiento astronómico

- La Tierra es un planeta:

**$\text{planeta}(\text{Tierra})$**

- La Luna no es un planeta:

**$\neg \text{planeta}(\text{Luna})$**

- La Luna es un satélite:

**$\text{satelite}(\text{Luna})$**

- La Tierra gira alrededor del Sol:

**$\text{gira}(\text{Tierra}, \text{Sol})$**

- La Luna gira alrededor de la Tierra:

**$\text{gira}(\text{Luna}, \text{Tierra})$**

- Todo planeta es un satélite:

**$\forall x (\text{planeta}(x) \rightarrow \text{satelite}(x))$**

- Todo planeta gira alrededor del Sol:

**$\forall x (\text{planeta}(x) \rightarrow \text{gira}(x, \text{Sol}))$**

# Expresividad de la lógica de primer orden

- Representación de conocimiento astronómico
  - Algún planeta gira alrededor de la Luna:  
 $\exists x (\text{planeta}(x) \wedge \text{gira}(x, \text{Luna}))$
  - Hay por lo menos un satélite:  
 $\exists x \text{satelite}(x)$
  - Ningún planeta es un satélite:  
 $\neg \exists x (\text{planeta}(x) \wedge \text{satelite}(x))$
  - Ningún objeto celeste gira alrededor de sí mismo:  
 $\neg \exists x \text{gira}(x, x)$
  - Alrededor de los satélites no giran objetos:  
 $\forall x (\text{satelite}(x) \rightarrow \neg \exists y \text{gira}(y, x))$
  - Hay exactamente un satélite:  
 $\exists x (\text{satelite}(x) \wedge \forall y (\text{satelite}(y) \rightarrow x = y))$
  - Todo planeta tiene un objeto que gira en torno a él:  
 $\forall x (\text{planeta}(x) \rightarrow \exists y \text{gira}(y, x))$

# Expresividad de la lógica de primer orden

- Representación de conocimiento astronómico
  - La Tierra no tiene ningún objeto que gire en torno a ella:  
 $\neg \exists x \text{ gira}(x, \text{Tierra})$
  - Algún planeta no tiene ningún objeto que gire en torno a él:  
 $\exists x (\text{planeta}(x) \rightarrow \neg \exists y \text{ gira}(y, x))$
  - Solo los planetas tienen objetos que giran alrededor de ellos:  
 $\forall x (\exists y \text{ gira}(y, x) \rightarrow \text{planeta}(x))$
  - Todo satélite gira alrededor de algún planeta:  
 $\forall x (\text{satelite}(x) \rightarrow \exists y (\text{planeta}(y) \wedge \text{gira}(x, y)))$
  - La Luna no gira alrededor de dos planetas distintos:  
 $\neg \exists x \exists y (\text{planeta}(x) \wedge \text{planeta}(y) \wedge \text{gira}(x, \text{Luna}) \wedge \text{gira}(y, \text{Luna}) \wedge x \neq y)$
  - Hay exactamente dos planetas:  
 $\exists x \exists y (\text{planeta}(x) \wedge \text{planeta}(y) \wedge x \neq y \wedge \forall z (\text{planeta}(z) \rightarrow z = x \vee z = y))$

- El conjunto de las **subfórmulas** de una fórmula:

$$\text{Subf}(F) = \begin{cases} \{F\} & \text{si } F \text{ es una fórmula atómica} \\ \{F\} \cup \text{Subf}(G) & \text{si } F \text{ es } \neg G \\ \{F\} \cup \text{Subf}(G_1) \cup \text{Subf}(G_2) & \text{si } F \text{ es } G_1 \star G_2 \\ \{F\} \cup \text{Subf}(G) & \text{si } F \text{ es } \forall x G \\ \{F\} \cup \text{Subf}(G) & \text{si } F \text{ es } \exists x G \end{cases}$$

- Ejemplo:

$$\begin{aligned} \text{Subf}(\forall x (R(x, c) \rightarrow P(f(y)))) = \\ \{\forall x (R(x, c) \rightarrow P(f(y))), R(x, c) \rightarrow P(f(y)), \\ R(x, c), P(f(y))\} \end{aligned}$$

- Conjunto de **variables de un término**:

$$V(t) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } t \text{ es una constante} \\ \{x\} & \text{si } t \text{ es la variable } x \\ V(t_1) \cup \dots \cup V(t_n) & \text{si } t \text{ es } f(t_1, \dots, t_n) \end{cases}$$

- Conjunto de **variables de una fórmula**:

$$V(F) = \begin{cases} V(t_1) \cup \dots \cup V(t_n) & \text{si } F \text{ es } P(t_1, \dots, t_n) \\ V(G) & \text{si } F \text{ es } \neg G \\ V(G_1) \cup V(G_2) & \text{si } F \text{ es } G_1 \star G_2 \\ V(G) & \text{si } F \text{ es } \forall x G \\ V(G) & \text{si } F \text{ es } \exists x G \end{cases}$$

- Ejemplos

- El conjunto de variables de  $\forall x (R(x) \rightarrow P(f(y)))$  es  $\{x, y\}$
- El conjunto de variables de  $\forall x (R(a) \rightarrow P(f(y)))$  es  $\{y\}$

- Apariciones libres y ligadas en una fórmula:
  - Una aparición de una variable  $x$  es **ligada** si ocurre en una subfórmula de la forma  $\forall x G$  o  $\exists x G$ .
  - Una aparición de una variable  $x$  es **libre** si no es ligada.
- Ejemplos:
  - $\forall x (P(x) \rightarrow R(x, y)) \rightarrow (\exists y P(y) \rightarrow R(y, x))$
  - $\exists x R(x, y) \vee \exists y P(y)$
  - $\forall x (P(x) \rightarrow \exists y R(x, y))$
  - $\forall z (P(x) \rightarrow R(x, y))$



# Variables

- Variables libres y ligadas en una fórmula:
  - Una variable  $x$  es libre si tiene una aparición libre.
  - Una variable  $x$  es ligada si tiene una aparición ligada.
  - Conjunto de las **variables libres** de una fórmula  $F$  es:

$$VL(F) = \begin{cases} V(t_1) \cup \dots \cup V(t_n) & \text{si } F \text{ es } P(t_1, \dots, t_n) \\ VL(G) & \text{si } F \text{ es } \neg G \\ VL(G_1) \cup VL(G_2) & \text{si } F \text{ es } G_1 \star G_2 \\ VL(G) - \{x\} & \text{si } F \text{ es } \forall x G \\ VL(G) - \{x\} & \text{si } F \text{ es } \exists x G \end{cases}$$

- Ejemplos:

|                                                                                         | V.Ligadas  | V.Libres   |
|-----------------------------------------------------------------------------------------|------------|------------|
| $\forall x (P(x) \rightarrow R(x, y)) \rightarrow (\exists y P(y) \rightarrow R(y, x))$ | $\{x, y\}$ | $\{x, y\}$ |
| $\forall x (P(x) \rightarrow \exists y R(x, y))$                                        | $\{x, y\}$ |            |
| $\forall z (P(x) \rightarrow R(x, y))$                                                  |            | $\{x, y\}$ |

# Fórmulas cerradas y abiertas

- Una **fórmula cerrada** (o **sentencia**) es una fórmula sin variables libres.
- Una **fórmula abierta** es una fórmula con variables libres.
- Ejemplos
  - $\forall x (P(x) \rightarrow \exists y R(x, y))$  es una fórmula cerrada.
  - $\exists x R(x, y) \vee \forall y P(y)$  es una fórmula abierta.

- Una **estructura del lenguaje** de primer orden  $\mathbf{L}$  es un par  $\mathcal{I} = (\mathbf{U}, \mathbf{I})$  tal que:
  - $\mathbf{U}$  es un conjunto no vacío, denominado **universo** de la estructura.
  - $\mathbf{I}$  es una función cuyo dominio es el conjunto de los símbolos propios del lenguaje  $\mathbf{L}$  tal que:
    - Si  $\mathbf{c}$  es una constante en  $\mathbf{L}$ , entonces  $\mathbf{I}(\mathbf{c}) \in \mathbf{U}$ .
    - Si  $\mathbf{f}$  es un símbolo de función  $n$ -ario en  $\mathbf{L}$ , entonces  $\mathbf{I}(\mathbf{f}) : \mathbf{U}^n \mapsto \mathbf{U}$ .
    - Si  $\mathbf{P}$  es un símbolo de predicado  $0$ -ario en  $\mathbf{L}$ , entonces  $\mathbf{I}(\mathbf{P}) \in \{0, 1\}$ .
    - Si  $\mathbf{P}$  es un símbolo de predicado  $n$ -ario en  $\mathbf{L}$  con  $n > 0$ , entonces  $\mathbf{I}(\mathbf{P}) \subseteq \mathbf{U}^n$ .
- Una estructura proporciona una interpretación  $\mathbf{I}$  de los símbolos propios de un lenguaje  $\mathbf{L}$  en un conjunto de individuos  $\mathbf{U}$ .

- Sea  $\mathbf{L}$  el lenguaje con los siguientes símbolos propios:
  - Una constante:  $\mathbf{0}$
  - Un símbolo de función monaria:  $\mathbf{s}$ .
  - Un símbolo de función binaria:  $\odot$ .
  - Un símbolo de relación binaria:  $\prec$ .
- Primera estructura para  $\mathbf{L}$ :  $\mathbf{U}_1 = \mathbb{N}$ 
  - $\mathbf{l}_1(\mathbf{0}) = 0$
  - $\mathbf{l}_1(\mathbf{s}) = \{n \Rightarrow n + 1 : n \in \mathbb{N}\}$  (funcion  $+^1$ )
  - $\mathbf{l}_1(\odot) = \{(n, m) \Rightarrow n + m : n, m \in \mathbb{N}\}$  (funcion  $*$ )
  - $\mathbf{l}_1(\prec) = \{(n, m) : n, m \in \mathbb{N}; n \leq m\}$
- Segunda estructura para  $\mathbf{L}$ :  $\mathbf{U}_2 = [\mathbf{01}]^*$  (cadenas de  $\mathbf{0}$  y  $\mathbf{1}$ )
  - $\mathbf{l}_2(\mathbf{0}) = \epsilon$
  - $\mathbf{l}_2(\mathbf{s}) = \{w \Rightarrow w\mathbf{1} : w \in [\mathbf{01}]^*\}$  (funcion  $\mathbf{@}^1$ )
  - $\mathbf{l}_2(\odot) = \{(w_1, w_2) \Rightarrow w_1 w_2 : w_1, w_2 \in [\mathbf{01}]^*\}$  (funcion  $\mathbf{@}$ )
  - $\mathbf{l}_2(\prec) = \{(w_1, w_2) : w_1, w_2 \in [\mathbf{01}]^*; w_1 \text{ es prefijo de } w_2\}$

# Asignaciones e Interpretaciones

- Una **asignación**  $\mathbf{A}$  en una estructura  $\mathcal{I} = (\mathbf{U}, \mathbf{I})$  para un lenguaje  $\mathbf{L}$  es una función  $\mathbf{A} : \mathbf{Var} \mapsto \mathbf{U}$ .
  - Una asignación hace corresponder a cada variable un individuo del universo de la estructura.
- Una **interpretación** de un lenguaje  $\mathbf{L}$  es un par  $(\mathcal{I}, \mathbf{A})$  formado por una estructura  $\mathcal{I}$  de  $\mathbf{L}$  y una asignación  $\mathbf{A}$  en  $\mathcal{I}$ .

- Dada una estructura  $\mathcal{I} = (\mathbf{U}, \mathbf{I})$  del lenguaje  $\mathbf{L}$  y una asignación  $\mathbf{A}$  en  $\mathcal{I}$ , entonces se define la **función de evaluación de términos**,  $\mathcal{I}_{\mathbf{A}} : \text{Term}(\mathbf{L}) \mapsto \mathbf{U}$ , como:

$$\mathcal{I}_{\mathbf{A}}(\mathbf{t}) = \begin{cases} \mathbf{I}(\mathbf{c}) & \text{si } \mathbf{t} \text{ es la constante } \mathbf{c} \\ \mathbf{A}(\mathbf{x}) & \text{si } \mathbf{t} \text{ es la variable } \mathbf{x} \\ \mathbf{I}(\mathbf{f})(\mathcal{I}_{\mathbf{A}}(\mathbf{t}_1), \dots, \mathcal{I}_{\mathbf{A}}(\mathbf{t}_n)) & \text{si } \mathbf{t} \text{ es } \mathbf{f}(\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_n) \end{cases}$$

- $\mathcal{I}_{\mathbf{A}}(\mathbf{t})$  es el valor de  $\mathbf{t}$  en  $\mathcal{I}$  respecto de  $\mathbf{A}$ .

# Evaluación de términos

- Consideramos el lenguaje  $\mathbf{L} = \{\mathbf{0}, \mathbf{s}, \odot, \prec\}$  y el término  $\mathbf{t} = \mathbf{s}(\mathbf{x} \odot \mathbf{s}(\mathbf{0}))$ .
- En la estructura  $\mathcal{I}^1 = (\mathbb{N}, \mathbf{l}_1)$  con  $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = 3$

$$\begin{aligned}\mathcal{I}^1_{\mathbf{A}}(\mathbf{t}) &= \mathcal{I}^1_{\mathbf{A}}(\mathbf{s}(\mathbf{x} \odot \mathbf{s}(\mathbf{0}))) \\ &= \mathbf{l}_1(\mathbf{s})(\mathbf{l}_1(\odot)(\mathbf{A}(\mathbf{x}), \mathbf{l}_1(\mathbf{s})(\mathbf{l}_1(\mathbf{0})))) \\ &= +^1(3 + +^1(0)) \\ &= 5\end{aligned}$$

- En la estructura  $\mathcal{I}^2 = ([01]^*, \mathbf{l}_2)$  con  $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = 10$

$$\begin{aligned}\mathcal{I}^2_{\mathbf{A}}(\mathbf{t}) &= \mathcal{I}^2_{\mathbf{A}}(\mathbf{s}(\mathbf{x} \odot \mathbf{s}(\mathbf{0}))) \\ &= \mathbf{l}_2(\mathbf{s})(\mathbf{l}_2(\odot)(\mathbf{A}(\mathbf{x}), \mathbf{l}_2(\mathbf{s})(\mathbf{l}_2(\mathbf{0})))) \\ &= @^1(10 @ @^1(\epsilon)) \\ &= 1011\end{aligned}$$

# Evaluación de fórmulas

- Dada una estructura  $\mathcal{I} = (\mathbf{U}, \mathbf{I})$  del lenguaje  $\mathbf{L}$  y una asignación  $\mathbf{A}$  en  $\mathcal{I}$ , entonces se define la **función de evaluación de fórmulas**,  $\mathcal{I}_{\mathbf{A}} : \mathbf{Form}(\mathbf{L}) \mapsto \mathbb{B}$ , como:

$$\mathcal{I}_{\mathbf{A}}(\mathbf{P}(t_1, \dots, t_n)) = \mathbf{H}_{\mathbf{I}(\mathbf{P})}(\mathcal{I}_{\mathbf{A}}(t_1), \dots, \mathcal{I}_{\mathbf{A}}(t_n))$$

$$\mathcal{I}_{\mathbf{A}}(\neg \mathbf{G}) = \mathbf{H}_{\neg}(\mathcal{I}_{\mathbf{A}}(\mathbf{G}))$$

$$\mathcal{I}_{\mathbf{A}}(\mathbf{G}_1 \star \mathbf{G}_2) = \mathbf{H}_{\star}(\mathcal{I}_{\mathbf{A}}(\mathbf{G}_1), \mathcal{I}_{\mathbf{A}}(\mathbf{G}_2))$$

$$\mathcal{I}_{\mathbf{A}}(\forall x \mathbf{G}) = \begin{cases} 1 & \text{si para todo } u \in \mathbf{U} \\ & \text{se tiene } \mathcal{I}_{\mathbf{A}[x/u]}(\mathbf{G}) = 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$\mathcal{I}_{\mathbf{A}}(\exists x \mathbf{G}) = \begin{cases} 1 & \text{si existe un } u \in \mathbf{U} \\ & \text{tal que } \mathcal{I}_{\mathbf{A}[x/u]}(\mathbf{G}) = 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

- $\mathcal{I}_{\mathbf{A}}(\mathbf{F})$  es el valor de  $\mathbf{F}$  en  $\mathcal{I}$  respecto de  $\mathbf{A}$ .



- $H_{\neg}$ ,  $H_{\wedge}$ ,  $H_{\vee}$ ,  $H_{\rightarrow}$  y  $H_{\leftrightarrow}$  son las funciones de verdad de las conectivas lógicas proposicionales.
- Si  $R$  es un subconjunto de  $U^n$ , entonces la **función de verdad** de  $R$  es:

$$H_R(u_1, \dots, u_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } (u_1, \dots, u_n) \in R \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

- Si  $A$  es una asignación en la estructura  $(U, I)$ ,  $x \in \mathbf{Var}$  y  $u \in U$ , entonces la **variante de la asignación  $A$**  para  $x$  igual a  $u$  es:

$$A[x/u](y) = \begin{cases} u & \text{si } y \text{ es la variable } x \\ A(y) & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

- Evaluación de  $\forall x \exists y P(x, y)$  en la estructura  $\mathcal{I} = (\mathbf{U}, \mathbf{I})$  tal que  $\mathbf{U} = \{1, 2\}$  e  $\mathbf{I}(P) = \{(1, 1), (2, 2)\}$ :

$$\mathcal{I}_A(\forall x \exists y P(x, y)) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathcal{I}_{A[x/1]}(\exists y P(x, y)) = 1 \\ & \text{y } \mathcal{I}_{A[x/2]}(\exists y P(x, y)) = 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$\mathcal{I}_{A[x/1]}(\exists y P(x, y)) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathcal{I}_{A[y/1, x/1]}(P(x, y)) = 1 \checkmark \\ & \text{o } \mathcal{I}_{A[y/2, x/1]}(P(x, y)) = 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{A[y/1, x/1]}(P(x, y)) &= H_{\mathbf{I}(P)}(\mathcal{I}_{A[y/1, x/1]}(x), \mathcal{I}_{A[y/1, x/1]}(y)) \\ &= H_{\mathbf{I}(P)}(\mathbf{A}[y/1, x/1](x), \mathbf{A}[y/1, x/1](y)) \\ &= H_{\mathbf{I}(P)}(1, 1) \\ &= 1 \text{ pues } (1, 1) \in \mathbf{I}(P) \end{aligned}$$

Por tanto  $\mathcal{I}_{A[x/1]}(\exists y P(x, y)) = 1$ .

- Evaluación de  $\forall x \exists y P(x, y)$  en la estructura  $\mathcal{I} = (\mathbf{U}, \mathbf{I})$  tal que  $\mathbf{U} = \{1, 2\}$  e  $\mathbf{I}(P) = \{(1, 1), (2, 2)\}$ :

$$\mathcal{I}_A(\forall x \exists y P(x, y)) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathcal{I}_{A[x/1]}(\exists y P(x, y)) = 1 \checkmark \\ & \text{y } \mathcal{I}_{A[x/2]}(\exists y P(x, y)) = 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$\mathcal{I}_{A[x/2]}(\exists y P(x, y)) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathcal{I}_{A[y/1, x/2]}(P(x, y)) = 1 \times \\ & \text{o } \mathcal{I}_{A[y/2, x/2]}(P(x, y)) = 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{A[y/1, x/2]}(P(x, y)) &= H_{\mathbf{I}(P)}(\mathcal{I}_{A[y/1, x/2]}(x), \mathcal{I}_{A[y/1, x/2]}(y)) \\ &= H_{\mathbf{I}(P)}(\mathbf{A}[y/1, x/2](x), \mathbf{A}[y/1, x/2](y)) \\ &= H_{\mathbf{I}(P)}(2, 1) \\ &= 0 \text{ pues } (2, 1) \notin \mathbf{I}(P) \end{aligned}$$

- Evaluación de  $\forall x \exists y P(x, y)$  en la estructura  $\mathcal{I} = (\mathbf{U}, \mathbf{I})$  tal que  $\mathbf{U} = \{1, 2\}$  e  $\mathbf{I}(P) = \{(1, 1), (2, 2)\}$ :

$$\mathcal{I}_{\mathbf{A}}(\forall x \exists y P(x, y)) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathcal{I}_{\mathbf{A}[x/1]}(\exists y P(x, y)) = 1 \checkmark \\ & \text{y } \mathcal{I}_{\mathbf{A}[x/2]}(\exists y P(x, y)) = 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$\mathcal{I}_{\mathbf{A}[x/2]}(\exists y P(x, y)) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathcal{I}_{\mathbf{A}[y/1, x/2]}(P(x, y)) = 1 \times \\ & \text{o } \mathcal{I}_{\mathbf{A}[y/2, x/2]}(P(x, y)) = 1 \checkmark \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{\mathbf{A}[y/2, x/2]}(P(x, y)) &= H_{\mathbf{I}(P)}(\mathcal{I}_{\mathbf{A}[y/2, x/2]}(x), \mathcal{I}_{\mathbf{A}[y/2, x/2]}(y)) \\ &= H_{\mathbf{I}(P)}(\mathbf{A}[y/2, x/2](x), \mathbf{A}[y/2, x/2](y)) \\ &= H_{\mathbf{I}(P)}(2, 2) \\ &= 1 \text{ pues } (2, 2) \in \mathbf{I}(P) \end{aligned}$$

Por tanto  $\mathcal{I}_{\mathbf{A}[x/2]}(\exists y P(x, y)) = 1$ .

- Evaluación de  $\forall x \exists y P(x, y)$  en la estructura  $\mathcal{I} = (\mathbf{U}, \mathbf{I})$  tal que  $\mathbf{U} = \{1, 2\}$  e  $\mathbf{I}(P) = \{(1, 1), (2, 2)\}$ :

$$\mathcal{I}_A(\forall x \exists y P(x, y)) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathcal{I}_{A[x/1]}(\exists y P(x, y)) = 1 \checkmark \\ & \text{y } \mathcal{I}_{A[x/2]}(\exists y P(x, y)) = 1 \checkmark \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Por tanto  $\mathcal{I}(\forall x \exists y P(x, y)) = 1$ .

- Evaluación de  $\forall x (g(g(x)) = x)$  en la estructura  $\mathcal{I} = (\mathbf{U}, \mathbf{I})$  tal que  $\mathbf{U} = \{1, 2\}$  e  $\mathbf{I}(g) = \{1 \Rightarrow 2, 2 \Rightarrow 1\}$ :

$$\mathcal{I}_{\mathbf{A}}(\forall x (g(g(x)) = x)) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathcal{I}_{\mathbf{A}[x/1]}(g(g(x)) = x) = 1 \\ & \text{y } \mathcal{I}_{\mathbf{A}[x/2]}(g(g(x)) = x) = 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{\mathbf{A}[x/1]}(g(g(x)) = x) &= H_{=}(\mathcal{I}_{\mathbf{A}[x/1]}(g(g(x))), \mathcal{I}_{\mathbf{A}[x/1]}(x)) \\ &= H_{=}(\mathbf{I}(g)(\mathcal{I}_{\mathbf{A}[x/1]}(g(x))), 1) \\ &= H_{=}(\mathbf{I}(g)(\mathbf{I}(g)(\mathcal{I}_{\mathbf{A}[x/1]}(x))), 1) \\ &= H_{=}(\mathbf{I}(g)(\mathbf{I}(g)(1)), 1) \\ &= H_{=}(\mathbf{I}(g)(2), 1) \\ &= H_{=}(1, 1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

- Evaluación de  $\forall x (g(g(x)) = x)$  en la estructura  $\mathcal{I} = (\mathbf{U}, \mathbf{I})$  tal que  $\mathbf{U} = \{1, 2\}$  e  $\mathbf{I}(g) = \{1 \Rightarrow 2, 2 \Rightarrow 1\}$ :

$$\mathcal{I}_A(\forall x (g(g(x)) = x)) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathcal{I}_{A[x/1]}(g(g(x)) = x) = 1 \checkmark \\ & \text{y } \mathcal{I}_{A[x/2]}(g(g(x)) = x) = 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{A[x/2]}(g(g(x)) = x) &= H_{=}(\mathcal{I}_{A[x/2]}(g(g(x))), \mathcal{I}_{A[x/2]}(x)) \\ &= H_{=}(\mathbf{I}(g)(\mathcal{I}_{A[x/2]}(g(x))), 2) \\ &= H_{=}(\mathbf{I}(g)(\mathbf{I}(g)(\mathcal{I}_{A[x/2]}(x))), 2) \\ &= H_{=}(\mathbf{I}(g)(\mathbf{I}(g)(2)), 2) \\ &= H_{=}(\mathbf{I}(g)(1), 2) \\ &= H_{=}(2, 2) \\ &= 1 \end{aligned}$$

- Evaluación de  $\forall x (g(g(x)) = x)$  en la estructura  $\mathcal{I} = (\mathbf{U}, \mathbf{I})$  tal que  $\mathbf{U} = \{1, 2\}$  e  $\mathbf{I}(g) = \{1 \Rightarrow 2, 2 \Rightarrow 1\}$ :

$$\mathcal{I}_A(\forall x (g(g(x)) = x)) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathcal{I}_{A[x/1]}(g(g(x)) = x) = 1 \checkmark \\ & \text{y } \mathcal{I}_{A[x/2]}(g(g(x)) = x) = 1 \checkmark \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Por tanto  $\mathcal{I}_A(\forall x (g(g(x)) = x)) = 1$ .



- Dependencia del Universo.

Sea  $\mathbf{F} = \forall \mathbf{x} \exists \mathbf{y} \mathbf{R}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ , entonces:

- $\mathcal{I}_{\mathbf{A}}(\mathbf{F}) = 1$  con  $\mathcal{I} = (\mathbb{Z}, \mathbf{I})$ ,  $\mathbf{I}(\mathbf{R}) = >$  y  $\mathbf{A}$  una asignación.
- $\mathcal{I}_{\mathbf{A}}(\mathbf{F}) = 0$  con  $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, \mathbf{I})$ ,  $\mathbf{I}(\mathbf{R}) = >$  y  $\mathbf{A}$  una asignación.

- Dependencia de la Estructura.

Sea  $\mathbf{F} = \exists \mathbf{x} \forall \mathbf{y} \mathbf{R}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ , entonces:

- $\mathcal{I}_{\mathbf{A}}(\mathbf{F}) = 1$  con  $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, \mathbf{I})$ ,  $\mathbf{I}(\mathbf{R}) = \leq$  y  $\mathbf{A}$  una asignación.
- $\mathcal{I}_{\mathbf{A}}(\mathbf{F}) = 0$  con  $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, \mathbf{I})$ ,  $\mathbf{I}(\mathbf{R}) = \geq$  y  $\mathbf{A}$  una asignación.

- Dependencia de la Asignación.

Sea  $\mathbf{F} = \forall \mathbf{y} \mathbf{R}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ , entonces:

- $\mathcal{I}_{\mathbf{A}}(\mathbf{F}) = 1$  con  $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, \mathbf{I})$ ,  $\mathbf{I}(\mathbf{R}) = \leq$  y  $\mathbf{A}$  una asignación en  $\mathcal{I}$  tal que  $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = 0$ .
- $\mathcal{I}_{\mathbf{A}}(\mathbf{F}) = 0$  con  $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, \mathbf{I})$ ,  $\mathbf{I}(\mathbf{R}) = \leq$  y  $\mathbf{A}$  una asignación en  $\mathcal{I}$  tal que  $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = 1$ .

# Evaluación de fórmulas

- Sea  $\mathbf{t}$  un término de  $\mathbf{L}$  e  $\mathcal{I}$  una estructura de  $\mathbf{L}$ :
  - Si  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  son dos asignaciones en  $\mathcal{I}$  que coinciden sobre las variables de  $\mathbf{t}$ , entonces  $\mathcal{I}_{\mathbf{A}}(\mathbf{t}) = \mathcal{I}_{\mathbf{B}}(\mathbf{t})$ .
  - Si  $\mathbf{t}$  no tiene variables, entonces  $\mathcal{I}_{\mathbf{A}}(\mathbf{t}) = \mathcal{I}_{\mathbf{B}}(\mathbf{t})$  para cualesquiera asignaciones  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  en  $\mathcal{I}$ .
- Sea  $\mathbf{F}$  una fórmula de  $\mathbf{L}$  e  $\mathcal{I}$  una estructura de  $\mathbf{L}$ :
  - Si  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  son dos asignaciones en  $\mathcal{I}$  que coinciden sobre las variables libres de  $\mathbf{F}$ , entonces  $\mathcal{I}_{\mathbf{A}}(\mathbf{F}) = \mathcal{I}_{\mathbf{B}}(\mathbf{F})$ .
  - Si  $\mathbf{F}$  es cerrada, entonces  $\mathcal{I}_{\mathbf{A}}(\mathbf{F}) = \mathcal{I}_{\mathbf{B}}(\mathbf{F})$  para cualesquiera asignaciones  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  en  $\mathcal{I}$ .

# Modelo de una fórmula

- Sea  $\mathbf{F}$  una fórmula de  $\mathbf{L}$  e  $\mathcal{I}$  una estructura de  $\mathbf{L}$ :
  - $(\mathcal{I}, \mathbf{A})$  es una **realización** de  $\mathbf{F}$  ( $\mathcal{I}_{\mathbf{A}} \models \mathbf{F}$ ), si  $\mathbf{A}$  es una asignación en  $\mathcal{I}$  tal que  $\mathcal{I}_{\mathbf{A}}(\mathbf{F}) = 1$ .
  - $\mathcal{I}$  es un **modelo** de  $\mathbf{F}$  ( $\mathcal{I} \models \mathbf{F}$ ), si para toda asignación  $\mathbf{A}$  en  $\mathcal{I}$  se tiene  $\mathcal{I}_{\mathbf{A}} \models \mathbf{F}$ .
- Ejemplos:
  - Sea  $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, \mathbf{I})$  una estructura tal que  $\mathbf{I}(f) = +$  e  $\mathbf{I}(g) = *$ .
    - Si  $\mathbf{A}$  es una asignación en  $\mathcal{I}$  tal que  $\mathbf{A}(x) = \mathbf{A}(y) = 2$ , entonces  $\mathcal{I}_{\mathbf{A}} \models f(x, x) = g(x, x)$ .
    - Si  $\mathbf{B}$  es una asignación en  $\mathcal{I}$  tal que  $\mathbf{B}(x) = 1$  y  $\mathbf{B}(y) = 2$ , entonces  $\mathcal{I}_{\mathbf{B}} \not\models f(x, x) = g(x, x)$ .
    - $\mathcal{I} \models f(x, y) = f(y, x)$
    - $\mathcal{I} \not\models f(x, y) = g(x, y)$

- Sea **F** una fórmula de **L**:
  - **F** es **válida** ( $\models F$ ) si toda estructura de **L** es un modelo de **F**.
    - Para toda estructura  $\mathcal{I}$  de **L** y toda asignación **A** en  $\mathcal{I}$  se tiene que  $\mathcal{I}_A(F) = 1$ .
  - **F** es **satisfacible** si tiene alguna realización.
    - Existe una estructura  $\mathcal{I}$  de **L** y una asignación **A** en  $\mathcal{I}$  tales que  $\mathcal{I}_A(F) = 1$ .
  - **F** es **insatisfacible** si no tiene ninguna realización.
    - Para toda estructura  $\mathcal{I}$  de **L** y toda asignación **A** en  $\mathcal{I}$  se tiene que  $\mathcal{I}_A(F) = 0$ .
- Ejemplos:
  - $\exists x P(x) \vee \forall x \neg P(x)$  es válida.
  - $\exists x P(x) \wedge \exists x \neg P(x)$  es satisfacible, pero no válida.
  - $\forall x P(x) \wedge \exists x \neg P(x)$  es insatisfacible.

- Relaciones entre estos conceptos:
  - $F$  es válida  $\iff \neg F$  es insatisfacible.
  - $F$  es válida  $\implies F$  es satisfacible.
  - $F$  es satisfacible  $\not\implies \neg F$  es insatisfacible.
- Sea  $F$  una fórmula en  $L$  y  $x_1, \dots, x_n$  las variables libres de  $F$ :
  - $F$  es válida  $\iff \forall x_1 \dots \forall x_n F$  es válida.  
La fórmula  $\forall x_1 \dots \forall x_n F$  es el **cierre universal** de  $F$ .
  - $F$  es satisfacible  $\iff \exists x_1 \dots \exists x_n F$  es satisfacible.  
La fórmula  $\exists x_1 \dots \exists x_n F$  es el **cierre existencial** de  $F$ .

# Fórmulas equivalentes

- Dos fórmulas **F** y **G** de un lenguaje **L** son **equivalentes** ( $F \equiv G$ ) si para toda estructura  $\mathcal{I}$  de **L** y toda asignación **A** en  $\mathcal{I}$  se tiene  $\mathcal{I}_A(F) = \mathcal{I}_A(G)$ .

- Equivalencias importantes:

- Las de las conectivas proposicionales.
- Conmutatividad de los cuantificadores:

$$\forall x \forall y F \equiv \forall y \forall x F$$

$$\exists x \exists y F \equiv \exists y \exists x F$$

- Cuantificadores con la negación:

$$\forall x (\neg F) \equiv \neg(\exists x F)$$

$$\exists x (\neg F) \equiv \neg(\forall x F)$$

- Cuantificador universal con la conjunción:

$$\forall x (F \wedge G) \equiv (\forall x F) \wedge (\forall x G)$$

- Cuantificador existencial con la disyunción:

$$\exists x (F \vee G) \equiv (\exists x F) \vee (\exists x G)$$

- Cuantificador existencial con la implicación:

$$\exists x (F \rightarrow G) \equiv (\forall x F) \rightarrow (\exists x G)$$

# Propiedades de la equivalencia lógica

- La equivalencia lógica es una relación de equivalencia
  - Reflexividad:  $\mathbf{F} \equiv \mathbf{F}$
  - Simetría: Si  $\mathbf{F} \equiv \mathbf{G}$ , entonces  $\mathbf{G} \equiv \mathbf{F}$ .
  - Transitividad: Si  $\mathbf{F} \equiv \mathbf{G}$  y  $\mathbf{G} \equiv \mathbf{H}$ , entonces  $\mathbf{F} \equiv \mathbf{H}$ .
- Principio de sustitución de fórmulas equivalentes: Si en una fórmula  $\mathbf{F}$  se sustituye una subfórmula  $\mathbf{G}$  por otra lógicamente equivalente  $\mathbf{G}'$ , entonces la fórmula obtenida  $\mathbf{F}'$  es lógicamente equivalente a la original.
  - $\mathbf{F} = \neg(\forall x \mathbf{P}(x)) \rightarrow \exists x \mathbf{Q}(x)$
  - $\mathbf{G} = \neg(\forall x \mathbf{P}(x))$
  - $\mathbf{G}' = \exists y \neg \mathbf{P}(y)$
  - $\mathbf{F}' = \exists y \neg \mathbf{P}(y) \rightarrow \exists x \mathbf{Q}(x)$

# Conjuntos de fórmulas

- Sea  $\mathbf{S}$  un conjunto de fórmulas de  $\mathbf{L}$ ,  $\mathcal{I}$  una estructura de  $\mathbf{L}$  y  $\mathbf{A}$  una asignación en  $\mathcal{I}$ :
  - $(\mathcal{I}, \mathbf{A})$  es una **realización** de  $\mathbf{S}$  ( $\mathcal{I}_{\mathbf{A}} \models \mathbf{S}$ ) si para toda  $\mathbf{F} \in \mathbf{S}$ , se tiene que  $(\mathcal{I}, \mathbf{A})$  es una realización de  $\mathbf{F}$ .
  - $\mathcal{I}$  es un **modelo** de  $\mathbf{S}$  ( $\mathcal{I} \models \mathbf{S}$ ) si para toda  $\mathbf{F} \in \mathbf{S}$ , se tiene que  $\mathcal{I} \models \mathbf{F}$ .
- Ejemplos:
  - Sea  $\mathbf{S} = \{\forall y \mathbf{R}(\mathbf{x}, y), \forall y \mathbf{f}(\mathbf{x}, y) = y\}$ 
    - $(\mathcal{I}, \mathbf{A})$  con  $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, \mathbf{I})$ ,  $\mathbf{I}(\mathbf{R}) = \leq$ ,  $\mathbf{I}(\mathbf{f}) = +$  y  $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = 0$  es una realización de  $\mathbf{S}$ .
    - $(\mathcal{I}, \mathbf{A})$  con  $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, \mathbf{I})$ ,  $\mathbf{I}(\mathbf{R}) = <$ ,  $\mathbf{I}(\mathbf{f}) = +$  y  $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = 0$  no es una realización de  $\mathbf{S}$ .
  - Sea  $\mathbf{S} = \{\mathbf{R}(\mathbf{e}, y), \mathbf{f}(\mathbf{e}, y) = y\}$ 
    - $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, \mathbf{I})$ ,  $\mathbf{I}(\mathbf{R}) = \leq$ ,  $\mathbf{I}(\mathbf{f}) = +$  e  $\mathbf{I}(\mathbf{e}) = 0$  es un modelo de  $\mathbf{S}$ .
    - $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, \mathbf{I})$ ,  $\mathbf{I}(\mathbf{R}) = <$ ,  $\mathbf{I}(\mathbf{f}) = +$  e  $\mathbf{I}(\mathbf{e}) = 0$  no es un modelo de  $\mathbf{S}$ .



# Conjuntos de fórmulas

- Sea **S** un conjunto de fórmulas de **L**:
  - **S** es **consistente** si tiene alguna realización.
  - **S** es **inconsistente** si no tiene ninguna realización.
- Ejemplos:
  - $\{\forall y R(x, y), \forall y f(x, y) = y\}$  es consistente
  - $\{P(x) \rightarrow Q(x), \forall y P(y), \neg Q(x)\}$  es inconsistente
- Si **S** es un conjunto de fórmulas cerradas de **L**, entonces **S** es consistente si y solo si **S** tiene algún modelo.

# Conjuntos de fórmulas

- Sea **F** una fórmula de **L** y **S** un conjunto de fórmulas de **L**:
  - **F** es **consecuencia lógica** de **S** ( $S \models F$ ) si todas las realizaciones de **S** lo son también de **F**.
- Ejemplos:
  - $\{\forall x P(x)\} \models P(y)$
  - $\{P(y)\} \not\models \forall x P(x)$
  - $\{\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)), P(c)\} \models Q(c)$
  - $\{\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)), Q(c)\} \not\models P(c)$
- $S \models F \iff S \cup \{\neg F\}$  es inconsistente.
- Si  $S \cup \{F\}$  es un conjunto de fórmulas cerradas de **L**, entonces son equivalentes:
  - **F** es consecuencia lógica de **S**.
  - Todos los modelos de **S** también lo son de **F**.

- Un cálculo lógico ( $\vdash$ ) es un procedimiento que permite comprobar la validez de una fórmula.
- Existen cálculos lógicos correctos ( $\vdash \implies \models$ ) y completos ( $\models \implies \vdash$ ) para la lógica de primer orden.
  - Generalmente se trata de extensiones de los cálculos proposicionales incluyendo los cuantificadores: tableros semánticos, secuentes, deducción natural, resolución, ...
- La lógica de primer orden es semidecidible: no existen procedimientos capaces de decidir en un número finito de pasos si una fórmula es válida o no.
  - Existen procedimientos capaces de responder afirmativamente si una fórmula es válida, pero que no son capaces de dar respuesta cuando no lo es.

- M. Ben-Ari. *Mathematical logic for computer science*  
Capítulo 7
- J.A. Díez. *Iniciación a la Lógica*  
Capítulos 6 y 7
- M. Huth y M. Ryan. *Logic in computer science: modelling and reasoning about systems*  
Capítulo 2