

Deducción natural en lógica de primer orden

Francisco J. Martín Mateos

Dpto. Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial
Universidad de Sevilla

- Una **sustitución** σ de un lenguaje L es una aplicación $\sigma : \mathbf{Var} \mapsto \mathbf{Term}(L)$
- Representaremos por $[x_1/t_1, x_2/t_2, \dots, x_n/t_n]$ a la sustitución σ definida por:

$$\sigma(x) = \begin{cases} t_i & \text{si } x \text{ es } x_i \\ x & \text{si } x \notin \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \end{cases}$$

- Notación: Usaremos $\sigma, \sigma_1, \sigma_2, \dots$ para representar sustituciones de un lenguaje de primer orden
- Ejemplo: $[x/s(0), y/x + y]$ es la sustitución σ de $\mathbf{Var}$ en el conjunto de los términos de la aritmética definida por:

$$\sigma(z) = \begin{cases} s(0) & \text{si } z \text{ es } x \\ x + y & \text{si } z \text{ es } y \\ z & \text{si } z \in \mathbf{Var} \setminus \{x, y\} \end{cases}$$

- La extensión (única) de una sustitución σ al conjunto de términos de un lenguaje L es la aplicación $\sigma : \mathbf{Term}(L) \mapsto \mathbf{Term}(L)$ definida por:

$$\sigma(t) = \begin{cases} c & \text{si } t \text{ es una constante } c \\ \sigma(x) & \text{si } t \text{ es una variable } x \\ f(\sigma(t_1), \dots, \sigma(t_n)) & \text{si } t \text{ es } f(t_1, \dots, t_n) \end{cases}$$

- Notación: $t[x_1/t_1, \dots, x_n/t_n]$ es el término obtenido al aplicar sobre el término t la sustitución representada por $[x_1/t_1, \dots, x_n/t_n]$
- Ejemplos: Si $\sigma = [x/f(y, a), y/z]$, entonces
 - $\sigma(a) = a$, donde a es una constante
 - $\sigma(w) = w$, donde w es una variable distinta de x e y
 - $\sigma(h(a, x, w)) = h(a, f(y, a), w)$
 - $\sigma(f(x, y)) = f(f(y, a), z)$
 - $\sigma(h(a, f(x, y), w)) = h(a, f(f(y, a), z), w)$

- La extensión (única) de una sustitución σ al conjunto de las fórmulas de un lenguaje L es la aplicación $\sigma : \mathbf{Form}(L) \mapsto \mathbf{Form}(L)$ definida por:

$$\sigma(F) = \begin{cases} P(\sigma(t_1), \dots, \sigma(t_n)) & \text{si } F \text{ es } P(t_1, \dots, t_n) \\ \neg(\sigma(G)) & \text{si } F \text{ es } \neg G \\ \sigma(G_1) \star \sigma(G_2) & \text{si } F \text{ es } G_1 \star G_2 \\ \forall x \sigma_x(G) & \text{si } F \text{ es } \forall x G \\ \exists x \sigma_x(G) & \text{si } F \text{ es } \exists x G \end{cases}$$

donde σ_x es la sustitución definida por

$$\sigma_x(y) = \begin{cases} x & \text{si } y \text{ es la variable } x \\ \sigma(y) & \text{si } y \text{ es distinta de } x \end{cases}$$

- Notación: $F[x_1/t_1, \dots, x_n/t_n]$ es la fórmula obtenida al aplicar a la fórmula F la sustitución representada por $[x_1/t_1, \dots, x_n/t_n]$

- Ejemplos: Si $\sigma = [x/f(y), y/b]$, entonces
 - $\sigma(\forall x (Q(x) \rightarrow R(x, y))) = \forall x (\sigma_x(Q(x) \rightarrow R(x, y)))$
 $= \forall x (\sigma_x(Q(x)) \rightarrow \sigma_x(R(x, y)))$
 $= \forall x (Q(x) \rightarrow R(x, b))$
 - $\sigma(Q(x) \rightarrow \forall x R(x, y)) = \sigma(Q(x)) \rightarrow \sigma(\forall x R(x, y))$
 $= Q(f(y)) \rightarrow \forall x \sigma_x(R(x, y))$
 $= Q(f(y)) \rightarrow \forall x R(x, b)$
 - $\sigma(\forall x (Q(x) \rightarrow \exists y R(x, y))) = \forall x (\sigma_x(Q(x) \rightarrow \exists y R(x, y)))$
 $= \forall x (\sigma_x(Q(x)) \rightarrow \sigma_x(\exists y R(x, y)))$
 $= \forall x (Q(x) \rightarrow \exists y \sigma_{x,y}(R(x, y)))$
 $= \forall x (Q(x) \rightarrow \exists y R(x, y))$

- Una sustitución es **libre para una fórmula** si todas las ocurrencias de variables introducidas por la sustitución en esa fórmula resultan libres
- Ejemplos
 - La sustitución $[y/x]$ no es libre para $\exists x (x < y)$
 $(\exists x (x < y))[y/x] = \exists x (x < x)$
 - La sustitución $[y/g(y)]$ es libre para $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x, y))$
 $(\forall x (P(x) \rightarrow Q(x, y)))[y/g(y)] = \forall x (P(x) \rightarrow Q(x, g(y)))$
 - La sustitución $[y/g(x)]$ no es libre para $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x, y))$
 $(\forall x (P(x) \rightarrow Q(x, y)))[y/g(x)] = \forall x (P(x) \rightarrow Q(x, g(x)))$

Reglas del cuantificador universal

- Regla de eliminación del cuantificador universal

$$\frac{\forall x F}{F[x/t]} [\forall e] \qquad \begin{array}{c} S \vdash \forall x F \\ \Downarrow \\ S \vdash F[x/t] \end{array}$$

donde $[x/t]$ es una sustitución libre para F

- Analogía con las reglas $\wedge e_1$ y $\wedge e_2$
- Necesidad de la condición sobre $[x/t]$
 - Si $F = \exists y P(x, y)$ y $t = y$:

$$\{\forall x \exists y P(x, y)\} \not\vdash \exists y P(y, y)$$

Reglas del cuantificador universal

$\{P(c), \forall x (P(x) \rightarrow \neg Q(x))\} \vdash \neg Q(c)$

- | | | |
|----|--|-------------------------|
| 1. | $P(c)$ | premisa |
| 2. | $\forall x (P(x) \rightarrow \neg Q(x))$ | premisa |
| 3. | $P(c) \rightarrow \neg Q(c)$ | $[\forall e\ 2]$ |
| 4. | $\neg Q(c)$ | $[\rightarrow e\ 3\ 1]$ |

Reglas del cuantificador universal

- Regla de introducción del cuantificador universal

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c} x_0 \\ \vdots \\ F[x/x_0] \end{array}}}{\forall x F} [\forall i] \qquad \begin{array}{c} S \vdash F[x/x_0] \\ \Downarrow \\ S \vdash \forall x F \end{array}$$

donde x_0 es una variable que no aparece libre en S ni F

- Sugerencia: Utilizar siempre variables (x_0) nuevas
- Analogía con la regla $\wedge i$
- Necesidad de la condición sobre x_0
 - Si $F = P(x)$ y $x_0 = y$:

$$\{P(x), P(y)\} \not\vdash \forall x P(x)$$

Reglas del cuantificador universal

$\{\forall x (P(x) \rightarrow \neg Q(x)), \forall x P(x)\} \vdash \forall x \neg Q(x)$

- | | | |
|----|--|-------------------------|
| 1. | $\forall x (P(x) \rightarrow \neg Q(x))$ | premisa |
| 2. | $\forall x P(x)$ | premisa |
| 3. | x_0 | variable nueva |
| 4. | $P(x_0) \rightarrow \neg Q(x_0)$ | $[\forall e\ 1]$ |
| 5. | $P(x_0)$ | $[\forall e\ 2]$ |
| 6. | $\neg Q(x_0)$ | $[\rightarrow e\ 4\ 5]$ |
| 7. | $\forall x \neg Q(x)$ | $[\forall i\ 3-6]$ |

Reglas del cuantificador existencial

- Regla de introducción del cuantificador existencial

$$\frac{F[x/t]}{\exists x F} [\exists i] \qquad \begin{array}{c} S \vdash F[x/t] \\ \Downarrow \\ S \vdash \exists x F \end{array}$$

donde $[x/t]$ es una sustitución libre para F

- Analogía con las reglas $\forall i_1$ y $\forall i_2$
- Necesidad de la condición sobre $[x/t]$
 - Si $F = \forall y P(x, y)$ y $t = y$:

$$\{\forall y P(y, y)\} \not\vdash \exists x \forall y P(x, y)$$

Reglas del cuantificador existencial

$$\{\forall x P(x)\} \vdash \exists x P(x)$$

1. $\forall x P(x)$ premisa
2. $P(x_0)$ $[\forall e \ 1]$
3. $\exists x P(x)$ $[\exists i \ 2]$

Reglas del cuantificador existencial

- Regla de eliminación del cuantificador existencial

$$\frac{\begin{array}{c} \exists x F \\ \boxed{\begin{array}{c} x_0 \quad F[x/x_0] \\ \vdots \\ G \end{array}} \end{array}}{G} [\exists e]$$
$$\begin{array}{c} S \vdash \exists x F \\ S \cup \{F[x/x_0]\} \vdash G \\ \Downarrow \\ S \vdash G \end{array}$$

donde x_0 es una variable que no aparece libre en S , F ni G

- Sugerencia: Utilizar siempre variables (x_0) nuevas
- Analogía con la regla $\forall e$
- Necesidad de la condición sobre x_0
 - Si $F = P(x)$ y $x_0 = y$:

$$\{\exists x P(x)\} \not\vdash P(y)$$

Reglas del cuantificador existencial

$\{\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)), \exists x P(x)\} \vdash \exists x Q(x)$

- | | | |
|----|-------------------------------------|-------------------------|
| 1. | $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$ | premisa |
| 2. | $\exists x P(x)$ | premisa |
| 3. | $x_0, P(x_0)$ | supuesto |
| 4. | $P(x_0) \rightarrow Q(x_0)$ | $[\forall e\ 1]$ |
| 5. | $Q(x_0)$ | $[\rightarrow e\ 4\ 3]$ |
| 6. | $\exists x Q(x)$ | $[\exists i\ 5]$ |
| 7. | $\exists x Q(x)$ | $[\exists e\ 2\ 3-6]$ |

Equivalencia: $\neg\forall x F \equiv \exists x \neg F$

$$\{\neg\forall x P(x)\} \vdash \exists x \neg P(x)$$

- | | | |
|-----|---------------------------|---------------------|
| 1. | $\neg\forall x P(x)$ | premisa |
| 2. | $\neg\exists x \neg P(x)$ | supuesto |
| 3. | x_0 | variable nueva |
| 4. | $\neg P(x_0)$ | supuesto |
| 5. | $\exists x \neg P(x)$ | $[\exists i \ 4]$ |
| 6. | $\perp$ | $[\neg e \ 2 \ 5]$ |
| 7. | $P(x_0)$ | $[RAA \ 4-6]$ |
| 8. | $\forall x P(x)$ | $[\forall i \ 3-7]$ |
| 9. | $\perp$ | $[\neg e \ 1 \ 8]$ |
| 10. | $\exists x \neg P(x)$ | $[RAA \ 2-9]$ |

Equivalencia: $\neg\forall x F \equiv \exists x \neg F$

$\{\exists x \neg P(x)\} \vdash \neg\forall x P(x)$

- | | | |
|----|-----------------------|-----------------------|
| 1. | $\exists x \neg P(x)$ | premisa |
| 2. | $\forall x P(x)$ | supuesto |
| 3. | $x_0, \neg P(x_0)$ | supuesto |
| 4. | $P(x_0)$ | $[\forall e\ 2]$ |
| 5. | $\perp$ | $[\neg e\ 3\ 4]$ |
| 6. | $\perp$ | $[\exists e\ 1\ 3-5]$ |
| 7. | $\neg\forall x P(x)$ | $[\neg i\ 2-7]$ |

Equivalencia: $\forall x (F \wedge G) \equiv \forall x F \wedge \forall x G$

$\{\forall x (P(x) \wedge Q(x))\} \vdash \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$

- | | | |
|-----|--|--------------------|
| 1. | $\forall x (P(x) \wedge Q(x))$ | premisa |
| 2. | x_0 | variable nueva |
| 3. | $P(x_0) \wedge Q(x_0)$ | $[\forall e\ 1]$ |
| 4. | $P(x_0)$ | $[\wedge e_1\ 3]$ |
| 5. | $\forall x P(x)$ | $[\forall i\ 2-4]$ |
| 6. | x_1 | variable nueva |
| 7. | $P(x_1) \wedge Q(x_1)$ | $[\forall e\ 1]$ |
| 8. | $Q(x_1)$ | $[\wedge e_2\ 7]$ |
| 9. | $\forall x Q(x)$ | $[\forall i\ 6-8]$ |
| 10. | $\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$ | $[\wedge i\ 5\ 9]$ |

Equivalencia: $\forall x (F \wedge G) \equiv \forall x F \wedge \forall x G$

$\{\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)\} \vdash \forall x (P(x) \wedge Q(x))$

- | | | |
|----|--|-------------------|
| 1. | $\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$ | premisa |
| 2. | x_0 | variable nueva |
| 3. | $\forall x P(x)$ | $[\wedge e_1 1]$ |
| 4. | $P(x_0)$ | $[\forall e 2]$ |
| 5. | $\forall x Q(x)$ | $[\wedge e_2 1]$ |
| 6. | $Q(x_0)$ | $[\forall e 4]$ |
| 7. | $P(x_0) \wedge Q(x_0)$ | $[\wedge i 4 6]$ |
| 8. | $\forall x (P(x) \wedge Q(x))$ | $[\forall i 2-7]$ |

Equivalencia: $\exists x (F \vee G) \equiv \exists x F \vee \exists x G$

$\{\exists x (P(x) \vee Q(x))\} \vdash \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$

- | | | |
|-----|--------------------------------------|----------------------------|
| 1. | $\exists x (P(x) \vee Q(x))$ | premisa |
| 2. | $x_0, P(x_0) \vee Q(x_0)$ | supuesto |
| 3. | $P(x_0)$ | supuesto |
| 4. | $\exists x P(x)$ | $[\exists i \ 3]$ |
| 5. | $\exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$ | $[\vee i_1 \ 4]$ |
| 6. | $Q(x_0)$ | supuesto |
| 7. | $\exists x Q(x)$ | $[\exists i \ 6]$ |
| 8. | $\exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$ | $[\vee i_2 \ 7]$ |
| 9. | $\exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$ | $[\vee e \ 2 \ 3-5 \ 6-8]$ |
| 10. | $\exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$ | $[\exists e \ 1 \ 2-9]$ |

Equivalencia: $\exists x (F \vee G) \equiv \exists x F \vee \exists x G$

$\{\exists x P(x) \vee \exists x Q(x)\} \vdash \exists x (P(x) \vee Q(x))$

- | | | |
|-----|--------------------------------------|-----------------------|
| 1. | $\exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$ | premisa |
| 2. | $\exists x P(x)$ | supuesto |
| 3. | $x_0, P(x_0)$ | supuesto |
| 4. | $P(x_0) \vee Q(x_0)$ | $[\vee i_1 3]$ |
| 5. | $\exists x (P(x) \vee Q(x))$ | $[\exists i 4]$ |
| 6. | $\exists x (P(x) \vee Q(x))$ | $[\exists e 2\ 3-5]$ |
| 7. | $\exists x Q(x)$ | supuesto |
| 8. | $x_0, Q(x_0)$ | supuesto |
| 9. | $P(x_0) \vee Q(x_0)$ | $[\vee i_2 8]$ |
| 10. | $\exists x (P(x) \vee Q(x))$ | $[\exists i 9]$ |
| 11. | $\exists x (P(x) \vee Q(x))$ | $[\exists e 7\ 8-10]$ |
| 12. | $\exists x (P(x) \vee Q(x))$ | $[\vee e 1\ 2-9]$ |

Equivalencia: $\exists x \exists y F \equiv \exists y \exists x F$

$\{\exists x \exists y P(x, y)\} \vdash \exists y \exists x P(y, x)$

- | | | |
|----|-------------------------------|----------------------|
| 1. | $\exists x \exists y P(x, y)$ | premisa |
| 2. | $x_0, \exists y P(x_0, y)$ | supuesto |
| 3. | $y_0, P(x_0, y_0)$ | supuesto |
| 4. | $\exists x P(x, y_0)$ | [$\exists i$ 3] |
| 5. | $\exists y \exists x P(x, y)$ | [$\exists i$ 4] |
| 6. | $\exists y \exists x P(x, y)$ | [$\exists e$ 2 3-5] |
| 7. | $\exists y \exists x P(x, y)$ | [$\exists e$ 1 2-6] |

Corrección y completitud del cálculo de Deducción Natural en Lógica de Primer Orden

Dados un conjunto finito de fórmulas $\mathbf{S}$ y una fórmula $\mathbf{F}$. Decimos que $\mathbf{F}$ se deduce a partir de $\mathbf{S}$ mediante el cálculo de Deducción Natural ($\mathbf{S} \vdash \mathbf{F}$) si hay una secuencia finita de pares $\mathbf{S}_0 \vdash \mathbf{F}_0$, $\mathbf{S}_1 \vdash \mathbf{F}_1$, ..., $\mathbf{S}_n \vdash \mathbf{F}_n$ tales que

- $\mathbf{S}_n = \mathbf{S}$, $\mathbf{F}_n = \mathbf{F}$ y
- para todo $i = 0, \dots, n$, el par $\mathbf{S}_i \vdash \mathbf{F}_i$ se deduce a partir de pares anteriores mediante alguna de las reglas del cálculo de Deducción Natural.

Deducción en el cálculo de Deducción Natural

Las reglas del cálculo de Deducción Natural son las siguientes:

- **[p]**: Si $F \in S$ entonces $S \vdash F$
- **$[\wedge i]$** : Si $S \vdash F$ y $S \vdash G$ entonces $S \vdash F \wedge G$
- **$[\wedge e_1]$** : Si $S \vdash F \wedge G$ entonces $S \vdash F$
- **$[\wedge e_2]$** : Si $S \vdash F \wedge G$ entonces $S \vdash G$
- **$[\neg\neg i]$** : Si $S \vdash F$ entonces $S \vdash \neg\neg F$
- **$[\neg\neg e]$** : Si $S \vdash \neg\neg F$ entonces $S \vdash F$
- **$[\rightarrow e]$** : Si $S \vdash F \rightarrow G$ y $S \vdash F$ entonces $S \vdash G$
- **$[\rightarrow i]$** : Si $S \cup \{F\} \vdash G$ entonces $S \vdash F \rightarrow G$

Deducción en el cálculo de Deducción Natural

Las reglas del cálculo de Deducción Natural son las siguientes:

- $[\forall i_1]$: Si $S \vdash F$ entonces $S \vdash F \vee G$
- $[\forall i_2]$: Si $S \vdash G$ entonces $S \vdash F \vee G$
- $[\forall e]$: Si $S \vdash F \vee G$, $S \cup \{F\} \vdash H$ y $S \cup \{G\} \vdash H$,
entonces $S \vdash H$
- $[\leftrightarrow i]$: Si $S \vdash F \rightarrow G$ y $S \vdash G \rightarrow F$ entonces $S \vdash F \leftrightarrow G$
- $[\leftrightarrow e_1]$: Si $S \vdash F \leftrightarrow G$ entonces $S \vdash F \rightarrow G$
- $[\leftrightarrow e_2]$: Si $S \vdash F \leftrightarrow G$ entonces $S \vdash G \rightarrow F$
- $[\perp e]$: Si $S \vdash \perp$ entonces $S \vdash F$
- $[\neg e]$: Si $S \vdash \neg F$ y $S \vdash F$ entonces $S \vdash \perp$
- $[\neg i]$: Si $S \cup \{F\} \vdash \perp$ entonces $S \vdash \neg F$

Deducción en el cálculo de Deducción Natural

Las reglas del cálculo de Deducción Natural son las siguientes:

- **[$\forall e$]**: Si $S \vdash \forall x F$ entonces $S \vdash F[x/t]$
donde $[x/t]$ es una sustitución libre para F
- **[$\forall i$]**: Si $S \vdash F[x/x_0]$ entonces $S \vdash \forall x F$
donde $x_0 \notin VL(S \cup \{F\})$
- **[$\exists i$]**: Si $S \vdash F[x/t]$ entonces $S \vdash \exists x F$
donde $[x/t]$ es una sustitución libre para F
- **[$\exists e$]**: Si $S \vdash \exists x F$ y $S \cup \{F[x/x_0]\} \vdash G$ entonces $S \vdash G$
donde $x_0 \notin VL(S \cup \{F, G\})$

- **Principio de inducción estructural sobre términos:**

Si $\mathcal{P}$ es una propiedad sobre los términos que verifica

- Todas las constantes cumplen la propiedad $\mathcal{P}$
- Todas las variables cumplen la propiedad $\mathcal{P}$
- Si $t_1 \dots t_n$ son términos que cumplen la propiedad $\mathcal{P}$ y f es un símbolo de función de aridad n , entonces $f(t_1, \dots, t_n)$ también cumple

Entonces cualquier término del lenguaje cumple la propiedad $\mathcal{P}$

- **Principio de inducción estructural sobre fórmulas:**

Si $\mathcal{P}$ es una propiedad sobre las fórmulas que verifica

- Todas las fórmulas atómicas cumplen la propiedad $\mathcal{P}$
- Si $\mathbf{F}$ cumple la propiedad $\mathcal{P}$ entonces $\neg\mathbf{F}$ también la cumple
- Si $\mathbf{F}$ y $\mathbf{G}$ cumplen la propiedad $\mathcal{P}$ entonces $\mathbf{F} \star \mathbf{G}$ también la cumple
- Si $\mathbf{F}$ cumple la propiedad $\mathcal{P}$ entonces $\forall x \mathbf{F}$ y $\exists x \mathbf{F}$ también la cumplen

Entonces cualquier fórmula de primer orden cumple $\mathcal{P}$

- **Versión Fuerte:**

- Si $\mathbf{F}[x/t]$ cumple la propiedad $\mathcal{P}$ para cualquier término del lenguaje $\mathbf{t}$, entonces $\forall x \mathbf{F}$ y $\exists x \mathbf{F}$ también la cumplen

- **Lemas de irrelevancia de variables**

- Sea $\mathbf{t}$ un término de $\mathbf{L}$ e $\mathcal{I}$ una estructura de $\mathbf{L}$:
 - Si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son dos asignaciones en $\mathcal{I}$ que coinciden sobre las variables de $\mathbf{t}$, entonces $\mathcal{I}_{\mathbf{A}}(\mathbf{t}) = \mathcal{I}_{\mathbf{B}}(\mathbf{t})$.
- Sea $\mathbf{F}$ una fórmula de $\mathbf{L}$ e $\mathcal{I}$ una estructura de $\mathbf{L}$:
 - Si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son dos asignaciones en $\mathcal{I}$ que coinciden sobre las variables libres de $\mathbf{F}$, entonces $\mathcal{I}_{\mathbf{A}}(\mathbf{F}) = \mathcal{I}_{\mathbf{B}}(\mathbf{F})$.

- **Lemas sobre sustituciones y asignaciones:** Sea $\mathcal{I}$ una estructura de $\mathbf{L}$, $\mathbf{A}$ una asignación en $\mathcal{I}$ y $\mathbf{h}$ un término de $\mathbf{L}$:
 - Para todo término $\mathbf{t}$ de $\mathbf{L}$:

$$\mathcal{I}_{\mathbf{A}[\mathbf{x}/\mathcal{I}_{\mathbf{A}}(\mathbf{h})]}(\mathbf{t}) = \mathcal{I}_{\mathbf{A}}(\mathbf{t}[\mathbf{x}/\mathbf{h}])$$

- Para toda fórmula $\mathbf{F}$ de $\mathbf{L}$ tal que $[\mathbf{x}/\mathbf{h}]$ es una sustitución libre para $\mathbf{F}$:

$$\mathcal{I}_{\mathbf{A}[\mathbf{x}/\mathcal{I}_{\mathbf{A}}(\mathbf{h})]}(\mathbf{F}) = \mathcal{I}_{\mathbf{A}}(\mathbf{F}[\mathbf{x}/\mathbf{h}])$$

- **Teorema de corrección:** Sea S un conjunto finito de fórmulas y F una fórmula:

$$\text{si } S \vdash F \text{ entonces } S \models F$$

- Demostración por inducción fuerte en la longitud de la deducción $S \vdash F$

- **Lema de monotonía:** Sean S y S' dos conjuntos finitos de fórmulas tales que $S \subseteq S'$ y F una fórmula:
si $S \vdash F$ entonces $S' \vdash F$
- Demostración por inducción fuerte en la longitud de la deducción $S \vdash F$

- **Teorema de completitud:** Sea **S** un conjunto finito de fórmulas y **F** una fórmula:

si $\mathbf{S} \models \mathbf{F}$ entonces $\mathbf{S} \vdash \mathbf{F}$

- Por reducción al absurdo, usando los **Lemas L1, L2 y L3**.

Propiedades del cálculo de Deducción Natural

- **Lema L1:** Dado S un conjunto de fórmulas y F una fórmula tal que $S \not\vdash F$, entonces $S \cup \{\neg F\} \not\vdash \perp$
- **Lema L2 (Lema de existencia de modelos):** Todo conjunto de fórmulas S tal que $S \not\vdash \perp$, es consistente
- **Lema L3:** Dado S un conjunto de fórmulas y F una fórmula tal que $S \cup \{\neg F\}$ es consistente, entonces $S \not\vdash F$

- **Universo de Herbrand:** El conjunto de los términos cerrados del lenguaje definidos como:
 - Las constantes son términos cerrados
 - Si f es un símbolo de función de aridad n y $t_1, \dots, t_n$ son términos cerrados, entonces $f(t_1, \dots, t_n)$ es un término cerrado

El universo de Herbrand de L , $UH(L)$, es el conjunto de los términos cerrados en L

- **Numerabilidad de las fórmulas cerradas:** El conjunto de todas las fórmulas cerradas (sentencias) es numerable

- **Cierre maximal no contradictorio:** Sea S un conjunto de fórmulas tal que $S \not\vdash \perp$ y consideramos una enumeración de todas las fórmulas cerradas: $F_1, F_1, \dots$, con $F_i \neq F_j$, para $i \neq j$. Construimos la siguiente secuencia de conjuntos de fórmulas:

- $S_0 = S$

- Para todo $i > 0$, $S_i =$

$$\begin{cases} S_{i-1} \cup \{F_i\} \\ S_{i-1} \cup \{F_i, G[x/c]\} \\ S_i \end{cases}$$

si $S_{i-1} \cup \{F_i\} \not\vdash \perp$ y $F_i \neq \exists x G$

si $S_{i-1} \cup \{F_i\} \not\vdash \perp$, $F_i = \exists x G$

y c es una constante nueva en $S_{i-1} \cup F_i$
en otro caso

Finalmente, $S_\infty = \bigcup S_i$

- **Cierre maximal no contradictorio:** Sea S un conjunto de fórmulas tal que $S \not\vdash \perp$ y consideramos una enumeración de todas las fórmulas cerradas: $F_1, F_1, \dots$, con $F_i \neq F_j$, para $i \neq j$.
Propiedades:
 - $\forall i, S_i \subseteq S_\infty$, en particular $S \subseteq S_\infty$
 - $\forall i \leq j, S_i \subseteq S_j$ y $\forall i < j, S_i \subseteq S_{j-1}$
 - $\forall i, S_i \not\vdash \perp$
 - $\forall i, F_i \in S_\infty$ si y solo si $S_{i-1} \cup \{F_i\} \not\vdash \perp$ (si y solo si $F_i \in S_i$)

- **Interpretación sintáctica:** Sea $\mathbf{S}$ un conjunto de fórmulas tal que $\mathbf{S} \not\vdash \perp$ y $\mathbf{S}_\infty$ el cierre maximal no contradictorio de $\mathbf{S}$. Vamos a construir una estructura $\mathcal{I} = (\mathbf{U}, \mathbf{I})$ de $\mathbf{L}$:
 - Universo $\mathbf{U} = \mathbf{UH}(\mathbf{L})$
 - Los elementos del universo son la versión escrita de los términos cerrados, los representaremos como $\overline{t}$
 - Interpretación de los símbolos propios de $\mathbf{L}$:
 - $\mathbf{I}(c) = \overline{c}$ para todo símbolo de constante c
 - $\mathbf{I}(f) : \mathbf{U}^n \mapsto \mathbf{U}$, tal que $\mathbf{I}(f)(\overline{t_1}, \dots, \overline{t_n}) = \overline{f(t_1, \dots, t_n)}$, para todo símbolo de función f
 - $\mathbf{I}(P) = \{(\overline{t_1}, \dots, \overline{t_n}) \text{ tales que } P(t_1, \dots, t_n) \in \mathbf{S}_\infty\}$, para todo símbolo de predicado de aridad $n > 0$
 - $\mathbf{I}(P) = \begin{cases} 1 & \text{si } P \in \mathbf{S}_\infty \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$
para todo símbolo de predicado de aridad 0.

- **Interpretación sintáctica:** Sea $\mathbf{S}$ un conjunto de fórmulas tal que $\mathbf{S} \not\vdash \perp$ y $\mathbf{S}_\infty$ el cierre maximal no contradictorio de $\mathbf{S}$ e $\mathcal{I} = (\mathbf{U}, \mathbf{I})$ la interpretación sintáctica asociada
 - **Valor de los términos cerrados:** Para todo término cerrado $\mathbf{t}$ y toda asignación $\mathbf{A}$: $\mathcal{I}_{\mathbf{A}}(\mathbf{t}) = \bar{\mathbf{t}}$
 - **Valor de los fórmulas cerrados:** Para toda fórmula cerrada $\mathbf{F}$ y toda asignación $\mathbf{A}$
 - Si $\mathbf{F} \in \mathbf{S}_\infty$ entonces $\mathcal{I}_{\mathbf{A}}(\mathbf{F}) = 1$
 - Si $\mathbf{F} \notin \mathbf{S}_\infty$ entonces $\mathcal{I}_{\mathbf{A}}(\mathbf{F}) = 0$

- **Lema de existencia de modelos (cerrado):** Si S es un conjunto de fórmulas cerradas con $S \not\vdash \perp$ entonces S es consistente
- **Lema de existencia de modelos:** Si S es un conjunto de fórmulas con $S \not\vdash \perp$ entonces S es consistente
 - Si $S \not\vdash \perp$ entonces $\{\wedge S\} \not\vdash \perp$
 - Si $\{\wedge S\} \not\vdash \perp$ entonces $\{\exists \wedge S\} \not\vdash \perp$
 - Si $\{\exists \wedge S\} \not\vdash \perp$ entonces $\{\exists \wedge S\}$ es consistente
 - Si $\{\exists \wedge S\}$ es consistente entonces $\{\wedge S\}$ es consistente
 - Si $\{\wedge S\}$ es consistente entonces S es consistente

Reglas de la igualdad

Reglas de la igualdad

- Regla de eliminación de la igualdad

$$\frac{t_1 = t_2 \quad F[x/t_1]}{F[x/t_2]} [=e]$$

donde $[x/t_1]$ y $[x/t_2]$ son sustituciones libres para F

- Regla de sustitución de izquierda a derecha

$$\{x + y = z, x + y > 0\} \vdash z > 0$$

1. $x + y = z$ premisa
2. $x + y > 0$ premisa
3. $z > 0$ $[=e \ 1 \ 2]$

Reglas de la igualdad

- Regla de introducción de la igualdad

$$\frac{}{t = t} [=i]$$

- Se trata de la reflexividad de la igualdad
- Simetría de la igualdad

$$\{s = t\} \vdash t = s$$

1. $s = t$ premisa
2. $s = s$ $[=i]$
3. $t = s$ $[=e \ 1 \ 2]$

- Transitividad de la igualdad

$$\{r = s, s = t\} \vdash r = t$$

1. $r = s$ premisa
2. $s = t$ premisa
3. $r = t$ [=e 2 1]

- Regla de sustitución de derecha a izquierda

$$\{t = s, P(s)\} \vdash P(t)$$

1. $t = s$ premisa
2. $P(s)$ premisa
3. $t = t$ [=i]
4. $s = t$ [=e 1 3]
5. $P(t)$ [=e 4 2]

- C. Badesa, I. Jané y R. Jansana *Elementos de lógica formal*
Capítulo 16
- J.A. Díez. *Iniciación a la Lógica*
Capítulo 8
- M. Huth y M. Ryan. *Logic in computer science: modelling and reasoning about systems*
Capítulo 2.3