Sintaxis y semántica de la lógica de primer orden

Francisco J. Martín Mateos

Dpto. Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial
Universidad de Sevilla

Limitación expresiva de la lógica proposicional

- Si Sevilla es vecina de Cádiz, entonces Cádiz es vecina de Sevilla. Sevilla es vecina de Cádiz. Por tanto, Cádiz es vecina de Sevilla.
  - Formalización en lógica proposicional: $\{\mathbf{SvC} \to \mathbf{CvS}, \mathbf{SvC}\} \models \mathbf{CvS}$
- Si una provincia es vecina de otra, entonces la segunda es vecina de la primera. Sevilla es vecina de Cádiz. Por tanto, Cádiz es vecina de Sevilla.
  - Formalización en lógica proposicional: Imposible.
  - Es necesario poder hacer referencia a individuos genéricos caracterizados por funciones.
    - *Ser una provincia*
    - *Ser vecinas*

Lenguaje de primer orden

- Símbolos lógicos
  - Variables: $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$, ..., $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$, ...
  - Conectivas lógicas: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$
  - Cuantificadores:
    - Cuantificador universal: $\forall$
    - Cuantificador existencial: $\exists$
- Símbolos propios
  - Constantes de individuos: $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, ..., $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$, ...
  - Predicados (con aridad): $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, ..., $\mathbf{P_1}$, $\mathbf{P_2}$, ...
  - Funciones (con aridad): $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$, $\mathbf{h}$, ..., $\mathbf{f_1}$, $\mathbf{f_2}$, ...
- Símbolos auxiliares: **(**, **)**, **,**

- Notación:
  - Lenguajes de primer orden: $\mathbf{L}$, $\mathbf{L_1}$, ...
  - Conjunto de las variables: **Var**
- Observaciones:
  - Un lenguaje de primer orden se describe con sus constantes, predicados y funciones propias. Los símbolos lógicos siempre están presentes en el lenguaje.
  - Los símbolos de predicado de aridad 1 (un argumento) se llaman propiedades.
  - Los símbolos de predicado de aridad mayor que 1 (dos o más argumentos) se llaman relaciones.
  - La mayoría de los lenguajes de primer orden incluyen el predicado de igualdad ($=$), de dos argumentos.

Lenguaje de primer orden

- Lenguaje de la vecindad entre provincias:
  - Símbolos de constantes: $\{\textbf{Sevilla}, \textbf{Cadiz}\}$
  - Símbolos de predicado: $\{\textbf{provincia}, \textbf{vecinas}\}$
  - Símbolos de función: $\{\}$
- Lenguaje de la aritmética natural:
  - Símbolos de constantes: $\{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \ldots\}$
  - Símbolos de predicado: $\{<, \leq, =, \ldots\}$
  - Símbolos de función: $\{+, -, *\}$

Términos

- **Términos** en un lenguaje de primer orden $\mathbf{L}$:
  - Las variables son términos de $\mathbf{L}$.
  - Las constantes de $\mathbf{L}$ son términos de $\mathbf{L}$.
  - Si $\mathbf{f}$ es un símbolo de función de $\mathbf{L}$ de aridad $\mathbf{n}$ (o $\mathbf{n}$-aria) y $\mathbf{t_1, \dots, t_n}$ son términos de $\mathbf{L}$, entonces $\mathbf{f(t_1, \dots, t_n)}$ es un término de $\mathbf{L}$.
- Notación:
  - Términos de un lenguaje de primer orden: $\mathbf{t}$, $\mathbf{s}$, ..., $\mathbf{t_1}$, $\mathbf{t_2}$, ...
  - Conjunto de términos del lenguaje $\mathbf{L}$: $\mathbf{Term(L)}$
- Ejemplos:
  - En el lenguaje de la vecindad entre provincias: **Sevilla**, **Cadiz**.
  - En el lenguaje de la aritmética: $\mathbf{+(*(x,1),y)}$ (o $\mathbf{(x * 1) + y}$).

Fórmulas atómicas

- **Fórmulas atómicas** en un lenguaje de primer orden **L**:
  - Si **P** es un símbolo de predicado **n**-ario y $\mathbf{t_1},\dots,\mathbf{t_n}$ son términos del lenguaje **L**, entonces $\mathbf{P(t_1,\dots,t_n)}$ es una fórmula atómica.
- Notación:
  - Fórmulas atómicas de un lenguaje de primer orden: **A**, **B**, ..., $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$, ...
  - Conjunto de fórmulas atómicas del lenguaje **L**: **Atom(L)**
- Ejemplos:
  - En el lenguaje de la vecindad entre provincias: **provincia(x)**, **vecinas(Cadiz, y)**.
  - En el lenguaje de la aritmética: $<\mathbf{(x,*(2,s(x)))}$ (o $\mathbf{x} < \mathbf{2} * \mathbf{s(x)}$).

Fórmulas

- **Fórmulas** en un lenguaje de primer orden $\mathbf{L}$:
  - Las fórmulas atómicas de $\mathbf{L}$ son fórmulas en $\mathbf{L}$.
  - Si $\mathbf{F}$ y $\mathbf{G}$ son fórmulas en $\mathbf{L}$, entonces $(\neg \mathbf{F})$, $(\mathbf{F} \wedge \mathbf{G})$, $(\mathbf{F} \vee \mathbf{G})$, $(\mathbf{F} \rightarrow \mathbf{G})$ y $(\mathbf{F} \leftrightarrow \mathbf{G})$ son fórmulas en $\mathbf{L}$.
  - Si $\mathbf{F}$ es una fórmula en $\mathbf{L}$, entonces $\forall \mathbf{x}\ \mathbf{F}$ y $\exists \mathbf{x}\ \mathbf{F}$ son fórmulas en $\mathbf{F}$.
- Notación:
  - Fórmulas en un lenguaje de primer orden: $\mathbf{F}, \mathbf{G}, \dots, \mathbf{F_1}, \mathbf{F_2}, \dots$
  - Conjunto de las fórmulas del lenguaje $\mathbf{L}$: $\mathbf{Form(L)}$
  - Se siguen los mismos criterios para eliminar paréntesis que en la lógica proposicional, con $\forall$ y $\exists$ con la mayor precedencia.
    $\forall \mathbf{x}\ \mathbf{P(x)} \rightarrow \mathbf{Q(x)}$ es una abreviatura de $((\forall \mathbf{x}\ \mathbf{P(x)}) \rightarrow \mathbf{Q(x)})$
- Ejemplos:
  - En el lenguaje de la vecindad entre provincias: $\forall \mathbf{x}\ \mathbf{provincia(x)}$, $\forall \mathbf{x}\ \exists \mathbf{y}\ \mathbf{vecinas(x, y)}$.
  - En el lenguaje de la aritmética: $\exists \mathbf{x}\ \forall \mathbf{y} \le \mathbf{(x, y)}$ (o $\exists \mathbf{x}\ \forall \mathbf{y}\ (\mathbf{x} \le \mathbf{y})$).

Expresividad de la lógica de primer orden

- Si una provincia es vecina de otra, entonces la segunda es vecina de la primera. Sevilla es vecina de Cádiz. Por tanto Cádiz es vecina de Sevilla.
- Lenguaje de la vecindad entre provincias:
  - Símbolos de constantes: $\{\textbf{Sevilla}, \textbf{Cadiz}\}$
  - Símbolos de predicado: $\{\textbf{provincia}, \textbf{vecinas}\}$
  - Símbolos de función: $\{\}$

Expresividad de la lógica de primer orden

- Formalización:
  - Si una provincia es vecina de otra, entonces la segunda es vecina de la primera:
    $$\forall \mathbf{x}\ \forall \mathbf{y}\ (\mathbf{provincia(x)} \wedge \mathbf{provincia(y)} \wedge \mathbf{vecina(x, y)} \rightarrow \mathbf{vecina(y, x)})$$
  - Sevilla es vecina de Cádiz:
    $$\mathbf{vecina(Sevilla, Cadiz)}$$
  - Por tanto Cádiz es vecina de Sevilla:
    $$\mathbf{vecina(Cadiz, Sevilla)}$$
- Información implícita:
  - Sevilla es una provincia:
    $$\mathbf{provincia(Sevilla)}$$
  - Cádiz es una provincia:
    $$\mathbf{provincia(Cadiz)}$$

Expresividad de la lógica de primer orden

- Representación de conocimiento astronómico
  - La Tierra es un planeta:
    $\mathbf{planeta(Tierra)}$
  - La Luna no es un planeta:
    $\neg\mathbf{planeta(Luna)}$
  - La Luna es un satélite:
    $\mathbf{satelite(Luna)}$
  - La Tierra gira alrededor del Sol:
    $\mathbf{gira(Tierra, Sol)}$
  - La Luna gira alrededor de la Tierra:
    $\mathbf{gira(Luna, Tierra)}$
  - Todo planeta es un satélite:
    $\forall \mathbf{x}\ (\mathbf{planeta(x)} \rightarrow \mathbf{satelite(x)})$
  - Todo planeta gira alrededor del Sol:
    $\forall \mathbf{x}\ (\mathbf{planeta(x)} \rightarrow \mathbf{gira(x, Sol)})$

Expresividad de la lógica de primer orden

- Representación de conocimiento astronómico
  - Algún planeta gira alrededor de la Luna:
    $\exists x\ (\mathbf{planeta}(x) \wedge \mathbf{gira}(x, \mathbf{Luna}))$
  - Hay por lo menos un satélite:
    $\exists x\ \mathbf{satelite}(x)$
  - Ningún planeta es un satélite:
    $\neg\exists x\ (\mathbf{planeta}(x) \wedge \mathbf{satelite}(x))$
  - Ningún objeto celeste gira alrededor de sí mismo:
    $\neg\exists x\ \mathbf{gira}(x, x)$
  - Alrededor de los satélites no giran objetos:
    $\forall x\ (\mathbf{satelite}(x) \rightarrow \neg\exists y\ \mathbf{gira}(y, x))$
  - Hay exactamente un satélite:
    $\exists x\ (\mathbf{satelite}(x) \wedge \forall y\ (\mathbf{satelite}(y) \rightarrow x = y))$
  - Todo planeta tiene un objeto que gira en torno a él:
    $\forall x\ (\mathbf{planeta}(x) \rightarrow \exists y\ \mathbf{gira}(y, x))$

Expresividad de la lógica de primer orden

- Representación de conocimiento astronómico
  - La Tierra no tiene ningún objeto que gire en torno a ella:
    $\neg \exists x \ \mathbf{gira}(x, \mathbf{Tierra})$
  - Algún planeta no tiene ningún objeto que gira en torno a él:
    $\exists x \ (\mathbf{planeta}(x) \to \neg \exists y \ \mathbf{gira}(y, x))$
  - Solo los planetas tienen objetos que giran alrededor de ellos:
    $\forall x \ (\exists y \ \mathbf{gira}(y, x) \to \mathbf{planeta}(x))$
  - Todo satélite gira alrededor de algún planeta:
    $\forall x \ (\mathbf{satelite}(x) \to \exists y \ (\mathbf{planeta}(y) \land \mathbf{gira}(x, y)))$
  - La Luna no gira alrededor de dos planetas distintos:
    $\neg \exists x \ \exists y \ (\mathbf{planeta}(x) \land \mathbf{planeta}(y) \land \mathbf{gira}(x, \mathbf{Luna}) \land \mathbf{gira}(y, \mathbf{Luna}) \land x \neq y)$
  - Hay exactamente dos planetas:
    $\exists x \ \exists y \ (\mathbf{planeta}(x) \land \mathbf{planeta}(y) \land x \neq y \land \forall z \ (\mathbf{planeta}(z) \to z = x \lor z = y))$

Subfórmulas

- El conjunto de las **subfórmulas** de una fórmula:

$$\mathbf{Subf(F)} = \begin{cases} \{\mathbf{F}\} & \text{si } \mathbf{F} \text{ es una fórmula atómica} \\ \{\mathbf{F}\} \cup \mathbf{Subf(G)} & \text{si } \mathbf{F} \text{ es } \neg\mathbf{G} \\ \{\mathbf{F}\} \cup \mathbf{Subf(G_1)} \cup \mathbf{Subf(G_2)} & \text{si } \mathbf{F} \text{ es } \mathbf{G_1} \star \mathbf{G_2} \\ \{\mathbf{F}\} \cup \mathbf{Subf(G)} & \text{si } \mathbf{F} \text{ es } \forall \mathbf{x}\ \mathbf{G} \\ \{\mathbf{F}\} \cup \mathbf{Subf(G)} & \text{si } \mathbf{F} \text{ es } \exists \mathbf{x}\ \mathbf{G} \end{cases}$$

- Ejemplo:

$$\mathbf{Subf(\forall x\ (R(x,c) \to P(f(y)))) =}$$
$$\mathbf{\{\forall x\ (R(x,c) \to P(f(y))), R(x,c) \to P(f(y)),}$$
$$\mathbf{R(x,c), P(f(y))\}}$$

Variables

- Conjunto de **variables de un término**:

$$\mathbf{V(t)} = \begin{cases} \emptyset & \text{si } \mathbf{t} \text{ es una constante} \\ \{\mathbf{x}\} & \text{si } \mathbf{t} \text{ es la variable } \mathbf{x} \\ \mathbf{V(t_1)} \cup \ldots \cup \mathbf{V(t_n)} & \text{si } \mathbf{t} \text{ es } \mathbf{f(t_1, \ldots, t_n)} \end{cases}$$

- Conjunto de **variables de una fórmula**:

$$\mathbf{V(F)} = \begin{cases} \mathbf{V(t_1)} \cup \ldots \cup \mathbf{V(t_n)} & \text{si } \mathbf{F} \text{ es } \mathbf{P(t_1, \ldots, t_n)} \\ \mathbf{V(G)} & \text{si } \mathbf{F} \text{ es } \neg\mathbf{G} \\ \mathbf{V(G_1)} \cup \mathbf{V(G_2)} & \text{si } \mathbf{F} \text{ es } \mathbf{G_1} \star \mathbf{G_2} \\ \mathbf{V(G)} & \text{si } \mathbf{F} \text{ es } \forall \mathbf{x}\ \mathbf{G} \\ \mathbf{V(G)} & \text{si } \mathbf{F} \text{ es } \exists \mathbf{x}\ \mathbf{G} \end{cases}$$

- Ejemplos
  - El conjunto de variables de $\forall \mathbf{x}\ (\mathbf{R(x)} \to \mathbf{P(f(y))})$ es $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$
  - El conjunto de variables de $\forall \mathbf{x}\ (\mathbf{R(a)} \to \mathbf{P(f(y))})$ es $\{\mathbf{y}\}$

Variables

- Apariciones libres y ligadas en una fórmula:
  - Una aparición de una variable **x** es **ligada** si ocurre en una subfórmula de la forma $\forall$**x G** o $\exists$**x G**.
  - Una aparición de una variable **x** es **libre** si no es ligada.
- Ejemplos:
  - $\forall x\ (P(x) \to R(x, y)) \to (\exists y\ P(y) \to R(y, x))$
  - $\exists x\ R(x, y) \lor \exists y\ P(y)$
  - $\forall x\ (P(x) \to \exists y\ R(x, y))$
  - $\forall z\ (P(x) \to R(x, y))$

Variables

- Variables libres y ligadas en una fórmula:
  - Una variable **x** es libre si tiene una aparición libre.
  - Una variable **x** es ligada si tiene una aparición ligada.
  - Conjunto de las **variables libres** de una fórmula **F** es:

$$\mathbf{VL(F)} = \begin{cases} \mathbf{V(t_1)} \cup \ldots \cup \mathbf{V(t_n)} & \text{si } \mathbf{F} \text{ es } \mathbf{P(t_1, \ldots, t_n)} \\ \mathbf{VL(G)} & \text{si } \mathbf{F} \text{ es } \neg\mathbf{G} \\ \mathbf{VL(G_1)} \cup \mathbf{VL(G_2)} & \text{si } \mathbf{F} \text{ es } \mathbf{G_1} \star \mathbf{G_2} \\ \mathbf{VL(G)} - \{x\} & \text{si } \mathbf{F} \text{ es } \forall \mathbf{x}\ \mathbf{G} \\ \mathbf{VL(G)} - \{x\} & \text{si } \mathbf{F} \text{ es } \exists \mathbf{x}\ \mathbf{G} \end{cases}$$

- Ejemplos:

	V.Ligadas	V.Libres
$\forall x\ (P(x) \to R(x, y)) \to (\exists y\ P(y) \to R(y, x))$	$\{x, y\}$	$\{x, y\}$
$\forall x\ (P(x) \to \exists y\ R(x, y))$	$\{x, y\}$	
$\forall z\ (P(x) \to R(x, y))$		$\{x, y\}$

Fórmulas cerradas y abiertas

- Una **fórmula cerrada** (o **sentencia**) es una fórmula sin variables libres.
- Una **fórmula abierta** es una fórmula con variables libres.
- Ejemplos
  - $\forall \mathbf{x}\ (\mathbf{P}(\mathbf{x}) \to \exists \mathbf{y}\ \mathbf{R}(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$ es una fórmula cerrada.
  - $\exists \mathbf{x}\ \mathbf{R}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \lor \forall \mathbf{y}\ \mathbf{P}(\mathbf{y})$ es una fórmula abierta.

Estructuras

- Una **estructura del lenguaje** de primer orden $\mathbf{L}$ es un par $\mathcal{I} = (\mathbf{U}, \mathbf{I})$ tal que:
  - $\mathbf{U}$ es un conjunto no vacío, denominado **universo** de la estructura.
  - $\mathbf{I}$ es una función cuyo dominio es el conjunto de los símbolos propios del lenguaje $\mathbf{L}$ tal que:
    - Si $\mathbf{c}$ es una constante en $\mathbf{L}$, entonces $\mathbf{I(c)} \in \mathbf{U}$.
    - Si $\mathbf{f}$ es un símbolo de función $\mathbf{n}$-ario en $\mathbf{L}$, entonces $\mathbf{I(f)} : \mathbf{U^n} \mapsto \mathbf{U}$.
    - Si $\mathbf{P}$ es un símbolo de predicado $\mathbf{0}$-ario en $\mathbf{L}$, entonces $\mathbf{I(P)} \in \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$.
    - Si $\mathbf{P}$ es un símbolo de predicado $\mathbf{n}$-ario en $\mathbf{L}$ con $\mathbf{n} > \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{I(P)} \subseteq \mathbf{U^n}$.
- Una estructura proporciona una interpretación $\mathbf{I}$ de los símbolos propios de un lenguaje $\mathbf{L}$ en un conjunto de individuos $\mathbf{U}$.

Estructuras

- Sea $\mathbf{L}$ el lenguaje con los siguientes símbolos propios:
  - Una constante: $\mathbf{0}$
  - Un símbolo de función monaria: $\mathbf{s}$.
  - Un símbolo de función binaria: $\odot$.
  - Un símbolo de relación binaria: $\prec$.
- Primera estructura para $\mathbf{L}$: $\mathbf{U_1} = \mathbb{N}$
  - $\mathbf{I_1(0) = 0}$
  - $\mathbf{I_1(s) = \{n \Longrightarrow n + 1 : n} \in \mathbb{N}\}$ (función $+^1$)
  - $\mathbf{I_1(\odot) = \{(n, m) \Longrightarrow n + m : n, m} \in \mathbb{N}\}$ (función $+$)
  - $\mathbf{I_1(\prec) = \{(n, m) : n, m} \in \mathbb{N}; \mathbf{n} \leq \mathbf{m}\}$
- Segunda estructura para $\mathbf{L}$: $\mathbf{U_2 = [01]^*}$ (cadenas de $\mathbf{0}$ y $\mathbf{1}$)
  - $\mathbf{I_2(0)} = \epsilon$
  - $\mathbf{I_2(s) = \{w \Longrightarrow w1 : w} \in \mathbf{[01]^*}\}$ (función $\mathbf{@^1}$)
  - $\mathbf{I_2(\odot) = \{(w_1, w_2) \Longrightarrow w_1w_2 : w_1, w_2} \in \mathbf{[01]^*}\}$ (función $\mathbf{@}$)
  - $\mathbf{I_2(\prec) = \{(w_1, w_2) : w_1, w_2} \in \mathbf{[01]^*}; \mathbf{w_1}$ es prefijo de $\mathbf{w_2}\}$

- Una **asignación** $\mathbf{A}$ en una estructura $\mathcal{I} = (\mathbf{U}, \mathbf{I})$ para un lenguaje $\mathbf{L}$ es una función $\mathbf{A} : \mathbf{Var} \mapsto \mathbf{U}$.
  - Una asignación hace corresponder a cada variable un individo del universo de la estructura.
- Una **interpretación** de un lenguaje $\mathbf{L}$ es un par $(\mathcal{I}, \mathbf{A})$ formado por una estructura $\mathcal{I}$ de $\mathbf{L}$ y una asignación $\mathbf{A}$ en $\mathcal{I}$.

Evaluación de términos

- Dada una estructura $\mathcal{I} = (\mathbf{U}, \mathbf{I})$ del lenguaje $\mathbf{L}$ y una asignación $\mathbf{A}$ en $\mathcal{I}$, entonces se define la **función de evaluación de términos**, $\mathcal{I}_\mathbf{A} : \mathbf{Term(L)} \mapsto \mathbf{U}$, como:

$$\mathcal{I}_\mathbf{A}(\mathbf{t}) = \begin{cases} \mathbf{I}(\mathbf{c}) & \text{si } \mathbf{t} \text{ es la constante } \mathbf{c} \\ \mathbf{A}(\mathbf{x}) & \text{si } \mathbf{t} \text{ es la variable } \mathbf{x} \\ \mathbf{I}(\mathbf{f})(\mathcal{I}_\mathbf{A}(\mathbf{t}_1), \dots, \mathcal{I}_\mathbf{A}(\mathbf{t}_\mathbf{n})) & \text{si } \mathbf{t} \text{ es } \mathbf{f}(\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_\mathbf{n}) \end{cases}$$

- $\mathcal{I}_\mathbf{A}(\mathbf{t})$ es el valor de $\mathbf{t}$ en $\mathcal{I}$ respecto de $\mathbf{A}$.

Evaluación de términos

- Consideramos el lenguaje $\mathbf{L} = \{0, s, \odot, \prec\}$ y el término $t = s(x \odot s(0))$.
- En la estructura $\mathcal{I}^1 = (\mathbb{N}, I_1)$ con $A(x) = 3$

$$\begin{aligned} {\mathcal{I}^1}_A(t) &= {\mathcal{I}^1}_A(s(x \odot s(0))) \\ &= I_1(s)(I_1(\odot)(A(x), I_1(s)(I_1(0)))) \\ &= +^1(3 + +^1(0)) \\ &= 5 \end{aligned}$$

- En la estructura $\mathcal{I}^2 = ([01]^*, I_2)$ con $A(x) = 10$

$$\begin{aligned} {\mathcal{I}^2}_A(t) &= {\mathcal{I}^2}_A(s(x \odot s(0))) \\ &= I_2(s)(I_2(\odot)(A(x), I_2(s)(I_2(0)))) \\ &= @^1(10\ @\ @^1(\epsilon)) \\ &= 1011 \end{aligned}$$

Evaluación de fórmulas

- Dada una estructura $\mathcal{I} = (\mathbf{U}, \mathbf{I})$ del lenguaje $\mathbf{L}$ y una asignación $\mathbf{A}$ en $\mathcal{I}$, entonces se define la **función de evaluación de fórmulas**, $\mathcal{I}_\mathbf{A} : \mathbf{Form(L)} \mapsto \mathbb{B}$, como:

$$
\begin{array}{ll}
\mathcal{I}_A(P(t_1,\dots,t_n)) & = H_{I(P)}(\mathcal{I}_A(t_1),\dots,\mathcal{I}_A(t_n)) \\
\mathcal{I}_A(\neg G) & = H_\neg(\mathcal{I}_A(G)) \\
\mathcal{I}_A(G_1 \star G_2) & = H_\star(\mathcal{I}_A(G_1),\mathcal{I}_A(G_2)) \\
\mathcal{I}_A(\forall x\ G) & = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si para todo } \mathbf{u} \in U \\ & \text{se tiene } \mathcal{I}_{A[x/u]}(G) = 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{array} \right. \\
\mathcal{I}_A(\exists x\ G) & = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si existe un } \mathbf{u} \in U \\ & \text{tal que } \mathcal{I}_{A[x/u]}(G) = 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{array} \right.
\end{array}
$$

- $\mathcal{I}_\mathbf{A}(\mathbf{F})$ es el valor de $\mathbf{F}$ en $\mathcal{I}$ respecto de $\mathbf{A}$.

Evaluación de fórmulas

- $\mathbf{H}_\neg$, $\mathbf{H}_\wedge$, $\mathbf{H}_\vee$, $\mathbf{H}_\rightarrow$ y $\mathbf{H}_\leftrightarrow$ son las funciones de verdad de las conectivas lógicas proposicionales.
- Si $\mathbf{R}$ es un subconjunto de $\mathbf{U}^\mathbf{n}$, entonces la **función de verdad** de $\mathbf{R}$ es:

$$\mathbf{H_R(u_1, \dots, u_n)} = \begin{cases} \mathbf{1} & \text{si } \mathbf{(u_1, \dots, u_n) \in R} \\ \mathbf{0} & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

- Si $\mathbf{A}$ es una asignación en la estructura $\mathbf{(U, I)}$, $\mathbf{x} \in \mathbf{Var}$ y $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$, entonces la **variante de la asignación A** para $\mathbf{x}$ igual a $\mathbf{u}$ es:

$$\mathbf{A[x/u](y)} = \begin{cases} \mathbf{u} & \text{si } \mathbf{y} \text{ es la variable } \mathbf{x} \\ \mathbf{A(y)} & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Evaluación de fórmulas

- Evaluación de $\forall x\, \exists y\, P(x,y)$ en la estructura $\mathcal{I} = (U, I)$ tal que $U = \{1,2\}$ e $I(P) = \{(1,1),(2,2)\}$:

$$\mathcal{I}_A(\forall x\, \exists y\, P(x,y)) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathcal{I}_{A[x/1]}(\exists y\, P(x,y)) = 1 \\ & \text{y } \mathcal{I}_{A[x/2]}(\exists y\, P(x,y)) = 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$\mathcal{I}_{A[x/1]}(\exists y\, P(x,y)) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathcal{I}_{A[y/1,x/1]}(P(x,y)) = 1 \checkmark \\ & \text{o } \mathcal{I}_{A[y/2,x/1]}(P(x,y)) = 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{A[y/1,x/1]}(P(x,y)) &= H_{I(P)}(\mathcal{I}_{A[y/1,x/1]}(x), \mathcal{I}_{A[y/1,x/1]}(y)) \\ &= H_{I(P)}(A[y/1,x/1](x), A[y/1,x/1](y)) \\ &= H_{I(P)}(1,1) \\ &= 1 \text{ pues } (1,1) \in I(P) \end{aligned}$$

Por tanto $\mathcal{I}_{A[x/1]}(\exists y\, P(x,y)) = 1$.

Evaluación de fórmulas

- Evaluación de $\forall x\, \exists y\, P(x, y)$ en la estructura $\mathcal{I} = (U, I)$ tal que $U = \{1, 2\}$ e $I(P) = \{(1, 1), (2, 2)\}$:

$$\mathcal{I}_A(\forall x\, \exists y\, P(x, y)) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathcal{I}_{A[x/1]}(\exists y\, P(x, y)) = 1\ ✓ \\ & \text{y } \mathcal{I}_{A[x/2]}(\exists y\, P(x, y)) = 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$\mathcal{I}_{A[x/2]}(\exists y\, P(x, y)) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathcal{I}_{A[y/1,x/2]}(P(x, y)) = 1\ ✗ \\ & \text{o } \mathcal{I}_{A[y/2,x/2]}(P(x, y)) = 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{A[y/1,x/2]}(P(x, y)) &= H_{I(P)}(\mathcal{I}_{A[y/1,x/2]}(x), \mathcal{I}_{A[y/1,x/2]}(y)) \\ &= H_{I(P)}(A[y/1, x/2](x), A[y/1, x/2](y)) \\ &= H_{I(P)}(2, 1) \\ &= 0 \text{ pues } (2, 1) \notin I(P) \end{aligned}$$

- Evaluación de $\forall x\ \exists y\ P(x,y)$ en la estructura $\mathcal{I} = (U, I)$ tal que $U = \{1,2\}$ e $I(P) = \{(1,1),(2,2)\}$:

$$\mathcal{I}_A(\forall x\ \exists y\ P(x,y)) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathcal{I}_{A[x/1]}(\exists y\ P(x,y)) = 1\ \checkmark \\ & \text{y } \mathcal{I}_{A[x/2]}(\exists y\ P(x,y)) = 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$\mathcal{I}_{A[x/2]}(\exists y\ P(x,y)) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathcal{I}_{A[y/1,x/2]}(P(x,y)) = 1\ \text{✗} \\ & \text{o } \mathcal{I}_{A[y/2,x/2]}(P(x,y)) = 1\ \checkmark \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{A[y/2,x/2]}(P(x,y)) &= H_{I(P)}(\mathcal{I}_{A[y/2,x/2]}(x), \mathcal{I}_{A[y/2,x/2]}(y)) \\ &= H_{I(P)}(A[y/2,x/2](x), A[y/2,x/2](y)) \\ &= H_{I(P)}(2,2) \\ &= 1 \text{ pues } (2,2) \in I(P) \end{aligned}$$

Por tanto $\mathcal{I}_{A[x/2]}(\exists y\ P(x,y)) = 1$.

Evaluación de fórmulas

- Evaluación de $\forall x\ \exists y\ P(x,y)$ en la estructura $\mathcal{I} = (U, I)$ tal que $U = \{1, 2\}$ e $I(P) = \{(1,1),(2,2)\}$:

$$\mathcal{I}_A(\forall x\ \exists y\ P(x,y)) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathcal{I}_{A[x/1]}(\exists y\ P(x,y)) = 1 \checkmark \\ & \text{y } \mathcal{I}_{A[x/2]}(\exists y\ P(x,y)) = 1 \checkmark \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Por tanto $\mathcal{I}(\forall x\ \exists y\ P(x,y)) = 1$.

Evaluación de fórmulas

- Evaluación de $\forall x\ (g(g(x)) = x)$ en la estructura $\mathcal{I} = (U, I)$ tal que $U = \{1, 2\}$ e $I(g) = \{1 \Longrightarrow 2, 2 \Longrightarrow 1\}$:

$$\mathcal{I}_A(\forall x\ (g(g(x)) = x)) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathcal{I}_{A[x/1]}(g(g(x)) = x) = 1 \\ & \text{y } \mathcal{I}_{A[x/2]}(g(g(x)) = x) = 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{A[x/1]}(g(g(x)) = x) &= H_=(\mathcal{I}_{A[x/1]}(g(g(x))), \mathcal{I}_{A[x/1]}(x)) \\ &= H_=(I(g)(\mathcal{I}_{A[x/1]}(g(x))), 1) \\ &= H_=(I(g)(I(g)(\mathcal{I}_{A[x/1]}(x))), 1) \\ &= H_=(I(g)(I(g)(1)), 1) \\ &= H_=(I(g)(2), 1) \\ &= H_=(1, 1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

- Evaluación de $\forall \mathbf{x}\ (\mathbf{g}(\mathbf{g}(\mathbf{x})) = \mathbf{x})$ en la estructura $\mathcal{I} = (\mathbf{U}, \mathbf{I})$ tal que $\mathbf{U} = \{1, 2\}$ e $\mathbf{I}(\mathbf{g}) = \{1 \Longrightarrow 2, 2 \Longrightarrow 1\}$:

$$\mathcal{I}_{\mathbf{A}}(\forall \mathbf{x}\ (\mathbf{g}(\mathbf{g}(\mathbf{x})) = \mathbf{x})) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathcal{I}_{\mathbf{A}[\mathbf{x}/1]}(\mathbf{g}(\mathbf{g}(\mathbf{x})) = \mathbf{x}) = 1 \checkmark \\ & \text{y } \mathcal{I}_{\mathbf{A}[\mathbf{x}/2]}(\mathbf{g}(\mathbf{g}(\mathbf{x})) = \mathbf{x}) = 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{\mathbf{A}[\mathbf{x}/2]}(\mathbf{g}(\mathbf{g}(\mathbf{x})) = \mathbf{x}) &= \mathbf{H}_{=}(\mathcal{I}_{\mathbf{A}[\mathbf{x}/2]}(\mathbf{g}(\mathbf{g}(\mathbf{x}))), \mathcal{I}_{\mathbf{A}[\mathbf{x}/2]}(\mathbf{x})) \\ &= \mathbf{H}_{=}(\mathbf{I}(\mathbf{g})(\mathcal{I}_{\mathbf{A}[\mathbf{x}/2]}(\mathbf{g}(\mathbf{x}))), 2) \\ &= \mathbf{H}_{=}(\mathbf{I}(\mathbf{g})(\mathbf{I}(\mathbf{g})(\mathcal{I}_{\mathbf{A}[\mathbf{x}/2]}(\mathbf{x}))), 2) \\ &= \mathbf{H}_{=}(\mathbf{I}(\mathbf{g})(\mathbf{I}(\mathbf{g})(2)), 2) \\ &= \mathbf{H}_{=}(\mathbf{I}(\mathbf{g})(1), 2) \\ &= \mathbf{H}_{=}(2, 2) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Evaluación de fórmulas

- Evaluación de $\forall x\ (g(g(x)) = x)$ en la estructura $\mathcal{I} = (U, I)$ tal que $U = \{1, 2\}$ e $I(g) = \{1 \Longrightarrow 2, 2 \Longrightarrow 1\}$:

$$\mathcal{I}_A(\forall x\ (g(g(x)) = x)) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathcal{I}_{A[x/1]}(g(g(x)) = x) = 1 \checkmark \\ & \text{y } \mathcal{I}_{A[x/2]}(g(g(x)) = x) = 1 \checkmark \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Por tanto $\mathcal{I}_A(\forall x\ (g(g(x)) = x)) = 1$.

- Dependencia del Universo.
  Sea $\mathbf{F} = \forall \mathbf{x}\ \exists \mathbf{y}\ \mathbf{R}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, entonces:
  - $\mathcal{I}_{\mathbf{A}}(\mathbf{F}) = \mathbf{1}$ con $\mathcal{I} = (\mathbb{Z}, \mathbf{I})$, $\mathbf{I}(\mathbf{R}) = >$ y $\mathbf{A}$ una asignación.
  - $\mathcal{I}_{\mathbf{A}}(\mathbf{F}) = \mathbf{0}$ con $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, \mathbf{I})$, $\mathbf{I}(\mathbf{R}) = >$ y $\mathbf{A}$ una asignación.
- Dependencia de la Estructura.
  Sea $\mathbf{F} = \exists \mathbf{x}\ \forall \mathbf{y}\ \mathbf{R}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, entonces:
  - $\mathcal{I}_{\mathbf{A}}(\mathbf{F}) = \mathbf{1}$ con $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, \mathbf{I})$, $\mathbf{I}(\mathbf{R}) = \leq$ y $\mathbf{A}$ una asignación.
  - $\mathcal{I}_{\mathbf{A}}(\mathbf{F}) = \mathbf{0}$ con $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, \mathbf{I})$, $\mathbf{I}(\mathbf{R}) = \geq$ y $\mathbf{A}$ una asignación.
- Dependencia de la Asignación.
  Sea $\mathbf{F} = \forall \mathbf{y}\ \mathbf{R}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, entonces:
  - $\mathcal{I}_{\mathbf{A}}(\mathbf{F}) = \mathbf{1}$ con $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, \mathbf{I})$, $\mathbf{I}(\mathbf{R}) = \leq$ y $\mathbf{A}$ una asignación en $\mathcal{I}$ tal que $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.
  - $\mathcal{I}_{\mathbf{A}}(\mathbf{F}) = \mathbf{0}$ con $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, \mathbf{I})$, $\mathbf{I}(\mathbf{R}) = \leq$ y $\mathbf{A}$ una asignación en $\mathcal{I}$ tal que $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{1}$.

Evaluación de fórmulas

- Sea $\mathbf{t}$ un término de $\mathbf{L}$ e $\mathcal{I}$ una estructura de $\mathbf{L}$:
  - Si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son dos asignaciones en $\mathcal{I}$ que coinciden sobre las variables de $\mathbf{t}$, entonces $\mathcal{I}_{\mathbf{A}}(\mathbf{t}) = \mathcal{I}_{\mathbf{B}}(\mathbf{t})$.
  - Si $\mathbf{t}$ no tiene variables, entonces $\mathcal{I}_{\mathbf{A}}(\mathbf{t}) = \mathcal{I}_{\mathbf{B}}(\mathbf{t})$ para cualesquiera asignaciones $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ en $\mathcal{I}$.
- Sea $\mathbf{F}$ una fórmula de $\mathbf{L}$ e $\mathcal{I}$ una estructura de $\mathbf{L}$:
  - Si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son dos asignaciones en $\mathcal{I}$ que coinciden sobre las variables libres de $\mathbf{F}$, entonces $\mathcal{I}_{\mathbf{A}}(\mathbf{F}) = \mathcal{I}_{\mathbf{B}}(\mathbf{F})$.
  - Si $\mathbf{F}$ es cerrada, entonces $\mathcal{I}_{\mathbf{A}}(\mathbf{F}) = \mathcal{I}_{\mathbf{B}}(\mathbf{F})$ para cualesquiera asignaciones $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ en $\mathcal{I}$.

Modelo de una fórmula

- Sea $\mathbf{F}$ una fórmula de $\mathbf{L}$ e $\mathcal{I}$ una estructura de $\mathbf{L}$:
  - $(\mathcal{I}, \mathbf{A})$ es una **realización** de $\mathbf{F}$ ($\mathcal{I}_\mathbf{A} \models \mathbf{F}$), si $\mathbf{A}$ es una asignación en $\mathcal{I}$ tal que $\mathcal{I}_\mathbf{A}(\mathbf{F}) = \mathbf{1}$.
  - $\mathcal{I}$ es un **modelo** de $\mathbf{F}$ ($\mathcal{I} \models \mathbf{F}$), si para toda asignación $\mathbf{A}$ en $\mathcal{I}$ se tiene $\mathcal{I}_\mathbf{A} \models \mathbf{F}$.
- Ejemplos:
  - Sea $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, \mathbf{I})$ una estructura tal que $\mathbf{I(f)} = +$ e $\mathbf{I(g)} = *$.
    - Si $\mathbf{A}$ es una asignación en $\mathcal{I}$ tal que $\mathbf{A(x)} = \mathbf{A(y)} = \mathbf{2}$, entonces $\mathcal{I}_\mathbf{A} \models \mathbf{f(x,x)} = \mathbf{g(x,x)}$.
    - Si $\mathbf{B}$ es una asignación en $\mathcal{I}$ tal que $\mathbf{B(x)} = \mathbf{1}$ y $\mathbf{B(y)} = \mathbf{2}$, entonces $\mathcal{I}_\mathbf{B} \not\models \mathbf{f(x,x)} = \mathbf{g(x,x)}$.
    - $\mathcal{I} \models \mathbf{f(x,y)} = \mathbf{f(y,x)}$
    - $\mathcal{I} \not\models \mathbf{f(x,y)} = \mathbf{g(x,y)}$

Satisfacibilidad y validez

- Sea **F** una fórmula de **L**:
  - **F** es **válida** ($\models$ **F**) si toda estructura de **L** es un modelo de **F**.
    - Para toda estructura $\mathcal{I}$ de **L** y toda asignación **A** en $\mathcal{I}$ se tiene que $\mathcal{I}_{\mathbf{A}}(\mathbf{F}) = 1$.
  - **F** es **satisfacible** si tiene alguna realización.
    - Existe una estructura $\mathcal{I}$ de **L** y una asignación **A** en $\mathcal{I}$ tales que $\mathcal{I}_{\mathbf{A}}(\mathbf{F}) = 1$.
  - **F** es **insatisfacible** si no tiene ninguna realización.
    - Para toda estructura $\mathcal{I}$ de **L** y toda asignación **A** en $\mathcal{I}$ se tiene que $\mathcal{I}_{\mathbf{A}}(\mathbf{F}) = \mathbf{0}$.
- Ejemplos:
  - $\exists \mathbf{x}\ \mathbf{P}(\mathbf{x}) \lor \forall \mathbf{x}\ \neg \mathbf{P}(\mathbf{x})$ es válida.
  - $\exists \mathbf{x}\ \mathbf{P}(\mathbf{x}) \land \exists \mathbf{x}\ \neg \mathbf{P}(\mathbf{x})$ es satisfacible, pero no válida.
  - $\forall \mathbf{x}\ \mathbf{P}(\mathbf{x}) \land \exists \mathbf{x}\ \neg \mathbf{P}(\mathbf{x})$ es insatisfacible.

Satisfacibilidad y validez

- Relaciones entre estos conceptos:
  - $\mathbf{F}$ es válida $\iff \neg\mathbf{F}$ es insatisfacible.
  - $\mathbf{F}$ es válida $\implies \mathbf{F}$ es satisfacible.
  - $\mathbf{F}$ es satisfacible $\not\Longleftarrow\!\!\!\!\Longrightarrow \neg\mathbf{F}$ es insatisfacible.
- Sea $\mathbf{F}$ una fórmula en $\mathbf{L}$ y $\mathbf{x_1},\dots,\mathbf{x_n}$ las variables libres de $\mathbf{F}$:
  - $\mathbf{F}$ es válida $\iff \forall\mathbf{x_1}\dots\forall\mathbf{x_n}\ \mathbf{F}$ es válida.
    La fórmula $\forall\mathbf{x_1}\dots\forall\mathbf{x_n}\ \mathbf{F}$ es el **cierre universal** de $\mathbf{F}$.
  - $\mathbf{F}$ es satisfacible $\iff \exists\mathbf{x_1}\dots\exists\mathbf{x_n}\ \mathbf{F}$ es satisfacible.
    La fórmula $\exists\mathbf{x_1}\dots\exists\mathbf{x_n}\ \mathbf{F}$ es el **cierre existencial** de $\mathbf{F}$.

Fórmulas equivalentes

- Dos fórmulas $\mathbf{F}$ y $\mathbf{G}$ de un lenguaje $\mathbf{L}$ son **equivalentes** ($\mathbf{F} \equiv \mathbf{G}$) si para toda estructura $\mathcal{I}$ de $\mathbf{L}$ y toda asignación $\mathbf{A}$ en $\mathcal{I}$ se tiene $\mathcal{I}_\mathbf{A}(\mathbf{F}) = \mathcal{I}_\mathbf{A}(\mathbf{G})$.
- Equivalencias importantes:
  - Las de las conectivas proposicionales.
  - Conmutatividad de los cuantificadores:
    $$\forall \mathbf{x}\ \forall \mathbf{y}\ \mathbf{F} \equiv \forall \mathbf{y}\ \forall \mathbf{x}\ \mathbf{F}$$
    $$\exists \mathbf{x}\ \exists \mathbf{y}\ \mathbf{F} \equiv \exists \mathbf{y}\ \exists \mathbf{x}\ \mathbf{F}$$
  - Cuantificadores con la negación:
    $$\forall \mathbf{x}\ (\neg \mathbf{F}) \equiv \neg(\exists \mathbf{x}\ \mathbf{F})$$
    $$\exists \mathbf{x}\ (\neg \mathbf{F}) \equiv \neg(\forall \mathbf{x}\ \mathbf{F})$$
  - Cuantificador universal con la conjunción:
    $$\forall \mathbf{x}\ (\mathbf{F} \land \mathbf{G}) \equiv (\forall \mathbf{x}\ \mathbf{F}) \land (\forall \mathbf{x}\ \mathbf{G})$$
  - Cuantificador existencial con la disyunción:
    $$\exists \mathbf{x}\ (\mathbf{F} \lor \mathbf{G}) \equiv (\exists \mathbf{x}\ \mathbf{F}) \lor (\exists \mathbf{x}\ \mathbf{G})$$
  - Cuantificador existencial con la implicación:
    $$\exists \mathbf{x}\ (\mathbf{F} \to \mathbf{G}) \equiv (\forall \mathbf{x}\ \mathbf{F}) \to (\exists \mathbf{x}\ \mathbf{G})$$

Propiedades de la equivalencia lógica

- La equivalencia lógica es una relación de equivalencia
  - Reflexividad: $\mathbf{F} \equiv \mathbf{F}$
  - Simetría: Si $\mathbf{F} \equiv \mathbf{G}$, entonces $\mathbf{G} \equiv \mathbf{F}$.
  - Transitividad: Si $\mathbf{F} \equiv \mathbf{G}$ y $\mathbf{G} \equiv \mathbf{H}$, entonces $\mathbf{F} \equiv \mathbf{H}$.
- Principio de sustitución de fórmulas equivalentes: Si en una fórmula $\mathbf{F}$ se sustituye una subfórmula $\mathbf{G}$ por otra lógicamente equivalente $\mathbf{G'}$, entonces la fórmula obtenida $\mathbf{F'}$ es lógicamente equivalente a la original.
  - $\mathbf{F = \neg(\forall x\ P(x)) \to \exists x\ Q(x)}$
  - $\mathbf{G = \neg(\forall x\ P(x))}$
  - $\mathbf{G' = \exists y\ \neg P(y)}$
  - $\mathbf{F' = \exists y\ \neg P(y) \to \exists x\ Q(x)}$

- Sea $\mathbf{S}$ un conjunto de fórmulas de $\mathbf{L}$, $\mathcal{I}$ una estructura de $\mathbf{L}$ y $\mathbf{A}$ una asignación en $\mathcal{I}$:
  - $(\mathcal{I}, \mathbf{A})$ es una **realización** de $\mathbf{S}$ ($\mathcal{I}_{\mathbf{A}} \models \mathbf{S}$) si para toda $\mathbf{F} \in \mathbf{S}$, se tiene que $(\mathcal{I}, \mathbf{A})$ es una realización de $\mathbf{F}$.
  - $\mathcal{I}$ es un **modelo** de $\mathbf{S}$ ($\mathcal{I} \models \mathbf{S}$) si para toda $\mathbf{F} \in \mathbf{S}$, se tiene que $\mathcal{I} \models \mathbf{F}$.
- Ejemplos:
  - Sea $\mathbf{S} = \{\forall \mathbf{y}\ \mathbf{R}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \forall \mathbf{y}\ \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{y}\}$
    - $(\mathcal{I}, \mathbf{A})$ con $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, \mathbf{I})$, $\mathbf{I}(\mathbf{R}) = \leq$, $\mathbf{I}(\mathbf{f}) = +$ y $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ es una realización de $\mathbf{S}$.
    - $(\mathcal{I}, \mathbf{A})$ con $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, \mathbf{I})$, $\mathbf{I}(\mathbf{R}) = <$, $\mathbf{I}(\mathbf{f}) = +$ y $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ no es una realización de $\mathbf{S}$.
  - Sea $\mathbf{S} = \{\mathbf{R}(\mathbf{e}, \mathbf{y}), \mathbf{f}(\mathbf{e}, \mathbf{y}) = \mathbf{y}\}$
    - $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, \mathbf{I})$, $\mathbf{I}(\mathbf{R}) = \leq$, $\mathbf{I}(\mathbf{f}) = +$ e $\mathbf{I}(\mathbf{e}) = \mathbf{0}$ es un modelo de $\mathbf{S}$.
    - $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, \mathbf{I})$, $\mathbf{I}(\mathbf{R}) = <$, $\mathbf{I}(\mathbf{f}) = +$ e $\mathbf{I}(\mathbf{e}) = \mathbf{0}$ no es un modelo de $\mathbf{S}$.

- Sea **S** un conjunto de fórmulas de **L**:
  - **S** es **consistente** si tiene alguna realización.
  - **S** es **inconsistente** si no tiene ninguna realización.
- Ejemplos:
  - $\{\forall y\ R(x, y), \forall y\ f(x, y) = y\}$ es consistente
  - $\{P(x) \to Q(x), \forall y\ P(y), \neg Q(x)\}$ es inconsistente
- Si **S** es un conjunto de fórmulas cerradas de **L**, entonces **S** es consistente si y solo si **S** tiene algún modelo.

Conjuntos de fórmulas

- Sea **F** una fórmula de **L** y **S** un conjunto de fórmulas de **L**:
  - **F** es **consecuencia lógica** de **S** ($\mathbf{S} \models \mathbf{F}$) si todas las realizaciones de **S** lo son también de **F**.
- Ejemplos:
  - $\{\forall x\ P(x)\} \models P(y)$
  - $\{P(y)\} \not\models \forall x\ P(x)$
  - $\{\forall x\ (P(x) \to Q(x)), P(c)\} \models Q(c)$
  - $\{\forall x\ (P(x) \to Q(x)), Q(c)\} \not\models P(c)$
- $\mathbf{S} \models \mathbf{F} \iff \mathbf{S} \cup \{\neg \mathbf{F}\}$ es inconsistente.
- Si $\mathbf{S} \cup \{\mathbf{F}\}$ es un conjunto de fórmulas cerradas de **L**, entonces son equivalentes:
  - **F** es consecuencia lógica de **S**.
  - Todos los modelos de **S** también lo son de **F**.

Cálculos lógicos

- Un cálculo lógico ($\vdash$) es un procedimiento que permite comprobar la validez de una fórmula.
- Existen cálculos lógicos correctos ($\vdash \implies \models$) y completos ($\models \implies \vdash$) para la lógica de primer orden.
  - Generalmente se trata de extensiones de los cálculos proposicionales incluyendo los cuantificadores: tableros semánticos, secuentes, deducción natural, resolución, ...
- La lógica de primer orden es semidecidible: no existen procedimientos capaces de decidir en un número finito de pasos si una fórmula es válida o no.
  - Existen procedimientos capaces de responder afirmativamente si una fórmula es válida, pero que no son capaces de dar respuesta cuando no lo es.

Bibliografía

- M. Ben-Ari. *Mathematical logic for computer science*
  Capítulo 7
- J.A. Díez. *Iniciación a la Lógica*
  Capítulos 6 y 7
- M. Huth y M. Ryan. *Logic in computer science: modelling and reasoning about systems*
  Capítulo 2