Deducción natural en lógica proposicional

Francisco J. Martín Mateos

Dpto. Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial
Universidad de Sevilla

Deducción natural en lógica proposicional

- Cálculo lógico que pretende capturar la forma en la que el ser humano realiza sus razonamientos
  - No se consideran axiomas (hechos asumidos como verdaderos)
  - Se consideran dos reglas de inferencia para cada conectiva, una para introducirla y otra para eliminarla
  - Se construyen reglas derivadas a partir de las básicas
- Una prueba mediante deducción natural establece una relación entre un conjunto de fórmulas (premisas) y una conclusión.
  - La relación se alcanza haciendo uso de un conjunto de reglas que deducen una nueva relación a partir de otras
  - El proceso de deducción se basa en la estructura sintáctica de las fórmulas
  - Notación: $\mathbf{S} \vdash_{\mathbf{DN}} \mathbf{F}$ o simplemente $\mathbf{S} \vdash \mathbf{F}$

Regla de la premisa

- Regla de introducción de una premisa

$$\frac{\mathbf{F}}{\mathbf{F}}\ [\mathbf{p}]$$

  - Si $\mathbf{F} \in \mathbf{S}$ entonces $\mathbf{S} \vdash \mathbf{F}$
- Expresa la posibilidad de reutilizar cualquier fórmula anterior en una prueba

Reglas de la conjunción

- Regla de introducción de la conjunción

$$\frac{\mathbf{F} \quad \mathbf{G}}{\mathbf{F} \wedge \mathbf{G}} [\wedge \mathbf{i}]$$

  - Si $\mathbf{S} \vdash \mathbf{F}$ y $\mathbf{S} \vdash \mathbf{G}$ entonces $\mathbf{S} \vdash \mathbf{F} \wedge \mathbf{G}$
- Reglas de eliminación de la conjunción

$$\frac{\mathbf{F} \wedge \mathbf{G}}{\mathbf{F}} [\wedge \mathbf{e_1}] \qquad \frac{\mathbf{F} \wedge \mathbf{G}}{\mathbf{G}} [\wedge \mathbf{e_2}]$$

  - Si $\mathbf{S} \vdash \mathbf{F} \wedge \mathbf{G}$ entonces $\mathbf{S} \vdash \mathbf{F}$
  - Si $\mathbf{S} \vdash \mathbf{F} \wedge \mathbf{G}$ entonces $\mathbf{S} \vdash \mathbf{G}$

Reglas de la conjunción

$$\{p \land q, r\} \vdash q \land r$$

1.	$p \land q$	[p]
2.	r	[p]
3.	q	[$\land e_2$ 1]
4.	$q \land r$	[$\land i$ 3 2]

Reglas de la doble negación

- Regla de introducción de la doble negación

$$\frac{\mathbf{F}}{\neg\neg\mathbf{F}}\,[\neg\neg\mathbf{i}]$$

  - Si $\mathbf{S} \vdash \mathbf{F}$ entonces $\mathbf{S} \vdash \neg\neg\mathbf{F}$

- Reglas de eliminación de la doble negación

$$\frac{\neg\neg\mathbf{F}}{\mathbf{F}}\,[\neg\neg\mathbf{e}]$$

  - Si $\mathbf{S} \vdash \neg\neg\mathbf{F}$ entonces $\mathbf{S} \vdash \mathbf{F}$

Reglas de la doble negación

$$\{p, \neg\neg(q \land r)\} \vdash \neg\neg p \land r$$

1.	p	[p]
2.	$\neg\neg(q \land r)$	[p]
3.	$\neg\neg p$	[$\neg\neg$i 1]
4.	$q \land r$	[$\neg\neg$e 2]
5.	r	[$\land e_2$ 4]
6.	$\neg\neg p \land r$	[$\land$i 3 5]

Reglas del condicional

- Regla de eliminación del condicional (*modus ponens*)

$$\frac{\mathbf{F} \to \mathbf{G} \quad \mathbf{F}}{\mathbf{G}}\,[\to\mathbf{e}]$$

  - Si $\mathbf{S} \vdash \mathbf{F} \to \mathbf{G}$ y $\mathbf{S} \vdash \mathbf{F}$ entonces $\mathbf{S} \vdash \mathbf{G}$

Reglas del condicional

$\{p, p \rightarrow q, p \rightarrow (q \rightarrow r)\} \vdash r$

1.	p	[p]
2.	$p \rightarrow q$	[p]
3.	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	[p]
4.	q	[$\rightarrow$e 2 1]
5.	$q \rightarrow r$	[$\rightarrow$e 3 1]
6.	r	[$\rightarrow$e 5 4]

Reglas del condicional

- Regla *modus tollens*

$$\frac{\mathbf{F} \to \mathbf{G} \quad \neg \mathbf{G}}{\neg \mathbf{F}} \ \textbf{[MT]}$$

  - Si $\mathbf{S} \vdash \mathbf{F} \to \mathbf{G}$ y $\mathbf{S} \vdash \neg \mathbf{G}$ entonces $\mathbf{S} \vdash \neg \mathbf{F}$

Reglas del condicional

$\{p \to (q \to r), p, \neg r\} \vdash \neg q$

1.	$p \to (q \to r)$	[p]
2.	p	[p]
3.	$\neg r$	[p]
4.	$q \to r$	[$\to$e 1 2]
5.	$\neg q$	[MT 4 3]

Reglas del condicional

- Regla de introducción del condicional

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c}\mathbf{F} \\ \vdots \\ \mathbf{G}\end{array}}}{\mathbf{F} \rightarrow \mathbf{G}}\ [\rightarrow\mathbf{i}]$$

  - Si $\mathbf{S} \cup \{\mathbf{F}\} \vdash \mathbf{G}$ entonces $\mathbf{S} \vdash \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{G}$

Reglas del condicional

$\{p \to q\} \vdash \neg q \to \neg p$

1.	$p \to q$	[p]
2.	$\neg q$	supuesto
3.	$\neg p$	[MT 1 2]
4.	$\neg q \to \neg p$	[→i 2-3]

$\vdash p \to (q \to p)$

1.	p	supuesto
2.	q	supuesto
3.	p	[p 1]
4.	$q \to p$	[→i 2-3]
5.	$p \to (q \to p)$	[→i 1-4]

Reglas del condicional

$\{\neg q \to \neg p\} \vdash p \to \neg\neg q$

1.	$\neg q \to \neg p$	[p]
2.	p	supuesto
3.	$\neg\neg p$	[$\neg\neg$**i** 2]
4.	$\neg\neg q$	[**MT** 1 3]
5.	$p \to \neg\neg q$	[$\to$**i** 2-4]

Reglas del condicional

$\vdash (q \to r) \to ((\neg q \to \neg p) \to (p \to r))$

1.	$q \to r$	supuesto
2.	$\neg q \to \neg p$	supuesto
3.	p	supuesto
4.	$\neg\neg p$	[$\neg\neg$i 3]
5.	$\neg\neg q$	[MT 2 4]
6.	q	[$\neg\neg$e 5]
7.	r	[$\to$e 1 6]
8.	$p \to r$	[$\to$i 3-7]
9.	$(\neg q \to \neg p) \to (p \to r)$	[$\to$i 2-8]
10.	$(q \to r) \to ((\neg q \to \neg p) \to (p \to r))$	[$\to$i 1-9]

Reglas de la disyunción

- Reglas de introducción de la disyunción

$$\frac{\mathbf{F}}{\mathbf{F} \vee \mathbf{G}}[\vee \mathbf{i}_1] \qquad \frac{\mathbf{G}}{\mathbf{F} \vee \mathbf{G}}[\vee \mathbf{i}_2]$$

  - Si $\mathbf{S} \vdash \mathbf{F}$ entonces $\mathbf{S} \vdash \mathbf{F} \vee \mathbf{G}$
  - Si $\mathbf{S} \vdash \mathbf{G}$ entonces $\mathbf{S} \vdash \mathbf{F} \vee \mathbf{G}$

- Regla de elimininación de la disyunción

$$\dfrac{\mathbf{F} \lor \mathbf{G} \quad \boxed{\begin{array}{c}\mathbf{F}\\ \vdots \\ \mathbf{H}\end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{c}\mathbf{G}\\ \vdots \\ \mathbf{H}\end{array}}}{\mathbf{H}} \; [\lor \mathbf{e}]$$

- Si $\mathbf{S} \vdash \mathbf{F} \lor \mathbf{G}$, $\mathbf{S} \cup \{\mathbf{F}\} \vdash \mathbf{H}$ y $\mathbf{S} \cup \{\mathbf{G}\} \vdash \mathbf{H}$, entonces $\mathbf{S} \vdash \mathbf{H}$

Reglas de la disyunción

$$\{\mathbf{q} \to \mathbf{r}\} \vdash \mathbf{p} \lor \mathbf{q} \to \mathbf{p} \lor \mathbf{r}$$

1.	$\mathbf{q} \to \mathbf{r}$	[p]
2.	$\mathbf{p} \lor \mathbf{q}$	supuesto
3.	$\mathbf{p}$	supuesto
4.	$\mathbf{p} \lor \mathbf{r}$	[$\lor$**i**$_1$ 3]
5.	$\mathbf{q}$	supuesto
6.	$\mathbf{r}$	[$\to$**e** 1 5]
7.	$\mathbf{p} \lor \mathbf{r}$	[$\lor$**i**$_2$ 6]
8.	$\mathbf{p} \lor \mathbf{r}$	[$\lor$**e** 2 3-4 5-7]
9.	$\mathbf{p} \lor \mathbf{q} \to \mathbf{p} \lor \mathbf{r}$	[$\to$**i** 2-8]

Reglas del bicondicional

- Regla de introducción del bicondicional

$$\frac{\mathbf{F} \rightarrow \mathbf{G} \quad \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{F}}{\mathbf{F} \leftrightarrow \mathbf{G}} [\leftrightarrow \mathbf{i}]$$

  - Si $\mathbf{S} \vdash \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{G}$ y $\mathbf{S} \vdash \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{F}$ entonces $\mathbf{S} \vdash \mathbf{F} \leftrightarrow \mathbf{G}$

Reglas del bicondicional

$\vdash \mathbf{p \land q \leftrightarrow q \land p}$

1.	$\boxed{\mathbf{p \land q}}$	supuesto
2.	$\mathbf{p}$	$[\land \mathbf{e_1}\ 1]$
3.	$\mathbf{q}$	$[\land \mathbf{e_2}\ 1]$
4.	$\mathbf{q \land p}$	$[\land \mathbf{i}\ 3\ 2]$
5.	$\mathbf{p \land q \to q \land p}$	$[\to \mathbf{i}\ 1\text{-}4]$
6.	$\mathbf{q \land p}$	supuesto
7.	$\mathbf{q}$	$[\land \mathbf{e_1}\ 6]$
8.	$\mathbf{p}$	$[\land \mathbf{e_2}\ 6]$
9.	$\mathbf{p \land q}$	$[\land \mathbf{i}\ 7\ 8]$
10.	$\mathbf{q \land p \to p \land q}$	$[\to \mathbf{i}\ 6\text{-}9]$
11.	$\mathbf{p \land q \leftrightarrow q \land p}$	$[\leftrightarrow \mathbf{i}\ 5\ 10]$

Reglas del bicondicional

- Reglas de eliminación del bicondicional

$$\frac{\mathbf{F} \leftrightarrow \mathbf{G}}{\mathbf{F} \to \mathbf{G}} \, [\leftrightarrow e_1] \qquad \frac{\mathbf{F} \leftrightarrow \mathbf{G}}{\mathbf{G} \to \mathbf{F}} \, [\leftrightarrow e_2]$$

  - Si $\mathbf{S} \vdash \mathbf{F} \leftrightarrow \mathbf{G}$ entonces $\mathbf{S} \vdash \mathbf{F} \to \mathbf{G}$
  - Si $\mathbf{S} \vdash \mathbf{F} \leftrightarrow \mathbf{G}$ entonces $\mathbf{S} \vdash \mathbf{G} \to \mathbf{F}$

Reglas del bicondicional

$\{p \leftrightarrow q, p \vee q\} \vdash p \wedge q$

1.	$p \leftrightarrow q$	[p]
2.	$p \vee q$	[p]
3.	p	supuesto
4.	$p \rightarrow q$	[$\leftrightarrow e_1$ 1]
5.	q	[$\rightarrow e$ 4 3]
6.	$p \wedge q$	[$\wedge i$ 3 5]
7.	q	supuesto
8.	$q \rightarrow p$	[$\leftrightarrow e_2$ 1]
9.	p	[$\rightarrow e$ 8 7]
10.	$p \wedge q$	[$\wedge i$ 9 7]
11.	$p \wedge q$	[$\vee e$ 2 3-6 7-10]

Reglas de la negación

- Extensiones de la lógica para usar $\bot$ (Falso)
  - Sintaxis: $\bot$ es una fórmula proposicional
  - Semántica: $\mathbf{I}(\bot) = \mathbf{0}$ para cualquier interpretación $\mathbf{I}$
- Regla de eliminación de falso

$$\frac{\bot}{\mathbf{F}}\ [\bot \mathbf{e}]$$

  - Si $\mathbf{S} \vdash \bot$ entonces $\mathbf{S} \vdash \mathbf{F}$
- Regla de eliminación de la negación

$$\frac{\neg \mathbf{F} \quad \mathbf{F}}{\bot}\ [\neg \mathbf{e}]$$

  - Si $\mathbf{S} \vdash \neg \mathbf{F}$ y $\mathbf{S} \vdash \mathbf{F}$ entonces $\mathbf{S} \vdash \bot$

Reglas de la negación

$\{\neg p \lor q\} \vdash p \rightarrow q$

1.	$\neg p \lor q$	[p]
2.	p	supuesto
3.	$\neg p$	supuesto
4.	$\perp$	[¬e 3 2]
5.	q	[⊥e 4]
6.	q	supuesto
7.	q	[∨e 1 3-5 6-6]
8.	$p \rightarrow q$	[→i 2-7]

- Regla de introducción de la negación:

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c}\mathbf{F} \\ \vdots \\ \bot\end{array}}}{\neg \mathbf{F}}\,[\neg \mathbf{i}]$$

  - Si $\mathbf{S} \cup \{\mathbf{F}\} \vdash \bot$ entonces $\mathbf{S} \vdash \neg \mathbf{F}$

Reglas de la negación

$\{p \to q, p \to \neg q\} \vdash \neg p$

1.	$p \to q$	[p]
2.	$p \to \neg q$	[p]
3.	p	supuesto
4.	q	[$\to$e 1 3]
5.	$\neg q$	[$\to$e 2 3]
6.	$\bot$	[$\neg$e 5 4]
7.	$\neg p$	[$\neg$i 3-6]

Reglas derivadas

- Algunas reglas se pueden obtener a partir de otras
  - Regla *modus tollens*
  - Regla de introducción de la doble negación
  - Regla de eliminación de falso
- Otras reglas derivadas
  - Regla de reducción al absurdo
  - Regla del tercio excluido

- Regla *modus tollens*

$$\frac{\mathbf{F \rightarrow G} \quad \neg\mathbf{G}}{\neg\mathbf{F}}\ [\mathbf{MT}]$$

Derivación

1.	$\mathbf{F \rightarrow G}$	[**p**]
2.	$\neg\mathbf{G}$	[**p**]
3.	$\mathbf{F}$	supuesto
4.	$\mathbf{G}$	[$\rightarrow$**e** 1 3]
5.	$\perp$	[$\neg$**e** 2 4]
6.	$\neg\mathbf{F}$	[$\neg$**i** 3-5]

Reglas derivadas

- Regla de introducción de la doble negación

$$\frac{\mathbf{F}}{\neg\neg\mathbf{F}}\ [\neg\neg\mathbf{i}]$$

Derivación

1.	$\mathbf{F}$	[**p**]
2.	$\neg\mathbf{F}$	supuesto
3.	$\perp$	[$\neg$**e** 2 1]
4.	$\neg\neg\mathbf{F}$	[$\neg$**i** 2-3]

- Regla de eliminación de falso

$$\frac{\bot}{F}\ [\bot e]$$

Derivación

1.	$\bot$	[p]
2.	$\neg F$	supuesto
3.	$\bot$	[p 1]
4.	$\neg\neg F$	[$\neg$i 2-3]
5.	F	[$\neg\neg$e 4]

- Regla de reducción al absurdo

$$\dfrac{\boxed{\begin{array}{c}\neg \mathbf{F} \\ \vdots \\ \bot\end{array}}}{\mathbf{F}}\ [\mathbf{RAb}]$$

Derivación

1.	$\neg \mathbf{F} \to \bot$	[**p**]
2.	$\neg \mathbf{F}$	supuesto
3.	$\bot$	[$\to$**e** 1 2]
4.	$\neg\neg \mathbf{F}$	[$\neg$**i** 2-3]
5.	$\mathbf{F}$	[$\neg\neg$**e** 4]

- Ley del tercio excluido

$$\frac{}{\mathbf{F} \vee \neg \mathbf{F}}\ \textbf{[LEM]}$$

Derivación

1.	$\neg(\mathbf{F} \vee \neg \mathbf{F})$	supuesto
2.	$\mathbf{F}$	supuesto
3.	$\mathbf{F} \vee \neg \mathbf{F}$	$[\vee\mathbf{i_1}\ 2]$
4.	$\perp$	$[\neg\mathbf{e}\ 1\ 3]$
5.	$\neg \mathbf{F}$	$[\neg\mathbf{i}\ 2\text{-}4]$
6.	$\mathbf{F} \vee \neg \mathbf{F}$	$[\vee\mathbf{i_2}\ 5]$
7.	$\perp$	$[\neg\mathbf{e}\ 1\ 6]$
8.	$\mathbf{F} \vee \neg \mathbf{F}$	$[\mathbf{RAb}\ 1\text{-}7]$

Reglas derivadas

$$\{p \to q\} \vdash \neg p \vee q$$

1.	$p \to q$	[p]
2.	$p \vee \neg p$	[LEM]
3.	p	supuesto
4.	q	[$\to$e 1 3]
5.	$\neg p \vee q$	[$\vee$i$_2$ 4]
6.	$\neg p$	supuesto
7.	$\neg p \vee q$	[$\vee$i$_1$ 6]
8.	$\neg p \vee q$	[$\vee$e 2 3-5 6-7]

Demostración por deducción natural

- Razonar hacia adelante aplicando reglas de eliminación
- Razonar hacia atrás aplicando reglas de introducción
- Usar la estructura de la fórmula para orientar la demostración
- Si una prueba directa no funciona o no sugiere reglas a aplicar, entonces intentar la prueba por reducción al absurdo

Corrección y completitud del cálculo de Deducción Natural

Deducción en el cálculo de Deducción Natural

Dados un conjunto finito de fórmulas $\mathbf{S}$ y una fórmula $\mathbf{F}$. Decimos que $\mathbf{F}$ se deduce a partir de $\mathbf{S}$ mediante el cálculo de Deducción Natural ($\mathbf{S} \vdash \mathbf{F}$) si hay una secuencia finita de pares $\mathbf{S_0} \vdash \mathbf{F_0}$, $\mathbf{S_1} \vdash \mathbf{F_1}$, ..., $\mathbf{S_n} \vdash \mathbf{F_n}$ tales que

- $\mathbf{S_n} = \mathbf{S}$, $\mathbf{F_n} = \mathbf{F}$ y
- para todo $\mathbf{i = 0, \dots, n}$, el par $\mathbf{S_i} \vdash \mathbf{F_i}$ se deduce a partir de pares anteriores mediante alguna de las reglas del cálculo de Deducción Natural.

Deducción en el cálculo de Deducción Natural

Las reglas del cálculo de Deducción Natural son las siguientes:

- **[p]**: Si $\mathbf{F} \in \mathbf{S}$ entonces $\mathbf{S} \vdash \mathbf{F}$
- **[$\wedge$i]**: Si $\mathbf{S} \vdash \mathbf{F}$ y $\mathbf{S} \vdash \mathbf{G}$ entonces $\mathbf{S} \vdash \mathbf{F} \wedge \mathbf{G}$
- **[$\wedge$e$_1$]**: Si $\mathbf{S} \vdash \mathbf{F} \wedge \mathbf{G}$ entonces $\mathbf{S} \vdash \mathbf{F}$
- **[$\wedge$e$_2$]**: Si $\mathbf{S} \vdash \mathbf{F} \wedge \mathbf{G}$ entonces $\mathbf{S} \vdash \mathbf{G}$
- **[$\neg\neg$i]**: Si $\mathbf{S} \vdash \mathbf{F}$ entonces $\mathbf{S} \vdash \neg\neg\mathbf{F}$
- **[$\neg\neg$e]**: Si $\mathbf{S} \vdash \neg\neg\mathbf{F}$ entonces $\mathbf{S} \vdash \mathbf{F}$
- **[$\rightarrow$e]**: Si $\mathbf{S} \vdash \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{G}$ y $\mathbf{S} \vdash \mathbf{F}$ entonces $\mathbf{S} \vdash \mathbf{G}$
- **[$\rightarrow$i]**: Si $\mathbf{S} \cup \{\mathbf{F}\} \vdash \mathbf{G}$ entonces $\mathbf{S} \vdash \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{G}$

Las reglas del cálculo de Deducción Natural son las siguientes:

- $[\vee \mathbf{i_1}]$: Si $\mathbf{S} \vdash \mathbf{F}$ entonces $\mathbf{S} \vdash \mathbf{F} \vee \mathbf{G}$
- $[\vee \mathbf{i_2}]$: Si $\mathbf{S} \vdash \mathbf{G}$ entonces $\mathbf{S} \vdash \mathbf{F} \vee \mathbf{G}$
- $[\vee \mathbf{e}]$: Si $\mathbf{S} \vdash \mathbf{F} \vee \mathbf{G}$, $\mathbf{S} \cup \{\mathbf{F}\} \vdash \mathbf{H}$ y $\mathbf{S} \cup \{\mathbf{G}\} \vdash \mathbf{H}$, entonces $\mathbf{S} \vdash \mathbf{H}$
- $[\leftrightarrow \mathbf{i}]$: Si $\mathbf{S} \vdash \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{G}$ y $\mathbf{S} \vdash \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{F}$ entonces $\mathbf{S} \vdash \mathbf{F} \leftrightarrow \mathbf{G}$
- $[\leftrightarrow \mathbf{e_1}]$: Si $\mathbf{S} \vdash \mathbf{F} \leftrightarrow \mathbf{G}$ entonces $\mathbf{S} \vdash \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{G}$
- $[\leftrightarrow \mathbf{e_2}]$: Si $\mathbf{S} \vdash \mathbf{F} \leftrightarrow \mathbf{G}$ entonces $\mathbf{S} \vdash \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{F}$
- $[\bot \mathbf{e}]$: Si $\mathbf{S} \vdash \bot$ entonces $\mathbf{S} \vdash \mathbf{F}$
- $[\neg \mathbf{e}]$: Si $\mathbf{S} \vdash \neg \mathbf{F}$ y $\mathbf{S} \vdash \mathbf{F}$ entonces $\mathbf{S} \vdash \bot$
- $[\neg \mathbf{i}]$: Si $\mathbf{S} \cup \{\mathbf{F}\} \vdash \bot$ entonces $\mathbf{S} \vdash \neg \mathbf{F}$

- **Teorema de corrección**: Sea **S** un conjunto finito de fórmulas y F una fórmula:

  $$\text{si } \mathbf{S} \vdash \mathbf{F} \text{ entonces } \mathbf{S} \models \mathbf{F}$$

  - Demostración por inducción fuerte en la longitud de la deducción $\mathbf{S} \vdash \mathbf{F}$

- **Lema de monotonía**: Sean $\mathbf{S}$ y $\mathbf{S'}$ dos conjuntos finitos de fórmulas tales que $\mathbf{S} \subseteq \mathbf{S'}$ y $\mathbf{F}$ una fórmula:

$$\text{si } \mathbf{S} \vdash \mathbf{F} \text{ entonces } \mathbf{S'} \vdash \mathbf{F}$$

  - Demostración por inducción fuerte en la longitud de la deducción $\mathbf{S} \vdash \mathbf{F}$

Propiedades del cálculo de Deducción Natural

- **Teorema de completitud**: Sea **S** un conjunto finito de fórmulas y F una fórmula:

$$\text{si } \mathbf{S} \models \mathbf{F} \text{ entonces } \mathbf{S} \vdash \mathbf{F}$$

  - Demostración usando los **Lemas L1**, **L2** y **L3**.

Propiedades del cálculo de Deducción Natural

- **Lema L1**: Dado $S = \{H_1, \ldots, H_n\}$ un conjunto de fórmulas y F una fórmula tal que $S \models F$, entonces

  $$\models H_1 \to (H_2 \to (\ldots \to (H_n \to F) \ldots))$$

  para $n = 0$ (S es el conjunto vacío), simplemente $\models F$.
- **Lema L2**: Para toda fórmula F tal que $\models F$ (es decir, para toda tautología F) se tiene $\emptyset \vdash F$.
- **Lema L3**: Dado $S = \{H_1, \ldots, H_n\}$ un conjunto de fórmulas y F una fórmula tal que

  $$\emptyset \vdash H_1 \to (H_2 \to (\ldots \to (H_n \to F) \ldots))$$

  entonces $S \vdash F$.

Para la demostración del **Lema 2**:

- Sea $\mathbf{I} : \mathbf{VP} \longrightarrow \mathbb{B}$ y $\mathbf{p} \in \mathbf{VP}$, definimos la fórmula $\mathbf{p}^{\mathbf{I}}$ de la siguiente forma:

$$\mathbf{p}^{\mathbf{I}} = \begin{cases} \mathbf{p} & \text{si } \mathbf{I}(\mathbf{p}) = 1 \\ \neg \mathbf{p} & \text{si } \mathbf{I}(\mathbf{p}) = 0 \end{cases}$$

- **Propiedad P1**: Para cualquier fórmula $\mathbf{F}$ con $\mathbf{VP}(\mathbf{F}) = \{\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n\}$ y para cualquier $\mathbf{I} : \mathbf{VP} \longrightarrow \mathbb{B}$:
  - Si $\mathbf{I}(\mathbf{F}) = 1$ entonces $\{\mathbf{p}_1^{\mathbf{I}}, \dots, \mathbf{p}_n^{\mathbf{I}}\} \vdash \mathbf{F}$.
  - Si $\mathbf{I}(\mathbf{F}) = 0$ entonces $\{\mathbf{p}_1^{\mathbf{I}}, \dots, \mathbf{p}_n^{\mathbf{I}}\} \vdash \neg \mathbf{F}$.
- **Propiedad P2**: Para cualquier fórmula $\mathbf{F}$ y $\{\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n\} \subseteq \mathbf{VP}$: si para cualquier $\mathbf{I} : \mathbf{VP} \longrightarrow \mathbb{B}$ se cumple $\{\mathbf{p}_1^{\mathbf{I}}, \dots, \mathbf{p}_n^{\mathbf{I}}\} \vdash \mathbf{F}$ entonces $\emptyset \vdash \mathbf{F}$.

Demostración aplicativa en Isabelle

Demostración aplicativa en Isabelle

- La táctica `rule`
  - Objetivo: $\{\mathbf{H_1}, \ldots, \mathbf{H_m}\} \Longrightarrow \mathbf{C}$
  - Regla: $\{\mathbf{P_1}, \ldots, \mathbf{P_n}\} \Longrightarrow \mathbf{Q}$
  - Unificación: Hacer iguales **C** y **Q**
  - Nuevos objetivos: $\{\mathbf{H_1}, \ldots, \mathbf{H_m}\} \Longrightarrow \mathbf{P_1}$

$$\vdots$$

$$\{\mathbf{H_1}, \ldots, \mathbf{H_m}\} \Longrightarrow \mathbf{P_n}$$

- La táctica `erule`
  - Objetivo: $\{\mathbf{H_1}, \dots, \mathbf{H_j}, \dots, \mathbf{H_m}\} \Longrightarrow \mathbf{C}$
  - Regla: $\{\mathbf{P_1}, \dots, \mathbf{P_n}\} \Longrightarrow \mathbf{Q}$
  - Unificación: Hacer iguales $\mathbf{C}$ y $\mathbf{Q}$; y $\mathbf{P_1}$ y $\mathbf{H_j}$
  - Nuevos objetivos: $\{\mathbf{H_1}, \dots, \mathbf{H_{j-1}}, \mathbf{H_{j+1}}, \dots, \mathbf{H_m}\} \Longrightarrow \mathbf{P_2}$

$$\vdots$$

$$\{\mathbf{H_1}, \dots, \mathbf{H_{j-1}}, \mathbf{H_{j+1}}, \dots, \mathbf{H_m}\} \Longrightarrow \mathbf{P_n}$$

Demostración aplicativa en Isabelle

- La táctica `frule`
  - Objetivo: $\{\mathbf{H_1, \ldots, H_j, \ldots, H_m}\} \Longrightarrow \mathbf{C}$
  - Regla: $\{\mathbf{P_1, \ldots, P_n}\} \Longrightarrow \mathbf{Q}$
  - Unificación: Hacer iguales $\mathbf{P_1}$ y $\mathbf{H_j}$
  - Nuevos objetivos: $\{\mathbf{H_1, \ldots, H_m}\} \Longrightarrow \mathbf{P_2}$

$$\vdots$$

$$\{\mathbf{H_1, \ldots, H_m}\} \Longrightarrow \mathbf{P_n}$$
$$\{\mathbf{H_1, \ldots, H_m, Q}\} \Longrightarrow \mathbf{C}$$

- La táctica **`drule`**
  - Objetivo: $\{\mathbf{H_1, \dots, H_j, \dots, H_m}\} \Longrightarrow \mathbf{C}$
  - Regla: $\{\mathbf{P_1, \dots, P_n}\} \Longrightarrow \mathbf{Q}$
  - Unificación: Hacer iguales $\mathbf{P_1}$ y $\mathbf{H_j}$
  - Nuevos objetivos: $\{\mathbf{H_1, \dots, H_{j-1}, H_{j+1}, \dots, H_m}\} \Longrightarrow \mathbf{P_2}$

$$\vdots$$

$$\{\mathbf{H_1, \dots, H_{j-1}, H_{j+1}, \dots, H_m}\} \Longrightarrow \mathbf{P_n}$$

$$\{\mathbf{H_1, \dots, H_{j-1}, H_{j+1}, \dots, H_m, Q}\} \Longrightarrow \mathbf{C}$$

Bibliografía

- C. Badesa, I. Jané y R. Jansana *Elementos de lógica formal*
  Capítulo 16
- J.A. Díez. *Iniciación a la Lógica*
  Capítulo 4
- M. Huth y M. Ryan. *Logic in computer science: modelling and reasoning about systems*
  Capítulo 1
- E. Paniagua, J.L. Sánchez y F. Martín *Lógica computacional*
  Capítulo 3.6