

Sintaxis y semántica de la lógica de primer orden

Francisco J. Martín Mateos

Dpto. Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial
Universidad de Sevilla

Limitación expresiva de la lógica proposicional

- Si Sevilla es vecina de Cádiz, entonces Cádiz es vecina de Sevilla. Sevilla es vecina de Cádiz. Por tanto, Cádiz es vecina de Sevilla.
 - Formalización en lógica proposicional:
 $\{SvC \rightarrow CvS, SvC\} \models CvS$
- Si una provincia es vecina de otra, entonces la segunda es vecina de la primera. Sevilla es vecina de Cádiz. Por tanto, Cádiz es vecina de Sevilla.
 - Formalización en lógica proposicional: Imposible.
 - Es necesario poder hacer referencia a individuos genéricos caracterizados por funciones.
 - *Ser una provincia*
 - *Ser vecinas*

- Símbolos lógicos
 - Variables: $x, y, z, \dots, x_1, x_2, \dots$
 - Conectivas lógicas: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
 - Cuantificadores:
 - Cuantificador universal: \forall
 - Cuantificador existencial: \exists
- Símbolos propios
 - Constantes de individuos: $a, b, c, \dots, a_1, a_2, \dots$
 - Predicados (con aridad): $P, Q, R, \dots, P_1, P_2, \dots$
 - Funciones (con aridad): $f, g, h, \dots, f_1, f_2, \dots$
- Símbolos auxiliares: $(,), ,$

Lenguaje de primer orden

- Notación:
 - Lenguajes de primer orden: L, L_1, \dots
 - Conjunto de las variables: Var
- Observaciones:
 - Un lenguaje de primer orden se describe con sus constantes, predicados y funciones propias. Los símbolos lógicos siempre están presentes en el lenguaje.
 - Los símbolos de predicado de aridad 1 (un argumento) se llaman propiedades.
 - Los símbolos de predicado de aridad mayor que 1 (dos o más argumentos) se llaman relaciones.
 - La mayoría de los lenguajes de primer orden incluyen el predicado de igualdad ($=$), de dos argumentos.

- Lenguaje de la vecindad entre provincias:
 - Símbolos de constantes: $\{\mathbf{Sevilla}, \mathbf{Cadiz}\}$
 - Símbolos de predicado: $\{\mathbf{provincia}, \mathbf{vecinas}\}$
 - Símbolos de función: $\{\}$
- Lenguaje de la aritmética natural:
 - Símbolos de constantes: $\{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \dots\}$
 - Símbolos de predicado: $\{\mathbf{<}, \mathbf{\leq}, \mathbf{=}, \dots\}$
 - Símbolos de función: $\{\mathbf{+}, \mathbf{-}, \mathbf{*}\}$

- **Términos** en un lenguaje de primer orden L :
 - Las variables son términos de L .
 - Las constantes de L son términos de L .
 - Si f es un símbolo de función de L de aridad n (o n -aria) y t_1, \dots, t_n son términos de L , entonces $f(t_1, \dots, t_n)$ es un término de L .
- Notación:
 - Términos de un lenguaje de primer orden: $t, s, \dots, t_1, t_2, \dots$
 - Conjunto de términos del lenguaje L : $Term(L)$
- Ejemplos:
 - En el lenguaje de la vecindad entre provincias: **Sevilla, Cadiz**.
 - En el lenguaje de la aritmética: $+(*(x, 1), y)$ (o $(x * 1) + y$).

- **Fórmulas atómicas** en un lenguaje de primer orden L :
 - Si P es un símbolo de predicado n -ario y t_1, \dots, t_n son términos del lenguaje L , entonces $P(t_1, \dots, t_n)$ es una fórmula atómica.
- Notación:
 - Fórmulas atómicas de un lenguaje de primer orden:
 $A, B, \dots, A_1, A_2, \dots$
 - Conjunto de fórmulas atómicas del lenguaje L : $Atom(L)$
- Ejemplos:
 - En el lenguaje de la vecindad entre provincias: $provincia(x)$, $vecinas(Cadiz, y)$.
 - En el lenguaje de la aritmética: $\langle(x, *(2, s(x))) \rangle$ (o $x < 2 * s(x)$).

- **Fórmulas** en un lenguaje de primer orden L :
 - Las fórmulas atómicas de L son fórmulas en L .
 - Si F y G son fórmulas en L , entonces $(\neg F)$, $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$, $(F \rightarrow G)$ y $(F \leftrightarrow G)$ son fórmulas en L .
 - Si F es una fórmula en L , entonces $\forall x F$ y $\exists x F$ son fórmulas en F .
- Notación:
 - Fórmulas en un lenguaje de primer orden: $F, G, \dots, F_1, F_2, \dots$
 - Conjunto de las fórmulas del lenguaje L : $Form(L)$
 - Se siguen los mismos criterios para eliminar paréntesis que en la lógica proposicional, con \forall y \exists con la mayor precedencia.
 $\forall x P(x) \rightarrow Q(x)$ es una abreviatura de $((\forall x P(x)) \rightarrow Q(x))$
- Ejemplos:
 - En el lenguaje de la vecindad entre provincias: $\forall x \textit{provincia}(x)$, $\forall x \exists y \textit{vecinas}(x, y)$.
 - En el lenguaje de la aritmética: $\exists x \forall y \leq(x, y)$ (o $\exists x \forall y (x \leq y)$).

- Si una provincia es vecina de otra, entonces la segunda es vecina de la primera. Sevilla es vecina de Cádiz. Por tanto Cádiz es vecina de Sevilla.
- Lenguaje de la vecindad entre provincias:
 - Símbolos de constantes: {**Sevilla**, **Cádiz**}
 - Símbolos de predicado: {**provincia**, **vecinas**}
 - Símbolos de función: {}

- Formalización:
 - Si una provincia es vecina de otra, entonces la segunda es vecina de la primera:
$$\forall x \forall y (\mathbf{provincia}(x) \wedge \mathbf{provincia}(y) \wedge \mathbf{vecina}(x, y) \rightarrow \mathbf{vecina}(y, x))$$
 - Sevilla es vecina de Cádiz:
$$\mathbf{vecina}(\mathbf{Sevilla}, \mathbf{Cadiz})$$
 - Por tanto Cádiz es vecina de Sevilla:
$$\mathbf{vecina}(\mathbf{Cadiz}, \mathbf{Sevilla})$$
- Información implícita:
 - Sevilla es una provincia:
$$\mathbf{provincia}(\mathbf{Sevilla})$$
 - Cádiz es una provincia:
$$\mathbf{provincia}(\mathbf{Cadiz})$$

- Representación de conocimiento astronómico
 - La Tierra es un planeta:
 $\textit{planeta}(\textit{Tierra})$
 - La Luna no es un planeta:
 $\neg \textit{planeta}(\textit{Luna})$
 - La Luna es un satélite:
 $\textit{satelite}(\textit{Luna})$
 - La Tierra gira alrededor del Sol:
 $\textit{gira}(\textit{Tierra}, \textit{Sol})$
 - La Luna gira alrededor de la Tierra:
 $\textit{gira}(\textit{Luna}, \textit{Tierra})$
 - Todo planeta es un satélite:
 $\forall x (\textit{planeta}(x) \rightarrow \textit{satelite}(x))$
 - Todo planeta gira alrededor del Sol:
 $\forall x (\textit{planeta}(x) \rightarrow \textit{gira}(x, \textit{Sol}))$

- Representación de conocimiento astronómico
 - Algún planeta gira alrededor de la Luna:
 $\exists x (\mathbf{planeta}(x) \wedge \mathbf{gira}(x, \mathbf{Luna}))$
 - Hay por lo menos un satélite:
 $\exists x \mathbf{satelite}(x)$
 - Ningún planeta es un satélite:
 $\neg \exists x (\mathbf{planeta}(x) \wedge \mathbf{satelite}(x))$
 - Ningún objeto celeste gira alrededor de sí mismo:
 $\neg \exists x \mathbf{gira}(x, x)$
 - Alrededor de los satélites no giran objetos:
 $\forall x (\mathbf{satelite}(x) \rightarrow \neg \exists y \mathbf{gira}(y, x))$
 - Hay exactamente un satélite:
 $\exists x (\mathbf{satelite}(x) \wedge \forall y (\mathbf{satelite}(y) \rightarrow x = y))$
 - Todo planeta tiene un objeto que gira en torno a él:
 $\forall x (\mathbf{planeta}(x) \rightarrow \exists y \mathbf{gira}(y, x))$

- Representación de conocimiento astronómico
 - La Tierra no tiene ningún objeto que gire en torno a ella:
 $\neg \exists x \text{ gira}(x, \text{Tierra})$
 - Algún planeta no tiene ningún objeto que gire en torno a él:
 $\exists x (\text{planeta}(x) \wedge \neg \exists y \text{ gira}(y, x))$
 - Solo los planetas tienen objetos que giran alrededor de ellos:
 $\forall x (\exists y \text{ gira}(y, x) \rightarrow \text{planeta}(x))$
 - Todo satélite gira alrededor de algún planeta:
 $\forall x (\text{satelite}(x) \rightarrow \exists y (\text{planeta}(y) \wedge \text{gira}(x, y)))$
 - La Luna no gira alrededor de dos planetas distintos:
 $\neg \exists x \exists y (\text{planeta}(x) \wedge \text{planeta}(y) \wedge \text{gira}(x, \text{Luna}) \wedge \text{gira}(y, \text{Luna}) \wedge x \neq y)$
 - Hay exactamente dos planetas:
 $\exists x \exists y (\text{planeta}(x) \wedge \text{planeta}(y) \wedge x \neq y \wedge \forall z (\text{planeta}(z) \rightarrow z = x \vee z = y))$

- El conjunto de las **subfórmulas** de una fórmula:

$$\mathit{Subf}(F) = \begin{cases} \{F\} & \text{si } F \text{ es una fórmula atómica} \\ \{F\} \cup \mathit{Subf}(G) & \text{si } F \text{ es } \neg G \\ \{F\} \cup \mathit{Subf}(G_1) \cup \mathit{Subf}(G_2) & \text{si } F \text{ es } G_1 \star G_2 \\ \{F\} \cup \mathit{Subf}(G) & \text{si } F \text{ es } \forall x G \\ \{F\} \cup \mathit{Subf}(G) & \text{si } F \text{ es } \exists x G \end{cases}$$

- Ejemplo:

$$\begin{aligned} \mathit{Subf}(\forall x (R(x, c) \rightarrow P(f(y)))) = \\ \{\forall x (R(x, c) \rightarrow P(f(y))), R(x, c) \rightarrow P(f(y)), \\ R(x, c), P(f(y))\} \end{aligned}$$

- Conjunto de **variables de un término**:

$$V(t) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } t \text{ es una constante} \\ \{x\} & \text{si } t \text{ es la variable } x \\ V(t_1) \cup \dots \cup V(t_n) & \text{si } t \text{ es } f(t_1, \dots, t_n) \end{cases}$$

- Conjunto de **variables de una fórmula**:

$$V(F) = \begin{cases} V(t_1) \cup \dots \cup V(t_n) & \text{si } F \text{ es } P(t_1, \dots, t_n) \\ V(G) & \text{si } F \text{ es } \neg G \\ V(G_1) \cup V(G_2) & \text{si } F \text{ es } G_1 \star G_2 \\ V(G) & \text{si } F \text{ es } \forall x G \\ V(G) & \text{si } F \text{ es } \exists x G \end{cases}$$

- Ejemplos

- El conjunto de variables de $\forall x (R(x) \rightarrow P(f(y)))$ es $\{x, y\}$
- El conjunto de variables de $\forall x (R(a) \rightarrow P(f(y)))$ es $\{y\}$

- Apariciones libres y ligadas en una fórmula:
 - Una aparición de una variable x es **ligada** si ocurre en una subfórmula de la forma $\forall x \mathbf{G}$ o $\exists x \mathbf{G}$.
 - Una aparición de una variable x es **libre** si no es ligada.
- Ejemplos:
 - $\forall x (P(x) \rightarrow R(x, y)) \rightarrow (\exists y P(y) \rightarrow R(y, x))$
 - $\exists x R(x, y) \vee \exists y P(y)$
 - $\forall x (P(x) \rightarrow \exists y R(x, y))$
 - $\forall z (P(x) \rightarrow R(x, y))$

- Variables libres y ligadas en una fórmula:
 - Una variable x es libre si tiene una aparición libre.
 - Una variable x es ligada si tiene una aparición ligada.
 - Conjunto de las **variables libres** de una fórmula F es:

$$VL(F) = \begin{cases} V(t_1) \cup \dots \cup V(t_n) & \text{si } F \text{ es } P(t_1, \dots, t_n) \\ VL(G) & \text{si } F \text{ es } \neg G \\ VL(G_1) \cup VL(G_2) & \text{si } F \text{ es } G_1 \star G_2 \\ VL(G) - \{x\} & \text{si } F \text{ es } \forall x G \\ VL(G) - \{x\} & \text{si } F \text{ es } \exists x G \end{cases}$$

- Ejemplos:

	V.Ligadas	V.Libres
$\forall x (P(x) \rightarrow R(x, y)) \rightarrow (\exists y P(y) \rightarrow R(y, x))$	$\{x, y\}$	$\{x, y\}$
$\forall x (P(x) \rightarrow \exists y R(x, y))$	$\{x, y\}$	
$\forall z (P(x) \rightarrow R(x, y))$		$\{x, y\}$

- Una **fórmula cerrada** (o **sentencia**) es una fórmula sin variables libres.
- Una **fórmula abierta** es una fórmula con variables libres.
- Ejemplos
 - $\forall x (P(x) \rightarrow \exists y R(x, y))$ es una fórmula cerrada.
 - $\exists x R(x, y) \vee \forall y P(y)$ es una fórmula abierta.

- Una **estructura del lenguaje** de primer orden L es un par $\mathcal{I} = (U, I)$ tal que:
 - U es un conjunto no vacío, denominado **universo** de la estructura.
 - I es una función cuyo dominio es el conjunto de los símbolos propios del lenguaje L tal que:
 - Si c es una constante en L , entonces $I(c) \in U$.
 - Si f es un símbolo de función n -ario en L , entonces $I(f) : U^n \mapsto U$.
 - Si P es un símbolo de predicado 0 -ario en L , entonces $I(P) \in \{0, 1\}$.
 - Si P es un símbolo de predicado n -ario en L con $n > 0$, entonces $I(P) \subseteq U^n$.
- Una estructura proporciona una interpretación I de los símbolos propios de un lenguaje L en un conjunto de individuos U .

- Sea L el lenguaje con los siguientes símbolos propios:
 - Una constante: \mathbf{o}
 - Un símbolo de función monaria: \mathbf{s} .
 - Un símbolo de función binaria: \odot .
 - Un símbolo de relación binaria: \prec .
- Primera estructura para L : $U_1 = \mathbb{N}$
 - $I_1(\mathbf{o}) = \mathbf{0}$
 - $I_1(\mathbf{s}) = \{n \implies n + 1 : n \in \mathbb{N}\}$ (función $+^1$)
 - $I_1(\odot) = \{(n, m) \implies n + m : n, m \in \mathbb{N}\}$ (función $+$)
 - $I_1(\prec) = \{(n, m) : n, m \in \mathbb{N}; n \leq m\}$
- Segunda estructura para L : $U_2 = [01]^*$ (cadenas de $\mathbf{0}$ y $\mathbf{1}$)
 - $I_2(\mathbf{o}) = \epsilon$
 - $I_2(\mathbf{s}) = \{w \implies w\mathbf{1} : w \in [01]^*\}$ (función $@^1$)
 - $I_2(\odot) = \{(w_1, w_2) \implies w_1 w_2 : w_1, w_2 \in [01]^*\}$ (función $@$)
 - $I_2(\prec) = \{(w_1, w_2) : w_1, w_2 \in [01]^*; w_1 \text{ es prefijo de } w_2\}$

- Una **asignación** \mathbf{A} en una estructura $\mathcal{I} = (\mathbf{U}, \mathbf{I})$ para un lenguaje \mathbf{L} es una función $\mathbf{A} : \mathbf{Var} \mapsto \mathbf{U}$.
 - Una asignación hace corresponder a cada variable un individuo del universo de la estructura.
- Una **interpretación** de un lenguaje \mathbf{L} es un par $(\mathcal{I}, \mathbf{A})$ formado por una estructura \mathcal{I} de \mathbf{L} y una asignación \mathbf{A} en \mathcal{I} .

- Dada una estructura $\mathcal{I} = (\mathbf{U}, \mathbf{I})$ del lenguaje L y una asignación \mathbf{A} en \mathcal{I} , entonces se define la **función de evaluación de términos**, $\mathcal{I}_{\mathbf{A}} : \mathbf{Term}(L) \mapsto \mathbf{U}$, como:

$$\mathcal{I}_{\mathbf{A}}(\mathbf{t}) = \begin{cases} \mathbf{I}(\mathbf{c}) & \text{si } \mathbf{t} \text{ es la constante } \mathbf{c} \\ \mathbf{A}(\mathbf{x}) & \text{si } \mathbf{t} \text{ es la variable } \mathbf{x} \\ \mathbf{I}(\mathbf{f})(\mathcal{I}_{\mathbf{A}}(\mathbf{t}_1), \dots, \mathcal{I}_{\mathbf{A}}(\mathbf{t}_n)) & \text{si } \mathbf{t} \text{ es } \mathbf{f}(\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_n) \end{cases}$$

- $\mathcal{I}_{\mathbf{A}}(\mathbf{t})$ es el valor de \mathbf{t} en \mathcal{I} respecto de \mathbf{A} .

- Consideramos el lenguaje $L = \{\mathbf{o}, \mathbf{s}, \odot, \prec\}$ y el término $\mathbf{t} = \mathbf{s}(\mathbf{x} \odot \mathbf{s}(\mathbf{o}))$.
- En la estructura $\mathcal{I}^1 = (\mathbb{N}, \mathbf{l}_1)$ con $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = 3$

$$\begin{aligned}\mathcal{I}^1_{\mathbf{A}}(\mathbf{t}) &= \mathcal{I}^1_{\mathbf{A}}(\mathbf{s}(\mathbf{x} \odot \mathbf{s}(\mathbf{o}))) \\ &= \mathbf{l}_1(\mathbf{s})(\mathbf{l}_1(\odot)(\mathbf{A}(\mathbf{x}), \mathbf{l}_1(\mathbf{s})(\mathbf{l}_1(\mathbf{o})))) \\ &= +^1(3 + +^1(0)) \\ &= 5\end{aligned}$$

- En la estructura $\mathcal{I}^2 = ([\mathbf{01}]^*, \mathbf{l}_2)$ con $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{10}$

$$\begin{aligned}\mathcal{I}^2_{\mathbf{A}}(\mathbf{t}) &= \mathcal{I}^2_{\mathbf{A}}(\mathbf{s}(\mathbf{x} \odot \mathbf{s}(\mathbf{o}))) \\ &= \mathbf{l}_2(\mathbf{s})(\mathbf{l}_2(\odot)(\mathbf{A}(\mathbf{x}), \mathbf{l}_2(\mathbf{s})(\mathbf{l}_2(\mathbf{o})))) \\ &= @^1(\mathbf{10} @ @^1(\epsilon)) \\ &= \mathbf{1011}\end{aligned}$$

- Dada una estructura $\mathcal{I} = (\mathbf{U}, \mathbf{I})$ del lenguaje \mathbf{L} y una asignación \mathbf{A} en \mathcal{I} , entonces se define la **función de evaluación de fórmulas**, $\mathcal{I}_{\mathbf{A}} : \mathbf{Form}(\mathbf{L}) \mapsto \mathbb{B}$, como:

$$\mathcal{I}_{\mathbf{A}}(\mathbf{P}(t_1, \dots, t_n)) = \mathbf{H}_{\mathbf{I}(\mathbf{P})}(\mathcal{I}_{\mathbf{A}}(t_1), \dots, \mathcal{I}_{\mathbf{A}}(t_n))$$

$$\mathcal{I}_{\mathbf{A}}(\neg \mathbf{G}) = \mathbf{H}_{\neg}(\mathcal{I}_{\mathbf{A}}(\mathbf{G}))$$

$$\mathcal{I}_{\mathbf{A}}(\mathbf{G}_1 \star \mathbf{G}_2) = \mathbf{H}_{\star}(\mathcal{I}_{\mathbf{A}}(\mathbf{G}_1), \mathcal{I}_{\mathbf{A}}(\mathbf{G}_2))$$

$$\mathcal{I}_{\mathbf{A}}(\forall x \mathbf{G}) = \begin{cases} \mathbf{1} & \text{si para todo } \mathbf{u} \in \mathbf{U} \\ & \text{se tiene } \mathcal{I}_{\mathbf{A}[x/\mathbf{u}]}(\mathbf{G}) = \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$\mathcal{I}_{\mathbf{A}}(\exists x \mathbf{G}) = \begin{cases} \mathbf{1} & \text{si existe un } \mathbf{u} \in \mathbf{U} \\ & \text{tal que } \mathcal{I}_{\mathbf{A}[x/\mathbf{u}]}(\mathbf{G}) = \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

- $\mathcal{I}_{\mathbf{A}}(\mathbf{F})$ es el valor de \mathbf{F} en \mathcal{I} respecto de \mathbf{A} .

Evaluación de fórmulas

- H_{\neg} , H_{\wedge} , H_{\vee} , H_{\rightarrow} y H_{\leftrightarrow} son las funciones de verdad de las conectivas lógicas proposicionales.
- Si R es un subconjunto de U^n , entonces la **función de verdad** de R es:

$$H_R(u_1, \dots, u_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } (u_1, \dots, u_n) \in R \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

- Si A es una asignación en la estructura (U, I) , $x \in \mathbf{Var}$ y $u \in U$, entonces la **variante de la asignación A** para x igual a u es:

$$A[x/u](y) = \begin{cases} u & \text{si } y \text{ es la variable } x \\ A(y) & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

- Evaluación de $\forall x \exists y P(x, y)$ en la estructura $\mathcal{I} = (\mathbf{U}, I)$ tal que $\mathbf{U} = \{1, 2\}$ e $I(P) = \{(1, 1), (2, 2)\}$:

$$\mathcal{I}_A(\forall x \exists y P(x, y)) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathcal{I}_{A[x/1]}(\exists y P(x, y)) = 1 \\ & \text{y } \mathcal{I}_{A[x/2]}(\exists y P(x, y)) = 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$\mathcal{I}_{A[x/1]}(\exists y P(x, y)) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathcal{I}_{A[y/1, x/1]}(P(x, y)) = 1 \checkmark \\ & \text{o } \mathcal{I}_{A[y/2, x/1]}(P(x, y)) = 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{A[y/1, x/1]}(P(x, y)) &= H_{I(P)}(\mathcal{I}_{A[y/1, x/1]}(x), \mathcal{I}_{A[y/1, x/1]}(y)) \\ &= H_{I(P)}(A[y/1, x/1](x), A[y/1, x/1](y)) \\ &= H_{I(P)}(1, 1) \\ &= 1 \text{ pues } (1, 1) \in I(P) \end{aligned}$$

Por tanto $\mathcal{I}_{A[x/1]}(\exists y P(x, y)) = 1$.

- Evaluación de $\forall x \exists y P(x, y)$ en la estructura $\mathcal{I} = (\mathbf{U}, I)$ tal que $\mathbf{U} = \{1, 2\}$ e $I(P) = \{(1, 1), (2, 2)\}$:

$$\mathcal{I}_A(\forall x \exists y P(x, y)) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathcal{I}_{A[x/1]}(\exists y P(x, y)) = 1 \checkmark \\ & \text{y } \mathcal{I}_{A[x/2]}(\exists y P(x, y)) = 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$\mathcal{I}_{A[x/2]}(\exists y P(x, y)) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathcal{I}_{A[y/1, x/2]}(P(x, y)) = 1 \times \\ & \text{o } \mathcal{I}_{A[y/2, x/2]}(P(x, y)) = 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{A[y/1, x/2]}(P(x, y)) &= H_{I(P)}(\mathcal{I}_{A[y/1, x/2]}(x), \mathcal{I}_{A[y/1, x/2]}(y)) \\ &= H_{I(P)}(A[y/1, x/2](x), A[y/1, x/2](y)) \\ &= H_{I(P)}(2, 1) \\ &= 0 \text{ pues } (2, 1) \notin I(P) \end{aligned}$$

- Evaluación de $\forall x \exists y P(x, y)$ en la estructura $\mathcal{I} = (\mathbf{U}, I)$ tal que $\mathbf{U} = \{1, 2\}$ e $I(P) = \{(1, 1), (2, 2)\}$:

$$\mathcal{I}_A(\forall x \exists y P(x, y)) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathcal{I}_{A[x/1]}(\exists y P(x, y)) = 1 \checkmark \\ & \text{y } \mathcal{I}_{A[x/2]}(\exists y P(x, y)) = 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$\mathcal{I}_{A[x/2]}(\exists y P(x, y)) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathcal{I}_{A[y/1, x/2]}(P(x, y)) = 1 \times \\ & \text{o } \mathcal{I}_{A[y/2, x/2]}(P(x, y)) = 1 \checkmark \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{A[y/2, x/2]}(P(x, y)) &= H_{I(P)}(\mathcal{I}_{A[y/2, x/2]}(x), \mathcal{I}_{A[y/2, x/2]}(y)) \\ &= H_{I(P)}(A[y/2, x/2](x), A[y/2, x/2](y)) \\ &= H_{I(P)}(2, 2) \\ &= 1 \text{ pues } (2, 2) \in I(P) \end{aligned}$$

Por tanto $\mathcal{I}_{A[x/2]}(\exists y P(x, y)) = 1$.

- Evaluación de $\forall x \exists y P(x, y)$ en la estructura $\mathcal{I} = (\mathbf{U}, I)$ tal que $\mathbf{U} = \{1, 2\}$ e $I(P) = \{(1, 1), (2, 2)\}$:

$$\mathcal{I}_A(\forall x \exists y P(x, y)) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathcal{I}_{A[x/1]}(\exists y P(x, y)) = 1 \checkmark \\ & \text{y } \mathcal{I}_{A[x/2]}(\exists y P(x, y)) = 1 \checkmark \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Por tanto $\mathcal{I}(\forall x \exists y P(x, y)) = 1$.

- Evaluación de $\forall x (g(g(x)) = x)$ en la estructura $\mathcal{I} = (\mathbf{U}, \mathbf{I})$ tal que $\mathbf{U} = \{1, 2\}$ e $\mathbf{I}(g) = \{1 \implies 2, 2 \implies 1\}$:

$$\mathcal{I}_A(\forall x (g(g(x)) = x)) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathcal{I}_{A[x/1]}(g(g(x)) = x) = 1 \\ & \text{y } \mathcal{I}_{A[x/2]}(g(g(x)) = x) = 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{A[x/1]}(g(g(x)) = x) &= H_{=}(\mathcal{I}_{A[x/1]}(g(g(x))), \mathcal{I}_{A[x/1]}(x)) \\ &= H_{=}(I(g)(\mathcal{I}_{A[x/1]}(g(x))), 1) \\ &= H_{=}(I(g)(I(g)(\mathcal{I}_{A[x/1]}(x))), 1) \\ &= H_{=}(I(g)(I(g)(1)), 1) \\ &= H_{=}(I(g)(2), 1) \\ &= H_{=}(1, 1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

- Evaluación de $\forall x (g(g(x)) = x)$ en la estructura $\mathcal{I} = (\mathbf{U}, \mathbf{I})$ tal que $\mathbf{U} = \{1, 2\}$ e $\mathbf{I}(g) = \{1 \implies 2, 2 \implies 1\}$:

$$\mathcal{I}_A(\forall x (g(g(x)) = x)) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathcal{I}_{A[x/1]}(g(g(x)) = x) = 1 \checkmark \\ & \text{y } \mathcal{I}_{A[x/2]}(g(g(x)) = x) = 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{A[x/2]}(g(g(x)) = x) &= H_=(\mathcal{I}_{A[x/2]}(g(g(x))), \mathcal{I}_{A[x/2]}(x)) \\ &= H_=(\mathbf{I}(g)(\mathcal{I}_{A[x/2]}(g(x))), 2) \\ &= H_=(\mathbf{I}(g)(\mathbf{I}(g)(\mathcal{I}_{A[x/2]}(x))), 2) \\ &= H_=(\mathbf{I}(g)(\mathbf{I}(g)(2)), 2) \\ &= H_=(\mathbf{I}(g)(1), 2) \\ &= H_=(2, 2) \\ &= 1 \end{aligned}$$

- Evaluación de $\forall x (g(g(x)) = x)$ en la estructura $\mathcal{I} = (\mathbf{U}, I)$ tal que $\mathbf{U} = \{1, 2\}$ e $I(g) = \{1 \implies 2, 2 \implies 1\}$:

$$\mathcal{I}_A(\forall x (g(g(x)) = x)) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathcal{I}_{A[x/1]}(g(g(x)) = x) = 1 \checkmark \\ & \text{y } \mathcal{I}_{A[x/2]}(g(g(x)) = x) = 1 \checkmark \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Por tanto $\mathcal{I}_A(\forall x (g(g(x)) = x)) = 1$.

- Dependencia del Universo.

Sea $F = \forall x \exists y R(x, y)$, entonces:

- $\mathcal{I}_A(F) = 1$ con $\mathcal{I} = (\mathbb{Z}, I)$, $I(R) = >$ y A una asignación.
- $\mathcal{I}_A(F) = 0$ con $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, I)$, $I(R) = >$ y A una asignación.

- Dependencia de la Estructura.

Sea $F = \exists x \forall y R(x, y)$, entonces:

- $\mathcal{I}_A(F) = 1$ con $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, I)$, $I(R) = \leq$ y A una asignación.
- $\mathcal{I}_A(F) = 0$ con $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, I)$, $I(R) = \geq$ y A una asignación.

- Dependencia de la Asignación.

Sea $F = \forall y R(x, y)$, entonces:

- $\mathcal{I}_A(F) = 1$ con $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, I)$, $I(R) = \leq$ y A una asignación en \mathcal{I} tal que $A(x) = 0$.
- $\mathcal{I}_A(F) = 0$ con $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, I)$, $I(R) = \leq$ y A una asignación en \mathcal{I} tal que $A(x) = 1$.

- Sea t un término de L e \mathcal{I} una estructura de L :
 - Si A y B son dos asignaciones en \mathcal{I} que coinciden sobre las variables de t , entonces $\mathcal{I}_A(t) = \mathcal{I}_B(t)$.
 - Si t no tiene variables, entonces $\mathcal{I}_A(t) = \mathcal{I}_B(t)$ para cualesquiera asignaciones A y B en \mathcal{I} .
- Sea F una fórmula de L e \mathcal{I} una estructura de L :
 - Si A y B son dos asignaciones en \mathcal{I} que coinciden sobre las variables libres de F , entonces $\mathcal{I}_A(F) = \mathcal{I}_B(F)$.
 - Si F es cerrada, entonces $\mathcal{I}_A(F) = \mathcal{I}_B(F)$ para cualesquiera asignaciones A y B en \mathcal{I} .

Modelo de una fórmula

- Sea F una fórmula de L e \mathcal{I} una estructura de L :
 - $(\mathcal{I}, \mathbf{A})$ es una **realización** de F ($\mathcal{I}_{\mathbf{A}} \models F$), si \mathbf{A} es una asignación en \mathcal{I} tal que $\mathcal{I}_{\mathbf{A}}(F) = 1$.
 - \mathcal{I} es un **modelo** de F ($\mathcal{I} \models F$), si para toda asignación \mathbf{A} en \mathcal{I} se tiene $\mathcal{I}_{\mathbf{A}} \models F$.
- Ejemplos:
 - Sea $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, I)$ una estructura tal que $I(f) = +$ e $I(g) = *$.
 - Si \mathbf{A} es una asignación en \mathcal{I} tal que $\mathbf{A}(x) = \mathbf{A}(y) = 2$, entonces $\mathcal{I}_{\mathbf{A}} \models f(x, x) = g(x, x)$.
 - Si \mathbf{B} es una asignación en \mathcal{I} tal que $\mathbf{B}(x) = 1$ y $\mathbf{B}(y) = 2$, entonces $\mathcal{I}_{\mathbf{B}} \not\models f(x, x) = g(x, x)$.
 - $\mathcal{I} \models f(x, y) = f(y, x)$
 - $\mathcal{I} \not\models f(x, y) = g(x, y)$

- Sea F una fórmula de L :
 - F es **válida** ($\models F$) si toda estructura de L es un modelo de F .
 - Para toda estructura \mathcal{I} de L y toda asignación A en \mathcal{I} se tiene que $\mathcal{I}_A(F) = 1$.
 - F es **satisfacible** si tiene alguna realización.
 - Existe una estructura \mathcal{I} de L y una asignación A en \mathcal{I} tales que $\mathcal{I}_A(F) = 1$.
 - F es **insatisfacible** si no tiene ninguna realización.
 - Para toda estructura \mathcal{I} de L y toda asignación A en \mathcal{I} se tiene que $\mathcal{I}_A(F) = 0$.
- Ejemplos:
 - $\exists x P(x) \vee \forall x \neg P(x)$ es válida.
 - $\exists x P(x) \wedge \exists x \neg P(x)$ es satisfacible, pero no válida.
 - $\forall x P(x) \wedge \exists x \neg P(x)$ es insatisfacible.

- Relaciones entre estos conceptos:
 - F es válida $\iff \neg F$ es insatisfacible.
 - F es válida $\implies F$ es satisfacible.
 - F es satisfacible $\not\implies \neg F$ es insatisfacible.
- Sea F una fórmula en L y x_1, \dots, x_n las variables libres de F :
 - F es válida $\iff \forall x_1 \dots \forall x_n F$ es válida.
La fórmula $\forall x_1 \dots \forall x_n F$ es el **cierre universal** de F .
 - F es satisfacible $\iff \exists x_1 \dots \exists x_n F$ es satisfacible.
La fórmula $\exists x_1 \dots \exists x_n F$ es el **cierre existencial** de F .

- Dos fórmulas F y G de un lenguaje L son **equivalentes** ($F \equiv G$) si para toda estructura \mathcal{I} de L y toda asignación A en \mathcal{I} se tiene $\mathcal{I}_A(F) = \mathcal{I}_A(G)$.

- Equivalencias importantes:

- Las de las conectivas proposicionales.

- Conmutatividad de los cuantificadores:

$$\forall x \forall y F \equiv \forall y \forall x F$$

$$\exists x \exists y F \equiv \exists y \exists x F$$

- Cuantificadores con la negación:

$$\forall x (\neg F) \equiv \neg(\exists x F)$$

$$\exists x (\neg F) \equiv \neg(\forall x F)$$

- Cuantificador universal con la conjunción:

$$\forall x (F \wedge G) \equiv (\forall x F) \wedge (\forall x G)$$

- Cuantificador existencial con la disyunción:

$$\exists x (F \vee G) \equiv (\exists x F) \vee (\exists x G)$$

- Cuantificador existencial con la implicación:

$$\exists x (F \rightarrow G) \equiv (\forall x F) \rightarrow (\exists x G)$$

- La equivalencia lógica es una relación de equivalencia
 - Reflexividad: $F \equiv F$
 - Simetría: Si $F \equiv G$, entonces $G \equiv F$.
 - Transitividad: Si $F \equiv G$ y $G \equiv H$, entonces $F \equiv H$.
- Principio de sustitución de fórmulas equivalentes: Si en una fórmula F se sustituye una subfórmula G por otra lógicamente equivalente G' , entonces la fórmula obtenida F' es lógicamente equivalente a la original.
 - $F = \neg(\forall x P(x)) \rightarrow \exists x Q(x)$
 - $G = \neg(\forall x P(x))$
 - $G' = \exists y \neg P(y)$
 - $F' = \exists y \neg P(y) \rightarrow \exists x Q(x)$

Conjuntos de fórmulas

- Sea \mathbf{S} un conjunto de fórmulas de \mathbf{L} , \mathcal{I} una estructura de \mathbf{L} y \mathbf{A} una asignación en \mathcal{I} :
 - $(\mathcal{I}, \mathbf{A})$ es una **realización** de \mathbf{S} ($\mathcal{I}_{\mathbf{A}} \models \mathbf{S}$) si para toda $F \in \mathbf{S}$, se tiene que $(\mathcal{I}, \mathbf{A})$ es una realización de F .
 - \mathcal{I} es un **modelo** de \mathbf{S} ($\mathcal{I} \models \mathbf{S}$) si para toda $F \in \mathbf{S}$, se tiene que $\mathcal{I} \models F$.
- Ejemplos:
 - Sea $\mathbf{S} = \{\forall y R(x, y), \forall y f(x, y) = y\}$
 - $(\mathcal{I}, \mathbf{A})$ con $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, I)$, $I(R) = \leq$, $I(f) = +$ y $\mathbf{A}(x) = 0$ es una realización de \mathbf{S} .
 - $(\mathcal{I}, \mathbf{A})$ con $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, I)$, $I(R) = <$, $I(f) = +$ y $\mathbf{A}(x) = 0$ no es una realización de \mathbf{S} .
 - Sea $\mathbf{S} = \{R(e, y), f(e, y) = y\}$
 - $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, I)$, $I(R) = \leq$, $I(f) = +$ e $I(e) = 0$ es un modelo de \mathbf{S} .
 - $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, I)$, $I(R) = <$, $I(f) = +$ e $I(e) = 0$ no es un modelo de \mathbf{S} .

- Sea \mathbf{S} un conjunto de fórmulas de \mathbf{L} :
 - \mathbf{S} es **consistente** si tiene alguna realización.
 - \mathbf{S} es **inconsistente** si no tiene ninguna realización.
- Ejemplos:
 - $\{\forall y R(x, y), \forall y f(x, y) = y\}$ es consistente
 - $\{P(x) \rightarrow Q(x), \forall y P(y), \neg Q(x)\}$ es inconsistente
- Si \mathbf{S} es un conjunto de fórmulas cerradas de \mathbf{L} , entonces \mathbf{S} es consistente si y solo si \mathbf{S} tiene algún modelo.

- Sea F una fórmula de L y S un conjunto de fórmulas de L :
 - F es **consecuencia lógica** de S ($S \models F$) si todas las realizaciones de S lo son también de F .
- Ejemplos:
 - $\{\forall x P(x)\} \models P(y)$
 - $\{P(y)\} \not\models \forall x P(x)$
 - $\{\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)), P(c)\} \models Q(c)$
 - $\{\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)), Q(c)\} \not\models P(c)$
- $S \models F \iff S \cup \{\neg F\}$ es inconsistente.
- Si $S \cup \{F\}$ es un conjunto de fórmulas cerradas de L , entonces son equivalentes:
 - F es consecuencia lógica de S .
 - Todos los modelos de S también lo son de F .

- Un cálculo lógico (\vdash) es un procedimiento que permite comprobar la validez de una fórmula.
- Existen cálculos lógicos correctos ($\vdash \implies \models$) y completos ($\models \implies \vdash$) para la lógica de primer orden.
 - Generalmente se trata de extensiones de los cálculos proposicionales incluyendo los cuantificadores: tableros semánticos, secuentes, deducción natural, resolución, ...
- La lógica de primer orden es semidecidible: no existen procedimientos capaces de decidir en un número finito de pasos si una fórmula es válida o no.
 - Existen procedimientos capaces de responder afirmativamente si una fórmula es válida, pero que no son capaces de dar respuesta cuando no lo es.

- M. Ben-Ari. *Mathematical logic for computer science*
Capítulo 7
- J.A. Díez. *Iniciación a la Lógica*
Capítulos 6 y 7
- M. Huth y M. Ryan. *Logic in computer science: modelling and reasoning about systems*
Capítulo 2