

# Lógica Matemática y Fundamentos (Curso 2023-2024)

## Grado en Matemáticas

### Relación 1: Sintaxis y semántica de la lógica proposicional

#### Ejercicio 1:

Formalizar el siguiente argumento:

Si Juan es andaluz entonces Juan es europeo. Efectivamente, Juan es andaluz. Por lo tanto, Juan es europeo.

Usando los símbolos:

A para “Juan es andaluz” y

E para “Juan es europeo”.

#### Ejercicio 2:

Formalizar el siguiente argumento:

Cuando tanto la temperatura como la presión atmosférica permanecen constantes, no llueve. La temperatura permanece constante. Por lo tanto, en caso de que llueva, la presión atmosférica no permanece constante.

Usando los símbolos:

T para “la temperatura permanece constante”,

P para “la presión atmosférica permanece constante” y

L para “llueve”.

#### Ejercicio 3:

Formalizar el siguiente argumento:

Siempre que un número  $x$  es divisible por 10, acaba en 0. El número  $x$  no acaba en 0. Por lo tanto,  $x$  no es divisible por 10.

Usando los símbolos:

D para “el número es divisible por 10” y

C para “el número acaba en cero”.

#### Ejercicio 4:

Formalizar el siguiente argumento:

En cierto experimento, cuando hemos empleado un fármaco A, el paciente ha mejorado considerablemente en el caso, y sólo en el caso, en que no se haya empleado también un fármaco B. Además, o se ha empleado el fármaco A o se ha empleado el fármaco B. En consecuencia, podemos afirmar que si no hemos empleado el fármaco B, el paciente ha mejorado considerablemente.

Usando los símbolos:

A para “hemos empleado el fármaco A”,

B para “hemos empleado el fármaco B” y

M para “el paciente ha mejorado notablemente”.

**Ejercicio 5:**

Formalizar el siguiente argumento:

Si no está el mañana ni el ayer escrito, entonces no está el mañana escrito.

Usando los símbolos:

M para “el mañana está escrito” y  
A para “el ayer está escrito”.

**Ejercicio 6:**

Formalizar el siguiente argumento:

Me matan si no trabajo y si trabajo me matan. Me matan siempre me matan.

Usando los símbolos:

M para “me matan” y  
T para “trabajo”.

**Ejercicio 7:**

Formalizar el siguiente argumento:

Si te llamé por teléfono, entonces recibiste mi llamada y no es cierto que no te avisé del peligro que corrías. Por consiguiente, como te llamé, es cierto que te avisé del peligro que corrías.

Usando los símbolos:

T para “te llamé por teléfono”,  
R para “recibiste mi llamada” y  
P para “te avisé del peligro que corrías”.

**Ejercicio 8:**

Formalizar el siguiente argumento:

Si no hay control de nacimientos, entonces la población crece ilimitadamente; pero si la población crece ilimitadamente, aumentará el índice de pobreza. Por consiguiente, si no hay control de nacimientos, aumentará el índice de pobreza.

Usando los símbolos:

N para “hay control de nacimientos”,  
P para “la población crece ilimitadamente” y  
I para “aumentará el índice de pobreza”.

**Ejercicio 9:**

Formalizar el siguiente argumento:

Si el general era leal, hubiera obedecido las órdenes, y si era inteligente las hubiera comprendido. O el general desobedeció las órdenes o no las comprendió. Luego, el general era desleal o no era inteligente.

Usando los símbolos:

L para “el general es leal”,  
Ob para “el general obedece las órdenes”,  
I para “el general es inteligente” y  
C para “el general comprende las órdenes”.

**Ejercicio 10:**

Formalizar el siguiente argumento:

Si Zeus fuera capaz de evitar el mal y quisiera hacerlo, lo haría. Si Zeus fuera incapaz de evitar el mal, no sería omnipotente; si no quisiera evitar el mal sería malévolo. Zeus no evita el mal. Si Zeus existe, es omnipotente y no es malévolo. Luego, Zeus no existe.

Usando los símbolos:

C para “Zeus es capaz de evitar el mal”,  
Q para “Zeus quiere evitar el mal”,  
Om para “Zeus es omnipotente”,  
M para “Zeus es malévolo”,  
P para “Zeus evita el mal” y  
E para “Zeus existe”.

**Ejercicio 11:**

Formalizar el siguiente argumento:

Nadie más que Pedro, Quintín y Raúl están bajo sospecha y al menos uno es traidor. Si Quintín es el traidor entonces lleva al menos un cómplice (que puede ser Pedro o Raúl). Raúl es leal. Por lo tanto, Pedro es traidor.

Usando los símbolos:

P para “Pedro es traidor”,  
Q para “Quintín es traidor” y  
R para “Raúl es traidor”.

**Ejercicio 12:**

Formalizar el siguiente argumento:

Si la válvula está abierta o la monitorización está preparada, entonces se envía una señal de reconocimiento y un mensaje de funcionamiento al controlador del ordenador. Si se envía un mensaje de funcionamiento al controlador del ordenador o el sistema está en estado normal, entonces se aceptan las órdenes del operador. Por lo tanto, si la válvula está abierta, entonces se aceptan las órdenes del operador.

Usando los símbolos:

A para “la válvula está abierta”,  
P para “la monitorización está preparada”,  
R para “envía una señal de reconocimiento”,  
F para “envía un mensaje de funcionamiento”,  
N para “el sistema está en estado normal” y  
Or para “se aceptan órdenes del operador”.

**Ejercicio 13:**

Formalizar el siguiente argumento:

Si trabajo gano dinero, pero si no trabajo gozo de la vida. Sin embargo, si trabajo no gozo de la vida, mientras que si no trabajo no gano dinero. Por lo tanto, gozo de la vida si y sólo si no gano dinero.

Usando los símbolos:

T para “trabajo”,  
D para “gano dinero” y  
V para “gozo de la vida”.

**Ejercicio 14:**

En “El mercader de Venecia”, de Shakespeare, Porcia tenía tres cofres, uno de oro, otro de plata y otro de plomo, DENTRO DE UNO SOLO DE LOS CUALES ESTABA SU RETRATO. Sus pretendientes tenían que elegir uno de los cofres y si tenían suerte (o inteligencia) elegirían el que tenía el retrato, pudiendo así pedir a Porcia por esposa. En la tapa de cada cofre había una inscripción para ayudar al pretendiente a elegir sabiamente. Pero supongamos que Porcia quisiera elegir marido, no por su bondad, sino por su inteligencia. Tendría las siguientes inscripciones en los cofres:

- Cofre de Oro: EL RETRATO ESTÁ EN ESTE COFRE
- Cofre de Plata: EL RETRATO NO ESTÁ AQUÍ
- Cofre de Plomo: EL RETRATO NO ESTÁ EN EL COFRE DE ORO

Porcia explicó al pretendiente que de los tres enunciados, A LO SUMO UNO ERA VERDAD. ¿Cuál cofre debe de elegir el pretendiente?

El misterio de los cofres de Porcia I  
¿Cómo se llama este libro?  
Raymond Smullyan

Formalizar este problema en lógica proposicional utilizando la siguiente simbología (no se trata de una formalización estricta de la argumentación, solo de las sentencias relevantes para encontrar el retrato):

- A: La inscripción del Cofre de Oro es cierta
- B: La inscripción del Cofre de Plata es cierta
- C: La inscripción del Cofre de Plomo es cierta
- X: El retrato está en el Cofre de Oro
- Y: El retrato está en el Cofre de Plata
- Z: El retrato está en el Cofre de Plomo

La formalización realizada debe permitir deducir el cofre en el que está el retrato.

**Ejercicio 15:**

En “El mercader de Venecia”, de Shakespeare, Porcia tenía tres cofres, uno de oro, otro de plata y otro de plomo, DENTRO DE UNO SOLO DE LOS CUALES ESTABA SU RETRATO. Sus pretendientes tenían que elegir uno de los cofres y si tenían suerte (o inteligencia) elegirían el que tenía el retrato, pudiendo así pedir a Porcia por esposa. En la tapa de cada cofre había una inscripción para ayudar al pretendiente a elegir sabiamente. Pero supongamos que Porcia quisiera elegir marido, no por su bondad, sino por su inteligencia. Tendría las siguientes inscripciones en los cofres:

- Cofre de Oro: EL RETRATO NO ESTÁ EN EL COFRE DE PLATA
- Cofre de Plata: EL RETRATO NO ESTÁ EN ESTE COFRE
- Cofre de Plomo: EL RETRATO ESTÁ EN ESTE COFRE

Porcia explicó al pretendiente que de los tres enunciados, POR LO MENOS UNO ERA VERDADERO Y POR LO MENOS OTRO ERA FALSO. ¿En cuál de los cofres esta el retrato?

El misterio de los cofres de Porcia II  
¿Cómo se llama este libro?  
Raymond Smullyan

Formalizar este problema en lógica proposicional utilizando la siguiente simbología (no se trata de una formalización estricta de la argumentación, solo de las sentencias relevantes para encontrar el retrato):

- A: La inscripción del Cofre de Oro es cierta
- B: La inscripción del Cofre de Plata es cierta
- C: La inscripción del Cofre de Plomo es cierta
- X: El retrato está en el Cofre de Oro
- Y: El retrato está en el Cofre de Plata
- Z: El retrato está en el Cofre de Plomo

La formalización realizada debe permitir deducir el cofre en el que está el retrato.

**Ejercicio 16:**

Definir por recursión sobre fórmulas las siguientes funciones:

- $nv(F)$ , que calcula el número variables proposicionales que ocurren en la fórmula  $F$ .  
Por ejemplo,  $nv(p \rightarrow p \vee q) = 3$ .
- $prof(F)$  que calcula la profundidad del árbol de análisis de la fórmula  $F$ .  
Por ejemplo,  $prof(p \rightarrow p \vee q) = 2$ .

Demostrar por inducción, que para toda fórmula  $F$ ,  $nv(F) \leq 2^{prof(F)}$ .

**Ejercicio 17:**

¿Existe un conjunto  $S$  de tres fórmulas tal que de todos los subconjuntos de  $S$  sólo uno sea consistente?

**Ejercicio 18:**

¿Es cierto que si  $F \rightarrow G$  y  $F$  son satisfacibles, entonces  $G$  es satisfacible? Si es cierto, dar una explicación. Si no es cierto, dar un contraejemplo.

**Ejercicio 19:**

Demostrar o refutar las siguientes afirmaciones:

1. Si  $F$  es una fórmula satisfacible, entonces todas las subfórmulas de  $F$  son satisfacibles.
2. Existen tautologías tales que todas sus subfórmulas son tautologías.
3. Si  $F \rightarrow G$  es insatisfacible, entonces  $F$  es tautología.
4. Si  $F \rightarrow G$  es tautología, entonces  $F$  es insatisfacible.

**Ejercicio 20:**

Sean  $S$  y  $T$  conjuntos de fórmulas. Demostrar o refutar las siguientes afirmaciones:

1. Si  $S$  es consistente y  $T$  es inconsistente, entonces  $S \cup T$  es inconsistente.
2. Si  $S$  es consistente y  $T$  es inconsistente, entonces  $S \cap T$  es inconsistente.
3. Si  $S$  es consistente y  $T$  es inconsistente, entonces  $S \cup T$  es consistente.
4. Si  $S$  es consistente y  $T$  es inconsistente, entonces  $S \cap T$  es consistente.

**Ejercicio 21:**

Da un ejemplo de tres fórmulas  $F_1, F_2, F_3$  tales que  $F_1 \wedge F_2 \wedge F_3$  sea insatisfactible y donde cualquier conjunción de todas ellas menos una sea satisfactible. Generalízalo a  $n$  fórmulas.

**Ejercicio 22:**

1. Probar que la fórmula  $((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$  es una tautología
2. Si definimos recursivamente  $A_0 = (p \rightarrow q)$  y  $A_{n+1} = A_n \rightarrow p$ , ¿para qué valores de  $n$  es  $A_n$  es una tautología?

**Ejercicio 23:**

Consideremos el operador de Sheffer ( $\uparrow$ ) con la siguiente función de verdad

$$H_{\uparrow}(i, j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j = 1 \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Justificar adecuadamente que  $\{\uparrow\}$  es un conjunto funcionalmente completo para la lógica proposicional.

**Ejercicio 24:**

Consideremos el operador de Pierce ( $\downarrow$ ) con la siguiente función de verdad

$$H_{\downarrow}(i, j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j = 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Justificar adecuadamente que  $\{\downarrow\}$  es un conjunto funcionalmente completo para la lógica proposicional.