Sintaxis y semántica de la lógica proposicional

Francisco J. Martín Mateos

Dpto. Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial
Universidad de Sevilla

Panorama de la lógica

- Objetivos de la lógica
  - Formalización del lenguaje natural
  - Desarrollar métodos de razonamiento independientes del contexto
- Sistemas lógicos
  - Lógica proposicional
  - Lógica de primer orden
  - Lógica de orden superior
  - Lógicas modales
  - Lógicas descriptivas
- Aplicaciones de la lógica
  - Fundamento de lenguajes de programación
  - Verificación y síntesis automática de programas
  - Representación del conocimiento y razonamiento
  - Modelización y razonamiento sobre sistemas

Lógicas clásicas

- Las lógicas clásicas son sistemas formales que cumplen:
  - *Principio de tercio excluso*: Cualquier afirmación es verdadera o falsa.
  - *Principio de no contradicción*: No hay afirmaciones que sean verdaderas y falsas al mismo tiempo.
  - *Principio de explosión*: De una afirmación contradictoria se puede deducir cualquier cosa.
  - *Principio de monotonía de la implicación*: Las hipótesis de cualquier hecho derivado pueden ampliarse con supuestos adicionales.
- Ejemplos:
  - **Lógica proposicional**
  - Lógica de primer orden

- Argumentaciones
  - Si el tren llega a las 7 y no hay taxis en la estación, entonces Juan llegará tarde a la reunión. Juan no ha llegado tarde a la reunión. El tren llegó a las 7. Por tanto, había taxis en la estación.
  - Si hay corriente y la lámpara no está fundida, entonces está encendida. La lámpara no está encendida. Hay corriente. Por tanto, la lámpara está fundida.

Lógica proposicional

- Formalización
  - Primer caso
    - $p \equiv$ "el tren llega a las 7"
    - $q \equiv$ "hay taxis en la estación"
    - $r \equiv$ "Juan llegará tarde a la reunión"
  - Segundo caso
    - $p \equiv$ "hay corriente"
    - $q \equiv$ "la lámpara está fundida"
    - $r \equiv$ "la lámpara está encendida"
- En ambos casos
  - Argumentación: Si p y no q, entonces r. No r. p. Por tanto, q.
  - Formulación: $\{p \land \neg q \to r, \neg r, p\} \models q$

Sintaxis de la lógica proposicional

- Alfabeto proposicional
  - Variables proposicionales: $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}, \dots, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \dots$
  - Conectivas lógicas
    - Conectivas monarias:
      negación, $\neg$
    - Conectivas binarias:
      conjunción, $\wedge$
      disyunción, $\vee$
      condicional, $\rightarrow$
      bicondicional, $\leftrightarrow$
  - Símbolos adicionales: (y)

Sintaxis de la lógica proposicional

- Fórmulas proposicionales:
  - **Fórmulas atómicas**: Variables proposicionales
  - Si $\boldsymbol{F}$ y $\boldsymbol{G}$ son fórmulas entonces también son fórmulas
    - Negación: $\neg \boldsymbol{F}$
    - Conjunción: $(\boldsymbol{F} \wedge \boldsymbol{G})$
    - Disyunción: $(\boldsymbol{F} \vee \boldsymbol{G})$
    - Condicional: $(\boldsymbol{F} \rightarrow \boldsymbol{G})$
    - Bicondicional: $(\boldsymbol{F} \leftrightarrow \boldsymbol{G})$
- Ejemplos
  - Son fórmulas: $\boldsymbol{p}$, $(\boldsymbol{p} \vee \neg \boldsymbol{q})$, $((\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}) \rightarrow (\boldsymbol{q} \vee \boldsymbol{p}))$
  - No es fórmula: $(\boldsymbol{p} \wedge \vee \boldsymbol{q})$

Sintaxis de la lógica proposicional

- Notación
  - Variables proposicionales: $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{r}$
  - Conjunto de todas las variables proposicionales: $\boldsymbol{VP}$
  - Fórmulas proposicionales: $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{H}$
  - Conjunto de todas las fórmulas proposicionales: $\boldsymbol{Prop}$
  - Una conectiva binaria cualquiera: $\star$
- Los paréntesis se eliminan cuando no hay duda sobre el uso de las conectivas lógicas.
  - Se eliminan los paréntesis externos:
    - $\boldsymbol{F} \vee \boldsymbol{G}$ en lugar de $(\boldsymbol{F} \vee \boldsymbol{G})$.
  - Se usa una precedencia entre las conectivas: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$.
    - $\boldsymbol{F} \wedge \boldsymbol{G} \rightarrow \neg \boldsymbol{F} \vee \boldsymbol{G}$ en lugar de $(\boldsymbol{F} \wedge \boldsymbol{G}) \rightarrow (\neg \boldsymbol{F} \vee \boldsymbol{G})$
  - Asociación por la derecha de las conectivas:
    - $\boldsymbol{F} \vee \boldsymbol{G} \vee \boldsymbol{H}$ en lugar de $\boldsymbol{F} \vee (\boldsymbol{G} \vee \boldsymbol{H})$

Sintaxis de la lógica proposicional

- Definiciones recursivas
  - Comportamiento para las variables proposicionales
  - Comportamiento para las fórmulas dependiendo del tipo de conectiva y usando el comportamiento en las componentes
- Número de variables proposicionales

$$\boldsymbol{nvp}(\boldsymbol{F}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \boldsymbol{F} \text{ es atómica} \\ \boldsymbol{nvp}(\boldsymbol{G}) & \text{si } \boldsymbol{F} \text{ es } \neg\boldsymbol{G} \\ \boldsymbol{nvp}(\boldsymbol{G}) + \boldsymbol{nvp}(\boldsymbol{H}) & \text{si } \boldsymbol{F} \text{ es } \boldsymbol{G} \star \boldsymbol{H} \end{cases}$$

  - $\boldsymbol{nvp}(\boldsymbol{p}) = 1$
  - $\boldsymbol{nvp}(\neg\boldsymbol{q}) = 1$
  - $\boldsymbol{nvp}(\neg\boldsymbol{q} \vee \boldsymbol{p}) = 2$
  - $\boldsymbol{nvp}(\boldsymbol{p} \rightarrow \neg\boldsymbol{q} \vee \boldsymbol{p}) = 3$

Sintaxis de la lógica proposicional

- Definiciones recursivas
  - Comportamiento para las variables proposicionales
  - Comportamiento para las fórmulas dependiendo del tipo de conectiva y usando el comportamiento en las componentes
- Número de conectivas

$$\boldsymbol{nc}(\boldsymbol{F}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \boldsymbol{F} \text{ es atómica} \\ 1 + \boldsymbol{nc}(\boldsymbol{G}) & \text{si } \boldsymbol{F} \text{ es } \neg \boldsymbol{G} \\ 1 + \boldsymbol{nc}(\boldsymbol{G}) + \boldsymbol{nc}(\boldsymbol{H}) & \text{si } \boldsymbol{F} \text{ es } \boldsymbol{G} \star \boldsymbol{H} \end{cases}$$

  - $\boldsymbol{nc}(\boldsymbol{p}) = 0$
  - $\boldsymbol{nc}(\neg \boldsymbol{q}) = 1$
  - $\boldsymbol{nc}(\neg \boldsymbol{q} \vee \boldsymbol{p}) = 2$
  - $\boldsymbol{nc}(\boldsymbol{p} \to \neg \boldsymbol{q} \vee \boldsymbol{p}) = 3$

- Definiciones recursivas
  - Comportamiento para las variables proposicionales
  - Comportamiento para las fórmulas dependiendo del tipo de conectiva y usando el comportamiento en las componentes
- Número de conectivas binarias

$$\boldsymbol{ncb}(\boldsymbol{F}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \boldsymbol{F} \text{ es atómica} \\ \boldsymbol{ncb}(\boldsymbol{G}) & \text{si } \boldsymbol{F} \text{ es } \neg \boldsymbol{G} \\ 1 + \boldsymbol{ncb}(\boldsymbol{G}) + \boldsymbol{ncb}(\boldsymbol{H}) & \text{si } \boldsymbol{F} \text{ es } \boldsymbol{G} \star \boldsymbol{H} \end{cases}$$

- $\boldsymbol{ncb}(\boldsymbol{p}) = 0$
- $\boldsymbol{ncb}(\neg \boldsymbol{q}) = 0$
- $\boldsymbol{ncb}(\neg \boldsymbol{q} \vee \boldsymbol{p}) = 1$
- $\boldsymbol{ncb}(\boldsymbol{p} \to \neg \boldsymbol{q} \vee \boldsymbol{p}) = 2$

Sintaxis de la lógica proposicional

- Definiciones recursivas
  - Comportamiento para las variables proposicionales
  - Comportamiento para las fórmulas dependiendo del tipo de conectiva y usando el comportamiento en las componentes
- Conjunto de variables proposicionales

$$VP(F) = \begin{cases} \{F\} & \text{si } F \text{ es atómica} \\ VP(G) & \text{si } F \text{ es } \neg G \\ VP(G) \cup VP(H) & \text{si } F \text{ es } G \star H \end{cases}$$

  - $VP(p) = \{p\}$
  - $VP(\neg q) = \{q\}$
  - $VP(\neg q \lor p) = \{p, q\}$
  - $VP(p \to \neg q \lor p) = \{p, q\}$

Sintaxis de la lógica proposicional

- Definiciones recursivas
  - Comportamiento para las variables proposicionales
  - Comportamiento para las fórmulas dependiendo del tipo de conectiva y usando el comportamiento en las componentes
- Conjunto de **subfórmulas**

$$
\boldsymbol{subf}(\boldsymbol{F}) = \begin{cases} \{\boldsymbol{F}\} & \text{si } \boldsymbol{F} \text{ es atómica} \\ \{\neg \boldsymbol{G}\} \cup \boldsymbol{subf}(\boldsymbol{G}) & \text{si } \boldsymbol{F} \text{ es } \neg \boldsymbol{G} \\ \{\boldsymbol{G} \star \boldsymbol{H}\} \cup \boldsymbol{subf}(\boldsymbol{G}) \cup \boldsymbol{subf}(\boldsymbol{H}) & \\ & \text{si } \boldsymbol{F} \text{ es } \boldsymbol{G} \star \boldsymbol{H} \end{cases}
$$

  - $\boldsymbol{subf}(\boldsymbol{p}) = \{\boldsymbol{p}\}$
  - $\boldsymbol{subf}(\neg \boldsymbol{q}) = \{\neg \boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}\}$
  - $\boldsymbol{subf}(\neg \boldsymbol{q} \vee \boldsymbol{p}) = \{\neg \boldsymbol{q} \vee \boldsymbol{p}, \neg \boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}\}$
  - $\boldsymbol{subf}(\boldsymbol{p} \to \neg \boldsymbol{q} \vee \boldsymbol{p}) = \{\boldsymbol{p} \to \neg \boldsymbol{q} \vee \boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}, \neg \boldsymbol{q} \vee \boldsymbol{p}, \neg \boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}\}$

- **Principio de inducción estructural**: Si $\mathcal{P}$ es una propiedad sobre las fórmulas que verifica
  - Todas las fórmulas atómicas cumplen la propiedad $\mathcal{P}$
  - Si $\boldsymbol{F}$ cumple la propiedad $\mathcal{P}$ entonces $\neg\boldsymbol{F}$ también la cumple
  - Si $\boldsymbol{F}$ y $\boldsymbol{G}$ cumplen la propiedad $\mathcal{P}$ entonces $\boldsymbol{F} \star \boldsymbol{G}$ también la cumple

  Entonces cualquier fórmula proposicional cumple la propiedad $\mathcal{P}$

Sintaxis de la lógica proposicional

- El número de variables proposicionales es uno más que el número de conectivas binarias: $\boldsymbol{nvp}(\boldsymbol{F}) = 1 + \boldsymbol{ncb}(\boldsymbol{F})$
  - **Caso base**: Si $\boldsymbol{F}$ es atómica entonces

$$\boldsymbol{nvp}(\boldsymbol{F}) = 1 = 1 + 0 = 1 + \boldsymbol{ncb}(\boldsymbol{F})$$

  - **Caso de inducción 1**: Supongamos que $\boldsymbol{nvp}(\boldsymbol{F}) = 1 + \boldsymbol{ncb}(\boldsymbol{F})$ (**hipótesis de inducción**), entonces

$$\begin{aligned} \boldsymbol{nvp}(\neg\boldsymbol{F}) &= \boldsymbol{nvp}(\boldsymbol{F}) && \text{def. de } \boldsymbol{nvp} \\ &= 1 + \boldsymbol{ncb}(\boldsymbol{F}) && \text{hip. de inducción} \\ &= 1 + \boldsymbol{ncb}(\neg\boldsymbol{F}) && \text{def. de } \boldsymbol{ncb} \end{aligned}$$

  - **Caso de inducción 2**: Supongamos que $\boldsymbol{nvp}(\boldsymbol{F}) = 1 + \boldsymbol{ncb}(\boldsymbol{F})$ y $\boldsymbol{nvp}(\boldsymbol{G}) = 1 + \boldsymbol{ncb}(\boldsymbol{G})$ (**hipótesis de inducción**), entonces

$$\begin{aligned} \boldsymbol{nvp}(\boldsymbol{F} \star \boldsymbol{G}) &= \boldsymbol{nvp}(\boldsymbol{F}) + \boldsymbol{nvp}(\boldsymbol{G}) && \text{def. de } \boldsymbol{nvp} \\ &= 1 + \boldsymbol{ncb}(\boldsymbol{F}) + 1 + \boldsymbol{ncb}(\boldsymbol{G}) && \text{hip. de inducción} \\ &= 1 + \boldsymbol{ncb}(\boldsymbol{F} \star \boldsymbol{G}) && \text{def. de } \boldsymbol{ncb} \end{aligned}$$

- Valores de verdad: verdadero ($\top$ o 1) y falso ($\bot$ o 0)
  - El conjunto de los valores de verdad es $\mathbb{NB}$
- Funciones de verdad asociadas a las conectivas:

$$\boldsymbol{H}_{\neg}(\boldsymbol{i}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \boldsymbol{i} = 0 \\ 0 & \text{si } \boldsymbol{i} = 1 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{H}_{\wedge}(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} = 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{H}_{\vee}(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} = 0 \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{H}_{\rightarrow}(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \boldsymbol{i} = 1 \text{ y } \boldsymbol{j} = 0 \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{H}_{\leftrightarrow}(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- Tablas de verdad:
  - Conectivas monarias:

i	$\neg i$
1	0
0	1

  - Conectivas binarias:

i	j	$i \wedge j$	$i \vee j$	$i \rightarrow j$	$i \leftrightarrow j$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Semántica de la lógica proposicional

- Una **interpretación** es una función del conjunto de las variables proposicionales en el conjunto de valores de verdad.

$$\boldsymbol{I} : \boldsymbol{VP} \longrightarrow \mathbb{B}$$

- Para cada interpretación $\boldsymbol{I}$ existe una única función que da significado a las fórmulas, $\boldsymbol{I'} : \boldsymbol{Prop} \longrightarrow \mathbb{B}$, tal que:

$$\boldsymbol{I'}(\boldsymbol{F}) = \begin{cases} \boldsymbol{I}(\boldsymbol{F}) & \text{si } \boldsymbol{F} \text{ es atómica} \\ \boldsymbol{H}_{\neg}(\boldsymbol{I'}(\boldsymbol{G})) & \text{si } \boldsymbol{F} \text{ es } \neg\boldsymbol{G} \\ \boldsymbol{H}_{\star}(\boldsymbol{I'}(\boldsymbol{G}), \boldsymbol{I'}(\boldsymbol{H})) & \text{si } \boldsymbol{F} \text{ es } \boldsymbol{G} \star \boldsymbol{H} \end{cases}$$

  - $\boldsymbol{I'}(\boldsymbol{F})$ es el **valor de verdad de $\boldsymbol{F}$ con respecto a $\boldsymbol{I}$**
  - Dado que $\boldsymbol{I'}$ es única, escribiremos $\boldsymbol{I}(\boldsymbol{F})$ en lugar de $\boldsymbol{I'}(\boldsymbol{F})$

- Ejemplos
  - Valor de verdad de $\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}) \wedge (\neg \boldsymbol{q} \vee \boldsymbol{r})$ con respecto a la interpretación $\boldsymbol{I}_1$ tal que $\boldsymbol{I}_1(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{I}_1(\boldsymbol{r}) = 1$ e $\boldsymbol{I}_1(\boldsymbol{q}) = 0$

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{r}$	$\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}$	$\neg \boldsymbol{q}$	$\neg \boldsymbol{q} \vee \boldsymbol{r}$	$\boldsymbol{F}$
1	0	1	1	1	1	1

  - Valor de verdad de $\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}) \wedge (\neg \boldsymbol{q} \vee \boldsymbol{r})$ con respecto a la interpretación $\boldsymbol{I}_2$ tal que $\boldsymbol{I}_2(\boldsymbol{r}) = 1$ e $\boldsymbol{I}_2(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{I}_2(\boldsymbol{q}) = 0$

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{r}$	$\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}$	$\neg \boldsymbol{q}$	$\neg \boldsymbol{q} \vee \boldsymbol{r}$	$\boldsymbol{F}$
0	0	1	0	1	1	0

- Propiedad: Si dos interpretaciones $\boldsymbol{I}_1$ e $\boldsymbol{I}_2$ coinciden en las variables proposicionales de $\boldsymbol{F}$ entonces $\boldsymbol{I}_1(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{I}_2(\boldsymbol{F})$

Modelos y satisfacibilidad

- Una interpretación I es **modelo** de una fórmula F ($I \models F$), si F es verdadera con respecto a I
  - Si $I_1(p) = I_1(r) = 1$ e $I_1(q) = 0$, entonces $I_1 \models (p \lor q) \land (\neg q \lor r)$
  - Si $I_2(r) = 1$ e $I_2(p) = I_2(q) = 0$, entonces $I_2 \not\models (p \lor q) \land (\neg q \lor r)$
- Una fórmula es **satisfacible** si tiene modelos
  - La fórmula $(p \lor q) \land (\neg q \lor r)$ es satisfacible
- Una fórmula es **insatisfacible** si no tiene modelos
  - La fórmula $p \land \neg p$ es insatisfacible

p	$\neg p$	$p \land \neg p$
1	0	0
0	1	0

Tautologías y contradicciones

- Una fórmula F es una **tautología** o **válida** ($\models F$), si toda interpretación es modelo de F
  - La fórmula $(p \to q) \lor (q \to p)$ es una tautología
- Una fórmula F es una **contradicción** o **insatisfacible**, si ninguna interpretación es modelo de F
  - La fórmula $(p \to q) \land \neg(p \to q)$ es una contradicción
- Una fórmula F es **contingente**, si no es una tautología ni una contradicción
  - La fórmula $p \to q$ es contingente

Clasificaciones de fórmulas

<table>
<tr><td colspan="3" align="center">Prop</td></tr>
<tr><td>Tautologías</td><td>Contingentes</td><td>Contradicciones</td></tr>
<tr><td>Verdadera en todas las interpretaciones

$p \vee \neg p$</td><td>Verdadera en algunas interpretaciones y falsa en otras

$p \vee q$</td><td>Falsa en todas las interpretaciones

$p \wedge \neg p$</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">Satisfacibles</td><td>Insatisfacibles</td></tr>
<tr><td colspan="3" align="center">Prop</td></tr>
</table>

Satisfacibilidad y validez

- Los problemas SAT y TAUT
  - Problema SAT: Dada una fórmula, determinar si es satisfacible
  - Problema TAUT: Dada una fórmula, determinar si es una tautología
- Relaciones entre estos dos problemas
  - F es una tautología $\iff \neg F$ es insatisfacible
  - F es una tautología $\implies F$ es satisfacible
  - F es satisfacible $\not\Longrightarrow \neg F$ es insatisfacible
    - $p \to q$ es satisfacible
    - $\neg(p \to q)$ es satisfacible
- Hay distintos métodos para comprobar SAT y TAUT, el más simple es el basado en las tablas de verdad

Satisfacibilidad y validez

- Tabla de verdad para $\models (p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	1
0	1	1	0	1
0	0	1	1	1

- Tabla de verdad simplificada

p	q	$(p$	$\rightarrow$	$q)$	$\vee$	$(q$	$\rightarrow$	$p)$
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1	1	0	0
0	0	0	1	0	1	0	1	0

- Tabla de verdad para $\not\models (p \leftrightarrow q) \vee (q \leftrightarrow p)$

p	q	$p \leftrightarrow q$	$q \leftrightarrow p$	$(p \leftrightarrow q) \vee (q \leftrightarrow p)$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	0
0	1	0	0	0
0	0	1	1	1

- Tabla de verdad simplificada

p	q	$(p$	$\leftrightarrow$	$q)$	$\vee$	$(q$	$\leftrightarrow$	$p)$
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	0	0	1
0	1	0	0	1	0	1	0	0
0	0	0	1	0	1	0	1	0

Satisfacibilidad y validez

- Algunas tautologías importantes
  - Ley de identidad: $p \to p$
  - Ley del tercio excluido: $p \vee \neg p$
  - Principio de no contradicción: $\neg(p \wedge \neg p)$
  - Ley de Clavius: $(\neg p \to p) \to p$
  - Ley de Duns Scoto: $\neg p \to (p \to q)$
  - Ley de Pierce: $((p \to q) \to p) \to p$
  - Modus ponens: $(p \to q) \wedge p \to q$
  - Modus tollens: $(p \to q) \wedge \neg q \to \neg p$

Fórmulas equivalentes

- Dos fórmulas F y G son **equivalentes** ($F \equiv G$), si para toda interpretación I se tiene que $I(F) = I(G)$
- Equivalencias importantes:
  - Idempotencia:
    $$F \vee F \equiv F$$
    $$F \wedge F \equiv F$$
  - Conmutatividad:
    $$F \vee G \equiv G \vee F$$
    $$F \wedge G \equiv G \wedge F$$
  - Asociatividad:
    $$F \vee (G \vee H) \equiv (F \vee G) \vee H$$
    $$F \wedge (G \wedge H) \equiv (F \wedge G) \wedge H$$
  - Absorción:
    $$F \wedge (F \vee G) \equiv F$$
    $$F \vee (F \wedge G) \equiv F$$

Fórmulas equivalentes

- Dos fórmulas $\boldsymbol{F}$ y $\boldsymbol{G}$ son **equivalentes** ($\boldsymbol{F} \equiv \boldsymbol{G}$), si para toda interpretación $\boldsymbol{I}$ se tiene que $\boldsymbol{I}(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{I}(\boldsymbol{G})$
- Equivalencias importantes:
  - Distributividad:
    $$\boldsymbol{F} \lor (\boldsymbol{G} \land \boldsymbol{H}) \equiv (\boldsymbol{F} \lor \boldsymbol{G}) \land (\boldsymbol{F} \lor \boldsymbol{H})$$
    $$\boldsymbol{F} \land (\boldsymbol{G} \lor \boldsymbol{H}) \equiv (\boldsymbol{F} \land \boldsymbol{G}) \lor (\boldsymbol{F} \land \boldsymbol{H})$$
  - Leyes de tautologías. Si $\boldsymbol{F}$ es una tautología:
    $$\boldsymbol{F} \land \boldsymbol{G} \equiv \boldsymbol{G}$$
    $$\boldsymbol{F} \lor \boldsymbol{G} \equiv \boldsymbol{F}$$
  - Leyes de contradicciones. Si $\boldsymbol{F}$ es una contradicción:
    $$\boldsymbol{F} \land \boldsymbol{G} \equiv \boldsymbol{F}$$
    $$\boldsymbol{F} \lor \boldsymbol{G} \equiv \boldsymbol{G}$$

Fórmulas equivalentes

- Dos fórmulas F y G son **equivalentes** ($F \equiv G$), si para toda interpretación I se tiene que $I(F) = I(G)$
- Equivalencias importantes:
  - Ley del condicional:
    $$F \rightarrow G \equiv \neg F \vee G$$
  - Ley del bicondicional:
    $$F \leftrightarrow G \equiv (F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F)$$
  - Ley de la doble negación:
    $$\neg\neg F \equiv F$$
  - Leyes de De Morgan:
    $$\neg(F \wedge G) \equiv \neg F \vee \neg G$$
    $$\neg(F \vee G) \equiv \neg F \wedge \neg G$$

Propiedades de la equivalencia lógica

- La equivalencia lógica es una relación de equivalencia
  - Reflexividad: $F \equiv F$
  - Simetría: Si $F \equiv G$, entonces $G \equiv F$
  - Transitividad: Si $F \equiv G$ y $G \equiv H$, entonces $F \equiv H$
- Relación entre equivalencia y bicondicional

$$F \equiv G \text{ si y solo si } \models F \leftrightarrow G$$

- **Principio de sustitución de fórmulas equivalentes**: Si en una fórmula F se sustituye una subfórmula G por otra lógicamente equivalente G', entonces la fórmula obtenida F' es lógicamente equivalente a la original
  - $F = \neg(p \land q) \to \neg(p \land \neg\neg r)$
  - $G = \neg(p \land \neg\neg r)$
  - $G' = \neg p \lor \neg r$
  - $F' = \neg(p \land q) \to \neg p \lor \neg r$

Conjunto completo de conectivas

- Un conjunto de conectivas $\mathcal{C}$ es **funcionalmente completo** si cualquier fórmula proposicional tiene una equivalente en la que sólo se utilizan las conectivas de $\mathcal{C}$
  - El conjunto $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ es funcionalmente completo por definición de ***Prop***
  - El conjunto $\{\neg, \wedge, \vee\}$ es funcionalmente completo (ley del condicional, ley de bicondicional y principio de sustitución)
  - Los conjuntos $\{\neg, \wedge\}$ y $\{\neg, \vee\}$ son funcionalmente completos (ley del condicional, ley del bicondicional, ley de la doble negación, leyes de De Morgan y principio de sustitución)
  - Si definimos la conectiva $\uparrow$ (operador de Sheffer) con la siguiente función de verdad

$$\boldsymbol{H}_{\uparrow}\ (\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} = 1 \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

entonces $\{\uparrow\}$ es un conjunto funcionalmente completo

Conjuntos de fórmulas

- Una interpretación I es **modelo** de un conjunto de fórmulas S ($I \models S$), si para toda $F \in S$ se tiene que $I \models F$
  - Sea $S = \{F_1 = (p \lor q) \land (\neg q \lor r), F_2 = p \to r\}$
    - La interpretación I_1 tal que $I_1(p) = I_1(r) = 1$ e $I_1(q) = 0$ es modelo de S.

p	q	r	$p \lor q$	$\neg q$	$\neg q \lor r$	$p \to r$	F_1	F_2
1	0	1	1	1	1	1	1	1

    - La interpretación I_2 tal que $I_2(p) = I_2(q) = 0$ e $I_2(r) = 1$ no es modelo de S.

p	q	r	$p \lor q$	$\neg q$	$\neg q \lor r$	$p \to r$	F_1	F_2
0	0	1	0	1	1	1	0	1

- Un conjunto S es **consistente**, si tiene algún modelo
  - El conjunto $\{(p \vee q) \wedge (\neg q \vee r), p \rightarrow r\}$ es consistente
- Un conjunto S es **inconsistente**, si no tiene ningún modelo
  - El conjunto $\{p \vee q, \neg p \vee q, p \vee \neg q, \neg p \vee \neg q\}$ es inconsistente.
- Una fórmula F es **consecuencia lógica** de un conjunto de fórmulas S ($S \models F$) si todos los modelos de S son a su vez modelos de F.
  - $\{p \rightarrow q, q \rightarrow r\} \models p \rightarrow r$
  - $\{p\} \not\models p \wedge q$

Propiedades de la consecuencia lógica

- Propiedades básicas de la relación de consecuencia lógica:
  - *Reflexividad*: Para toda $\boldsymbol{F} \in \boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{S} \models \boldsymbol{F}$.
  - *Monotonía*: Si $\boldsymbol{S}_1 \models \boldsymbol{F}$ y $\boldsymbol{S}_1 \subseteq \boldsymbol{S}_2$, entonces $\boldsymbol{S}_2 \models \boldsymbol{F}$.
  - *Transitividad*: Si $\boldsymbol{S} \models \boldsymbol{F}$ y $\{\boldsymbol{F}\} \models \boldsymbol{G}$, entonces $\boldsymbol{S} \models \boldsymbol{G}$.
- Relación entre consecuencia, validez, satisfacibilidad y consistencia. Las siguientes condiciones son equivalentes:
  - $\{\boldsymbol{F}_1, \dots, \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{n}}\} \models \boldsymbol{G}$.
  - $\models \boldsymbol{F}_1 \wedge \dots \wedge \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{n}} \to \boldsymbol{G}$.
  - $\neg(\boldsymbol{F}_1 \wedge \dots \wedge \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{n}} \to \boldsymbol{G})$ es insatisfacible.
  - $\{\boldsymbol{F}_1, \dots, \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{n}}, \neg \boldsymbol{G}\}$ es inconsistente.

Cálculos lógicos

- Un cálculo lógico es un procedimiento de decisión que permite comprobar la validez de una fórmula.
  - La deducción en un cálculo lógico se representa con el símbolo $\vdash$.
  - También permiten comprobar la satisfacibilidad, la consistencia y la consecuencia lógica.
- La combinación exhaustiva de todos los valores de verdad de las variables proposicionales y el cálculo del valor de verdad mediante las tablas de verdad es un ejemplo de cálculo lógico.
- Otros cálculos lógicos: tableros semánticos, secuentes, deducción natural, resolución, ...

Propiedades de los cálculos lógicos

- Un cálculo lógico es correcto ($\vdash \implies \models$), si toda fórmula que se puede demostrar que es válida con el cálculo lógico, es válida en la lógica.
  - Todo cálculo lógico debería cumplir esta propiedad.
- Un cálculo lógico es completo ($\models \implies \vdash$), si para toda fórmula válida en la lógica, se puede demostrar su validez utilizando únicamente el cálculo lógico.
- Existen cálculos lógicos para la lógica proposicional que son correctos y completos.
  - Los cálculos lógicos mencionados para la lógica proposicional son correctos y completos: tablas de verdad, tableros semánticos, secuentes, deducción natural, resolución, ...
- La lógica proposicional es decidible: existen procedimientos capaces de decidir si una fórmula es válida o no, en un número finito de pasos.

Argumentaciones

- Problema de los animales: Se sabe que
  - Los animales con pelo o que dan leche son mamíferos
  - Los mamíferos que rumian o tienen pezuñas son ungulados
  - Los ungulados de cuello largo son jirafas
  - Los ungulados con rayas negras son cebras

  Se observa que un animal tiene pelos, pezuñas y rayas negras. Por tanto, se concluye que el animal es una cebra
- Simbolización
  - p: el animal tiene pelo
  - l: el animal da leche
  - m: el animal es un mamífero
  - r: el animal rumia
  - pz: el animal tiene pezuñas
  - u: el animal es ungulado
  - cl: el animal tiene cuello largo
  - j: el animal es una jirafa
  - rn: el animal tiene rayas negras
  - c: el animal es una cebra

Argumentaciones

- Formalización de las premisas y la conclusión
  - Los animales con pelo o que dan leche son mamíferos
    $\boldsymbol{p \lor l \to m}$
  - Los mamíferos que rumian o tienen pezuñas son ungulados
    $\boldsymbol{m \land (r \lor pz) \to u}$
  - Los ungulados de cuello largo son jirafas
    $\boldsymbol{u \land cl \to j}$
  - Los ungulados con rayas negras son cebras
    $\boldsymbol{u \land rn \to c}$
  - Se observa que un animal tiene pelos, pezuñas y rayas negras
    $\boldsymbol{p \land pz \land rn}$
  - Por tanto, se concluye que el animal es una cebra
    $\boldsymbol{c}$
- Formalización de la argumentación

$$\begin{aligned}&\{\boldsymbol{p \lor l \to m, m \land (r \lor pz) \to u,}\\ &\ \boldsymbol{u \land cl \to j, u \land rn \to c, p \land pz \land rn}\} \models \boldsymbol{c}\end{aligned}$$

Problemas lógicos: veraces y mentirosos

- En una isla hay dos tribus, la de los veraces (que siempre dicen la verdad) y la de los mentirosos (que siempre mienten). Un viajero se encuentra con tres isleños A, B y C y cada uno le dice una frase:
  - A dice "B y C son veraces si y solo si C es veraz"
  - B dice "Si A y C son veraces, entonces B y C son veraces y A es mentiroso"
  - C dice "B es mentiroso si y solo si A o B es veraz"

  ¿A qué tribu pertenece cada uno de ellos?
- Simbolización
  - $\boldsymbol{a}$: A es veraz
  - $\boldsymbol{b}$: B es veraz
  - $\boldsymbol{c}$: C es veraz

- Formalización de las premisas
  - A dice "B y C son veraces si y solo si C es veraz"
    $\boldsymbol{F}_1 : \boldsymbol{a} \leftrightarrow (\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c} \leftrightarrow \boldsymbol{c})$
  - B dice "Si A y C son veraces, entonces B y C son veraces y A es mentiroso"
    $\boldsymbol{F}_2 : \boldsymbol{b} \leftrightarrow (\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{c} \rightarrow \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c} \wedge \neg \boldsymbol{a})$
  - C dice "B es mentiroso si y solo si A o B es veraz"
    $\boldsymbol{F}_3 : \boldsymbol{c} \leftrightarrow (\neg \boldsymbol{b} \leftrightarrow \boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{b})$
- Modelos de $\boldsymbol{S} = \{\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \boldsymbol{F}_3\}$:
  - Si $\boldsymbol{I} \models \boldsymbol{S}$, entonces $\boldsymbol{I}(\boldsymbol{a}) = 1, \boldsymbol{I}(\boldsymbol{b}) = 1, \boldsymbol{I}(\boldsymbol{c}) = 0$
  - Por tanto, A y B son veraces y C es mentiroso

Bibliografía

- M. Ben-Ari. *Mathematical logic for computer science*
  Capítulos 1 y 2
- J.A. Díez. *Iniciación a la Lógica*
  Capítulos 2 y 3
- M. Huth y M. Ryan. *Logic in computer science: modelling and reasoning about systems*
  Capítulo 1
- R. Smullyan. *¿Cómo se llama este libro?*