

Deducción natural en lógica de primer orden

Francisco J. Martín Mateos

Dpto. Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial
Universidad de Sevilla

- Una **sustitución** σ de un lenguaje L es una aplicación $\sigma : \mathbf{Var} \mapsto \mathbf{Term}(L)$
 - Representaremos por $[x_1/t_1, x_2/t_2, \dots, x_n/t_n]$ a la sustitución σ definida por:

$$\sigma(x) = \begin{cases} t_i & \text{si } x \text{ es } x_i \\ x & \text{si } x \notin \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \end{cases}$$

- Ejemplo: $[x/s(0), y/x + y]$ es la sustitución σ de $\mathbf{Var}$ en el conjunto de los términos de la aritmética definida por:

$$\sigma(z) = \begin{cases} s(0) & \text{si } z \text{ es } x \\ x + y & \text{si } z \text{ es } y \\ z & \text{si } z \in \mathbf{Var} \setminus \{x, y\} \end{cases}$$

- Notación:
 - Sustituciones de un lenguaje de primer orden: $\sigma, \sigma_1, \sigma_2$

- La extensión (única) de una sustitución σ al conjunto de términos de un lenguaje L es la aplicación $\sigma : \mathbf{Term}(L) \mapsto \mathbf{Term}(L)$ definida por:

$$\sigma(t) = \begin{cases} c & \text{si } t \text{ es una constante } c \\ \sigma(x) & \text{si } t \text{ es una variable } x \\ f(\sigma(t_1), \dots, \sigma(t_n)) & \text{si } t \text{ es } f(t_1, \dots, t_n) \end{cases}$$

- Notación: $t[x_1/t_1, \dots, x_n/t_n]$ es el término obtenido al aplicar sobre el término t la sustitución representada por $[x_1/t_1, \dots, x_n/t_n]$
- Ejemplos: Si $\sigma = [x/f(y, a), y/z]$, entonces
 - $\sigma(a) = a$, donde a es una constante
 - $\sigma(w) = w$, donde w es una variable distinta de x e y
 - $\sigma(h(a, x, w)) = h(a, f(y, a), w)$
 - $\sigma(f(x, y)) = f(f(y, a), z)$
 - $\sigma(h(a, f(x, y), w)) = h(a, f(f(y, a), z), w)$

- La extensión (única) de una sustitución σ al conjunto de las fórmulas de un lenguaje L es la aplicación $\sigma : \mathbf{Form}(L) \mapsto \mathbf{Form}(L)$ definida por:

$$\sigma(F) = \begin{cases} P(\sigma(t_1), \dots, \sigma(t_n)) & \text{si } F \text{ es } P(t_1, \dots, t_n) \\ \neg(\sigma(G)) & \text{si } F \text{ es } \neg G \\ \sigma(G_1) \star \sigma(G_2) & \text{si } F \text{ es } G_1 \star G_2 \\ \forall x \sigma_x(G) & \text{si } F \text{ es } \forall x G \\ \exists x \sigma_x(G) & \text{si } F \text{ es } \exists x G \end{cases}$$

donde σ_x es la sustitución definida por

$$\sigma_x(y) = \begin{cases} x & \text{si } y \text{ es la variable } x \\ \sigma(y) & \text{si } y \text{ es distinta de } x \end{cases}$$

- Notación: $F[x_1/t_1, \dots, x_n/t_n]$ es la fórmula obtenida al aplicar a la fórmula F la sustitución representada por $[x_1/t_1, \dots, x_n/t_n]$

- Ejemplos: Si $\sigma = [x/f(y), y/b]$, entonces
 - $\sigma(\forall x (Q(x) \rightarrow R(x, y))) = \forall x (\sigma_x(Q(x) \rightarrow R(x, y)))$
 $= \forall x (\sigma_x(Q(x)) \rightarrow \sigma_x(R(x, y)))$
 $= \forall x (Q(x) \rightarrow R(x, b))$
 - $\sigma(Q(x) \rightarrow \forall x R(x, y)) = \sigma(Q(x)) \rightarrow \sigma(\forall x R(x, y))$
 $= Q(f(x)) \rightarrow \forall x \sigma_x(R(x, y))$
 $= Q(f(x)) \rightarrow \forall x R(x, b)$
 - $\sigma(\forall x (Q(x) \rightarrow \forall y R(x, y))) = \forall x (\sigma_x(Q(x) \rightarrow \forall y R(x, y)))$
 $= \forall x (\sigma_x(Q(x)) \rightarrow \sigma_x(\forall y R(x, y)))$
 $= \forall x (Q(x) \rightarrow \forall y \sigma_{x,y}(R(x, y)))$
 $= \forall x (Q(x) \rightarrow \forall y R(x, y))$

- Una sustitución es **libre para una fórmula** si todas las ocurrencias de variables introducidas por la sustitución en esa fórmula resultan libres
- Ejemplos
 - La sustitución $[y/x]$ no es libre para $\exists x (x < y)$
 $(\exists x (x < y))[y/x] = \exists x (x < x)$
 - La sustitución $[y/g(y)]$ es libre para $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x, y))$
 $(\forall x (P(x) \rightarrow Q(x, y)))[y/g(y)] = \forall x (P(x) \rightarrow Q(x, g(y)))$
 - La sustitución $[y/g(x)]$ no es libre para $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x, y))$
 $(\forall x (P(x) \rightarrow Q(x, y)))[y/g(x)] = \forall x (P(x) \rightarrow Q(x, g(x)))$
- De forma general al escribir $\sigma(\mathbf{F})$ supondremos que σ es una sustitución libre para la fórmula $\mathbf{F}$.

Reglas del cuantificador universal

- Regla de eliminación del cuantificador universal

$$\frac{\forall x \mathbf{F}}{\mathbf{F[x/t]}} [\forall e]$$

donde $\mathbf{[x/t]}$ es una sustitución libre para $\mathbf{F}$

- Analogía con las reglas $\wedge e_1$ y $\wedge e_2$
- Nota: $\forall x \exists y (x < y) \not\vdash \exists y (y < y)$

Reglas del cuantificador universal

$\{P(c), \forall x (P(x) \rightarrow \neg Q(x))\} \vdash \neg Q(c)$

- | | | |
|----|--|-------------------------|
| 1. | $P(c)$ | premisa |
| 2. | $\forall x (P(x) \rightarrow \neg Q(x))$ | premisa |
| 3. | $P(c) \rightarrow \neg Q(c)$ | $[\forall e\ 2]$ |
| 4. | $\neg Q(c)$ | $[\rightarrow e\ 3\ 1]$ |

Reglas del cuantificador universal

- Regla de introducción del cuantificador universal

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c} \mathbf{x_0} \\ \vdots \\ \mathbf{F[x/x_0]} \end{array}}}{\forall \mathbf{x} \mathbf{F}} [\forall \mathbf{i}]$$

donde $\mathbf{x_0}$ es una variable nueva, que no aparece fuera de la caja

- Analogía con la regla $\wedge \mathbf{i}$

Reglas del cuantificador universal

$\{\forall x (P(x) \rightarrow \neg Q(x)), \forall x P(x)\} \vdash \forall x \neg Q(x)$

- | | | |
|----|--|-------------------------|
| 1. | $\forall x (P(x) \rightarrow \neg Q(x))$ | premisa |
| 2. | $\forall x P(x)$ | premisa |
| 3. | x_0 | variable nueva |
| 4. | $P(x_0) \rightarrow \neg Q(x_0)$ | $[\forall e\ 1]$ |
| 5. | $P(x_0)$ | $[\forall e\ 2]$ |
| 6. | $\neg Q(x_0)$ | $[\rightarrow e\ 4\ 5]$ |
| 7. | $\forall x \neg Q(x)$ | $[\forall i\ 3-6]$ |

Reglas del cuantificador existencial

- Regla de introducción del cuantificador existencial

$$\frac{F[x/t]}{\exists x F} [\exists i]$$

donde $[x/t]$ es una sustitución libre para F

- Analogía con las reglas $\forall i_1$ y $\forall i_2$

$$\{\forall x P(x)\} \vdash \exists x P(x)$$

1. $\forall x P(x)$ premisa
2. $P(x_0)$ $[\forall e 1]$
3. $\exists x P(x)$ $[\exists i 2]$

Reglas del cuantificador existencial

- Regla de eliminación del cuantificador existencial

$$\frac{\exists x F \quad \boxed{\begin{array}{c} x_0 \quad F[x/x_0] \\ \vdots \\ G \end{array}}}{G} [\exists e]$$

donde x_0 es una variable nueva, que no aparece fuera de la caja

- Analogía con la regla $\forall e$

Reglas del cuantificador existencial

$\{\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)), \exists x P(x)\} \vdash \exists x Q(x)$

- | | | |
|----|-------------------------------------|-------------------------|
| 1. | $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$ | premisa |
| 2. | $\exists x P(x)$ | premisa |
| 3. | $x_0, P(x_0)$ | supuesto |
| 4. | $P(x_0) \rightarrow Q(x_0)$ | $[\forall e\ 1]$ |
| 5. | $Q(x_0)$ | $[\rightarrow e\ 4\ 3]$ |
| 6. | $\exists x Q(x)$ | $[\exists i\ 5]$ |
| 7. | $\exists x Q(x)$ | $[\exists e\ 2\ 3-6]$ |

Equivalencia: $\neg\forall x F \equiv \exists x \neg F$

$$\{\neg\forall x P(x)\} \vdash \exists x \neg P(x)$$

- | | | |
|-----|---------------------------|---------------------|
| 1. | $\neg\forall x P(x)$ | premisa |
| 2. | $\neg\exists x \neg P(x)$ | supuesto |
| 3. | x_0 | variable nueva |
| 4. | $\neg P(x_0)$ | supuesto |
| 5. | $\exists x \neg P(x)$ | $[\exists i \ 4]$ |
| 6. | $\perp$ | $[\neg e \ 2 \ 5]$ |
| 7. | $P(x_0)$ | $[RAA \ 4-6]$ |
| 8. | $\forall x P(x)$ | $[\forall i \ 3-7]$ |
| 9. | $\perp$ | $[\neg e \ 1 \ 8]$ |
| 10. | $\exists x \neg P(x)$ | $[RAA \ 2-9]$ |

Equivalencia: $\neg\forall x F \equiv \exists x \neg F$

$$\{\exists x \neg P(x)\} \vdash \neg\forall x P(x)$$

- | | | |
|----|-----------------------|-----------------------|
| 1. | $\exists x \neg P(x)$ | premisa |
| 2. | $\forall x P(x)$ | supuesto |
| 3. | $x_0, \neg P(x_0)$ | supuesto |
| 4. | $P(x_0)$ | $[\forall e\ 2]$ |
| 5. | $\perp$ | $[\neg e\ 3\ 4]$ |
| 6. | $\perp$ | $[\exists e\ 1\ 3-5]$ |
| 7. | $\neg\forall x P(x)$ | $[\neg i\ 2-7]$ |

Equivalencia: $\forall x (F \wedge G) \equiv \forall x F \wedge \forall x G$

$\{\forall x (P(x) \wedge Q(x))\} \vdash \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$

- | | | |
|-----|--|--------------------|
| 1. | $\forall x (P(x) \wedge Q(x))$ | premisa |
| 2. | x_0 | variable nueva |
| 3. | $P(x_0) \wedge Q(x_0)$ | $[\forall e\ 1]$ |
| 4. | $P(x_0)$ | $[\wedge e_1\ 3]$ |
| 5. | $\forall x P(x)$ | $[\forall i\ 2-4]$ |
| 6. | x_1 | variable nueva |
| 7. | $P(x_1) \wedge Q(x_1)$ | $[\forall e\ 1]$ |
| 8. | $Q(x_1)$ | $[\wedge e_2\ 7]$ |
| 9. | $\forall x Q(x)$ | $[\forall i\ 6-8]$ |
| 10. | $\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$ | $[\wedge i\ 5\ 9]$ |

Equivalencia: $\forall x (F \wedge G) \equiv \forall x F \wedge \forall x G$

$\{\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)\} \vdash \forall x (P(x) \wedge Q(x))$

- | | | |
|----|--|-------------------|
| 1. | $\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$ | premisa |
| 2. | x_0 | variable nueva |
| 3. | $\forall x P(x)$ | $[\wedge e_1 1]$ |
| 4. | $P(x_0)$ | $[\forall e 2]$ |
| 5. | $\forall x Q(x)$ | $[\wedge e_2 1]$ |
| 6. | $Q(x_0)$ | $[\forall e 4]$ |
| 7. | $P(x_0) \wedge Q(x_0)$ | $[\wedge i 4 6]$ |
| 8. | $\forall x (P(x) \wedge Q(x))$ | $[\forall i 2-7]$ |

Equivalencia: $\exists x (F \vee G) \equiv \exists x F \vee \exists x G$

$\{\exists x (P(x) \vee Q(x))\} \vdash \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$

- | | | |
|-----|--------------------------------------|----------------------------|
| 1. | $\exists x (P(x) \vee Q(x))$ | premisa |
| 2. | $x_0, P(x_0) \vee Q(x_0)$ | supuesto |
| 3. | $P(x_0)$ | supuesto |
| 4. | $\exists x P(x)$ | $[\exists i \ 3]$ |
| 5. | $\exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$ | $[\vee i_1 \ 4]$ |
| 6. | $Q(x_0)$ | supuesto |
| 7. | $\exists x Q(x)$ | $[\exists i \ 6]$ |
| 8. | $\exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$ | $[\vee i_2 \ 7]$ |
| 9. | $\exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$ | $[\vee e \ 2 \ 3-5 \ 6-8]$ |
| 10. | $\exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$ | $[\exists e \ 1 \ 2-9]$ |

Equivalencia: $\exists x (F \vee G) \equiv \exists x F \vee \exists x G$

$\{\exists x P(x) \vee \exists x Q(x)\} \vdash \exists x (P(x) \vee Q(x))$

- | | | |
|-----|--------------------------------------|-----------------------|
| 1. | $\exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$ | premisa |
| 2. | $\exists x P(x)$ | supuesto |
| 3. | $x_0, P(x_0)$ | supuesto |
| 4. | $P(x_0) \vee Q(x_0)$ | $[\vee i_1 3]$ |
| 5. | $\exists x (P(x) \vee Q(x))$ | $[\exists i 4]$ |
| 6. | $\exists x (P(x) \vee Q(x))$ | $[\exists e 2\ 3-5]$ |
| 7. | $\exists x Q(x)$ | supuesto |
| 8. | $x_0, Q(x_0)$ | supuesto |
| 9. | $P(x_0) \vee Q(x_0)$ | $[\vee i_2 8]$ |
| 10. | $\exists x (P(x) \vee Q(x))$ | $[\exists i 9]$ |
| 11. | $\exists x (P(x) \vee Q(x))$ | $[\exists e 7\ 8-10]$ |
| 12. | $\exists x (P(x) \vee Q(x))$ | $[\vee e 1\ 2-9]$ |

Equivalencia: $\exists x \exists y F \equiv \exists y \exists x F$

$\{\exists x \exists y P(x, y)\} \vdash \exists y \exists x P(y, x)$

- | | | |
|----|-------------------------------|----------------------|
| 1. | $\exists x \exists y P(x, y)$ | premisa |
| 2. | $x_0, \exists y P(x_0, y)$ | supuesto |
| 3. | $y_0, P(x_0, y_0)$ | supuesto |
| 4. | $\exists x P(x, y_0)$ | [$\exists i$ 3] |
| 5. | $\exists y \exists x P(x, y)$ | [$\exists i$ 4] |
| 6. | $\exists y \exists x P(x, y)$ | [$\exists e$ 2 3-5] |
| 7. | $\exists y \exists x P(x, y)$ | [$\exists e$ 1 2-6] |

Reglas de la igualdad

- Regla de eliminación de la igualdad

$$\frac{t_1 = t_2 \quad F[x/t_1]}{F[x/t_2]} [=e]$$

donde $[x/t_1]$ y $[x/t_2]$ son sustituciones libres para F

- Regla de sustitución de izquierda a derecha

$$\{x + y = z, x + y > 0\} \vdash z > 0$$

1. $x + y = z$ premisa
2. $x + y > 0$ premisa
3. $z > 0$ [=e 1 2]

Reglas de la igualdad

- Regla de introducción de la igualdad

$$\frac{}{t = t} [=i]$$

- Se trata de la reflexividad de la igualdad
- Simetría de la igualdad

$$\{s = t\} \vdash t = s$$

1. $s = t$ premisa
2. $s = s$ $[=i]$
3. $t = s$ $[=e \ 1 \ 2]$

- Transitividad de la igualdad

$$\{r = s, s = t\} \vdash r = t$$

1. $r = s$ premisa
2. $s = t$ premisa
3. $r = t$ [=e 2 1]

- Regla de sustitución de derecha a izquierda

$$\{t = s, P(s)\} \vdash P(t)$$

1. $t = s$ premisa
2. $P(s)$ premisa
3. $t = t$ [=i]
4. $s = t$ [=e 1 3]
5. $P(t)$ [=e 4 2]

- C. Badesa, I. Jané y R. Jansana *Elementos de lógica formal*
Capítulo 16
- J.A. Díez. *Iniciación a la Lógica*
Capítulo 8
- M. Huth y M. Ryan. *Logic in computer science: modelling and reasoning about systems*
Capítulo 2.3