Lógica Matemática y Fundamentos (Curso 2022-2023)
Grado en Matemáticas

Relación 1: Sintaxis y semántica de la lógica proposicional

Ejercicio 1:
Formalizar el siguiente argumento:

> Si Juan es andaluz entonces Juan es europeo. Efectivamente, Juan es andaluz. Por lo tanto, Juan es europeo.

Usando los símbolos:
A para "Juan es andaluz" y
E para "Juan es europeo".

Ejercicio 2:
Formalizar el siguiente argumento:

> Cuando tanto la temperatura como la presión atmosférica permanecen constantes, no llueve. La temperatura permanece constante. Por lo tanto, en caso de que llueva, la presión atmosférica no permanece constante.

Usando los símbolos:
T para "la temperatura permanece constante",
P para "la presión atmosférica permanece constante" y
L para "llueve".

Ejercicio 3:
Formalizar el siguiente argumento:

> Siempre que un número x es divisible por 10, acaba en 0. El número x no acaba en 0. Por lo tanto, x no es divisible por 10.

Usando los símbolos:
D para "el número es divisible por 10" y
C para "el número acaba en cero".

Ejercicio 4:
Formalizar el siguiente argumento:

> En cierto experimento, cuando hemos empleado un fármaco A, el paciente ha mejorado considerablemente en el caso, y sólo en el caso, en que no se haya empleado también un fármaco B. Además, o se ha empleado el fármaco A o se ha empleado el fármaco B. En consecuencia, podemos afirmar que si no hemos empleado el fármaco B, el paciente ha mejorado considerablemente.

Usando los símbolos:
A para "hemos empleado el fármaco A",
B para "hemos empleado el fármaco B" y
M para "el paciente ha mejorado notablemente".

Ejercicio 5:
Formalizar el siguiente argumento:

> Si no está el mañana ni el ayer escrito, entonces no está el mañana escrito.

Usando los símbolos:
M para "el mañana está escrito" y
A para "el ayer está escrito".

Ejercicio 6:
Formalizar el siguiente argumento:

> Me matan si no trabajo y si trabajo me matan. Me matan siempre me matan.

Usando los símbolos:
M para "me matan" y
T para "trabajo".

Ejercicio 7:
Formalizar el siguiente argumento:

> Si te llamé por teléfono, entonces recibiste mi llamada y no es cierto que no te avisé del peligro que corrías. Por consiguiente, como te llamé, es cierto que te avisé del peligro que corrías.

Usando los símbolos:
T para "te llamé por teléfono",
R para "recibiste mi llamada" y
P para "te avisé del peligro que corrías".

Ejercicio 8:
Formalizar el siguiente argumento:

> Si no hay control de nacimientos, entonces la población crece ilimitadamente; pero si la población crece ilimitadamente, aumentará el índice de pobreza. Por consiguiente, si no hay control de nacimientos, aumentará el índice de pobreza.

Usando los símbolos:
N para "hay control de nacimientos",
P para "la población crece ilimitadamente" y
I para "aumentará el índice de pobreza".

Ejercicio 9:
Formalizar el siguiente argumento:

> Si el general era leal, hubiera obedecido las órdenes, y si era inteligente las hubiera comprendido. O el general desobedeció las órdenes o no las comprendió. Luego, el general era desleal o no era inteligente.

Usando los símbolos:
L para "el general es leal",
Ob para "el general obedece las órdenes",
I para "el general es inteligente" y
C para "el general comprende las órdenes".

Ejercicio 10:
Formalizar el siguiente argumento:

> Si Zeus fuera capaz de evitar el mal y quisiera hacerlo, lo haría. Si Zeus fuera incapaz de evitar el mal, no sería omnipotente; si no quisiera evitar el mal sería malévolo. Zeus no evita el mal. Si Zeus existe, es omnipotente y no es malévolo. Luego, Zeus no existe.

Usando los símbolos:
C para ”Zeus es capaz de evitar el mal”,
Q para ”Zeus quiere evitar el mal”,
Om para ”Zeus es omnipotente”,
M para ”Zeus es malévolo”,
P para ”Zeus evita el malz
E para ”Zeus existe”.

Ejercicio 11:
Formalizar el siguiente argumento:

> Nadie más que Pedro, Quintín y Raúl están bajo sospecha y al menos uno es traidor. Si Quintín es el traidor entonces lleva al menos un cómplice (que puede ser Pedro o Raúl). Raúl es leal. Por lo tanto, Pedro es traidor.

Usando los símbolos:
P para “Pedro es traidor”,
Q para “Quintín es traidor” y
R para “Raúl es traidor”.

Ejercicio 12:
Formalizar el siguiente argumento:

> Si la válvula está abierta o la monitorización está preparada, entonces se envía una señal de reconocimiento y un mensaje de funcionamiento al controlador del ordenador. Si se envía un mensaje de funcionamiento al controlador del ordenador o el sistema está en estado normal, entonces se aceptan las órdenes del operador. Por lo tanto, si la válvula está abierta, entonces se aceptan las órdenes del operador.

Usando los símbolos:
A para “la válvula está abierta”,
P para “la monitorización está preparada”,
R para “envía una señal de reconocimiento”,
F para “envía un mensaje de funcionamiento”,
N para “el sistema está en estado normal” y
Or para “se aceptan órdenes del operador”.

Ejercicio 13:
Formalizar el siguiente argumento:

> Si trabajo gano dinero, pero si no trabajo gozo de la vida. Sin embargo, si trabajo no gozo de la vida, mientras que si no trabajo no gano dinero. Por lo tanto, gozo de la vida si y sólo si no gano dinero.

Usando los símbolos:
T para “trabajo”,
D para “gano dinero” y
V para “gozo de la vida”.

Ejercicio 14:
Definir por recursión sobre fórmulas las siguientes funciones:

- $nv(F)$, que calcula el número variables proposicionales que ocurren en la fórmula F.
  Por ejemplo, $nv(p \longrightarrow p \vee q) = 3$.
- $prof(F)$ que calcula la profundidad del árbol de análisis de la fórmula F.
  Por ejemplo, $prof(p \longrightarrow p \vee q) = 2$.

Demostrar por inducción, que para toda fórmula F, $nv(F) \leq 2^{prof(F)}$.

Ejercicio 15:
¿Existe un conjunto S de tres fórmulas tal que de todos los subconjuntos de S sólo uno sea consistente?

Ejercicio 16:
¿Es cierto que si $F \longrightarrow G$ y F son satisfacibles, entonces G es satisfacible? Si es cierto, dar una explicación. Si no es cierto, dar un contraejemplo.

Ejercicio 17:
Demostrar o refutar las siguientes afirmaciones:

1. Si F es una fórmula satisfacible, entonces todas las subfórmulas de F son satisfacibles.
2. Existen tautologías tales que todas sus subfórmulas son tautologías.
3. Si $F \longrightarrow G$ es insatisfacible, entonces F es tautología.
4. Si $F \longrightarrow G$ es tautología, entonces F es insatisfacible.

Ejercicio 18:
Sean S y T conjuntos de fórmulas. Demostrar o refutar las siguientes afirmaciones:

1. Si S es consistente y T es inconsistente, entonces $S \cup T$ es inconsistente.
2. Si S es consistente y T es inconsistente, entonces $S \cap T$ es inconsistente.
3. Si S es consistente y T es inconsistente, entonces $S \cup T$ es consistente.
4. Si S es consistente y T es inconsistente, entonces $S \cap T$ es consistente.

Ejercicio 19:
Da un ejemplo de tres fórmulas F_1, F_2, F_3 tales que $F_1 \wedge F_2 \wedge F_3$ sea insatisfactible y donde cualquier conjunción de todas ellas menos una sea satisfactible. Generalízalo a n fórmulas.

Ejercicio 20:

1. Probar que la fórmula $(((p \longrightarrow q) \longrightarrow p) \longrightarrow p)$ es una tautología
2. Si definimos recursivamente $A_0 = (p \longrightarrow q)$ y $A_{n+1} = A_n \longrightarrow p$, ¿para qué valores de n es A_n es una tautología?