

# Deducción natural en lógica de primer orden

Francisco J. Martín Mateos

Dpto. Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial  
Universidad de Sevilla

- Una **sustitución**  $\sigma$  de un lenguaje  $L$  es una aplicación  $\sigma : \mathbf{Var} \mapsto \mathbf{Term}(L)$ 
  - Representaremos por  $[x_1/t_1, x_2/t_2, \dots, x_n/t_n]$  a la sustitución  $\sigma$  definida por:

$$\sigma(x) = \begin{cases} t_i & \text{si } x \text{ es } x_i \\ x & \text{si } x \notin \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \end{cases}$$

- Notación: Usaremos  $\sigma, \sigma_1, \sigma_2, \dots$  para representar sustituciones de un lenguaje de primer orden
- Ejemplo:  $[x/s(0), y/x + y]$  es la sustitución  $\sigma$  de  $\mathbf{Var}$  en el conjunto de los términos de la aritmética definida por:

$$\sigma(z) = \begin{cases} s(0) & \text{si } z \text{ es } x \\ x + y & \text{si } z \text{ es } y \\ z & \text{si } z \in \mathbf{Var} \setminus \{x, y\} \end{cases}$$

- La extensión (única) de una sustitución  $\sigma$  al conjunto de términos de un lenguaje  $L$  es la aplicación  $\sigma : \mathbf{Term}(L) \mapsto \mathbf{Term}(L)$  definida por:

$$\sigma(t) = \begin{cases} c & \text{si } t \text{ es una constante } c \\ \sigma(x) & \text{si } t \text{ es una variable } x \\ f(\sigma(t_1), \dots, \sigma(t_n)) & \text{si } t \text{ es } f(t_1, \dots, t_n) \end{cases}$$

- Notación:  $t[x_1/t_1, \dots, x_n/t_n]$  es el término obtenido al aplicar sobre el término  $t$  la sustitución representada por  $[x_1/t_1, \dots, x_n/t_n]$
- Ejemplos: Si  $\sigma = [x/f(y, a), y/z]$ , entonces
  - $\sigma(a) = a$ , donde  $a$  es una constante
  - $\sigma(w) = w$ , donde  $w$  es una variable distinta de  $x$  e  $y$
  - $\sigma(h(a, x, w)) = h(a, f(y, a), w)$
  - $\sigma(f(x, y)) = f(f(y, a), z)$
  - $\sigma(h(a, f(x, y), w)) = h(a, f(f(y, a), z), w)$

- La extensión (única) de una sustitución  $\sigma$  al conjunto de las fórmulas de un lenguaje  $L$  es la aplicación  $\sigma : \mathbf{Form}(L) \mapsto \mathbf{Form}(L)$  definida por:

$$\sigma(F) = \begin{cases} P(\sigma(t_1), \dots, \sigma(t_n)) & \text{si } F \text{ es } P(t_1, \dots, t_n) \\ \neg(\sigma(G)) & \text{si } F \text{ es } \neg G \\ \sigma(G_1) \star \sigma(G_2) & \text{si } F \text{ es } G_1 \star G_2 \\ \forall x \sigma_x(G) & \text{si } F \text{ es } \forall x G \\ \exists x \sigma_x(G) & \text{si } F \text{ es } \exists x G \end{cases}$$

donde  $\sigma_x$  es la sustitución definida por

$$\sigma_x(y) = \begin{cases} x & \text{si } y \text{ es la variable } x \\ \sigma(y) & \text{si } y \text{ es distinta de } x \end{cases}$$

- Notación:  $F[x_1/t_1, \dots, x_n/t_n]$  es la fórmula obtenida al aplicar a la fórmula  $F$  la sustitución representada por  $[x_1/t_1, \dots, x_n/t_n]$

- Ejemplos: Si  $\sigma = [x/f(y), y/b]$ , entonces
  - $\sigma(\forall x (Q(x) \rightarrow R(x, y))) = \forall x (\sigma_x(Q(x) \rightarrow R(x, y)))$   
 $= \forall x (\sigma_x(Q(x)) \rightarrow \sigma_x(R(x, y)))$   
 $= \forall x (Q(x) \rightarrow R(x, b))$
  - $\sigma(Q(x) \rightarrow \forall x R(x, y)) = \sigma(Q(x)) \rightarrow \sigma(\forall x R(x, y))$   
 $= Q(f(y)) \rightarrow \forall x \sigma_x(R(x, y))$   
 $= Q(f(y)) \rightarrow \forall x R(x, b)$
  - $\sigma(\forall x (Q(x) \rightarrow \exists y R(x, y))) = \forall x (\sigma_x(Q(x) \rightarrow \exists y R(x, y)))$   
 $= \forall x (\sigma_x(Q(x)) \rightarrow$   
 $\sigma_x(\exists y R(x, y)))$   
 $= \forall x (Q(x) \rightarrow \exists y \sigma_{x,y}(R(x, y)))$   
 $= \forall x (Q(x) \rightarrow \exists y R(x, y))$

- Una sustitución es **libre para una fórmula** si todas las ocurrencias de variables introducidas por la sustitución en esa fórmula resultan libres
- Ejemplos
  - La sustitución  $[y/x]$  no es libre para  $\exists x (x < y)$   
 $(\exists x (x < y))[y/x] = \exists x (x < x)$
  - La sustitución  $[y/g(y)]$  es libre para  $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x, y))$   
 $(\forall x (P(x) \rightarrow Q(x, y)))[y/g(y)] = \forall x (P(x) \rightarrow Q(x, g(y)))$
  - La sustitución  $[y/g(x)]$  no es libre para  $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x, y))$   
 $(\forall x (P(x) \rightarrow Q(x, y)))[y/g(x)] = \forall x (P(x) \rightarrow Q(x, g(x)))$

# Reglas del cuantificador universal

- Regla de eliminación del cuantificador universal

$$\frac{\forall x F}{F[x/t]} [\forall e] \qquad \begin{array}{c} S \vdash \forall x F \\ \Downarrow \\ S \vdash F[x/t] \end{array}$$

donde  $[x/t]$  es una sustitución libre para  $F$

- Analogía con las reglas  $\wedge e_1$  y  $\wedge e_2$
- Necesidad de la condición sobre  $[x/t]$ 
  - Si  $F = \exists y P(x, y)$  y  $t = y$ :

$$\{\forall x \exists y P(x, y)\} \not\vdash \exists y P(y, y)$$

# Reglas del cuantificador universal

$\{P(c), \forall x (P(x) \rightarrow \neg Q(x))\} \vdash \neg Q(c)$

1.  $P(c)$  premisa
2.  $\forall x (P(x) \rightarrow \neg Q(x))$  premisa
3.  $P(c) \rightarrow \neg Q(c)$   $[\forall e\ 2]$
4.  $\neg Q(c)$   $[\rightarrow e\ 3\ 1]$

# Reglas del cuantificador universal

- Regla de introducción del cuantificador universal

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c} x_0 \\ \vdots \\ F[x/x_0] \end{array}}}{\forall x F} [\forall i] \qquad \begin{array}{c} S \vdash F[x/x_0] \\ \Downarrow \\ S \vdash \forall x F \end{array}$$

donde  $x_0$  es una variable que no aparece en  $S$  ni  $F$

- Sugerencia: Utilizar siempre variables ( $x_0$ ) nuevas
- Analogía con la regla  $\wedge i$
- Necesidad de la condición sobre  $x_0$ 
  - Si  $F = P(x)$  y  $x_0 = y$ :

$$\{P(x), P(y)\} \not\vdash \forall x P(x)$$

# Reglas del cuantificador universal

$\{\forall x (P(x) \rightarrow \neg Q(x)), \forall x P(x)\} \vdash \forall x \neg Q(x)$

1.  $\forall x (P(x) \rightarrow \neg Q(x))$  premisa
2.  $\forall x P(x)$  premisa
3.  $x_0$  variable nueva
4.  $P(x_0) \rightarrow \neg Q(x_0)$  [ $\forall e$  1]
5.  $P(x_0)$  [ $\forall e$  2]
6.  $\neg Q(x_0)$  [ $\rightarrow e$  4 5]
7.  $\forall x \neg Q(x)$  [ $\forall i$  3-6]

# Reglas del cuantificador existencial

- Regla de introducción del cuantificador existencial

$$\frac{F[x/t]}{\exists x F} [\exists i] \qquad \begin{array}{c} S \vdash F[x/t] \\ \Downarrow \\ S \vdash \exists x F \end{array}$$

donde  $[x/t]$  es una sustitución libre para  $F$

- Analogía con las reglas  $\forall i_1$  y  $\forall i_2$
- Necesidad de la condición sobre  $[x/t]$ 
  - Si  $F = \forall y P(x, y)$  y  $t = y$ :

$$\{\forall y P(y, y)\} \not\vdash \exists x \forall y P(x, y)$$

# Reglas del cuantificador existencial

$$\{\forall x P(x)\} \vdash \exists x P(x)$$

1.  $\forall x P(x)$     premisa
2.  $P(x_0)$      $[\forall e 1]$
3.  $\exists x P(x)$      $[\exists i 2]$

# Reglas del cuantificador existencial

- Regla de eliminación del cuantificador existencial

$$\frac{\exists x F \quad \boxed{\begin{array}{c} x_0 \quad F[x/x_0] \\ \vdots \\ G \end{array}}}{G} [\exists e]$$
$$\begin{array}{c} S \vdash \exists x F \\ S \cup \{F[x/x_0]\} \vdash G \\ \Downarrow \\ S \vdash G \end{array}$$

donde  $x_0$  es una variable que no aparece en  $S$ ,  $F$  ni  $G$

- Sugerencia: Utilizar siempre variables ( $x_0$ ) nuevas
- Analogía con la regla  $\forall e$
- Necesidad de la condición sobre  $x_0$ 
  - Si  $F = P(x)$  y  $x_0 = y$ :

$$\{\exists x P(x)\} \not\vdash P(y)$$

# Reglas del cuantificador existencial

$\{\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)), \exists x P(x)\} \vdash \exists x Q(x)$

- |    |                                     |                       |
|----|-------------------------------------|-----------------------|
| 1. | $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$ | premisa               |
| 2. | $\exists x P(x)$                    | premisa               |
| 3. | $x_0, P(x_0)$                       | supuesto              |
| 4. | $P(x_0) \rightarrow Q(x_0)$         | $[\forall e 1]$       |
| 5. | $Q(x_0)$                            | $[\rightarrow e 4 3]$ |
| 6. | $\exists x Q(x)$                    | $[\exists i 5]$       |
| 7. | $\exists x Q(x)$                    | $[\exists e 2 3-6]$   |

# Equivalencia: $\neg\forall x F \equiv \exists x \neg F$

$$\{\neg\forall x P(x)\} \vdash \exists x \neg P(x)$$

- |     |                           |                   |
|-----|---------------------------|-------------------|
| 1.  | $\neg\forall x P(x)$      | premisa           |
| 2.  | $\neg\exists x \neg P(x)$ | supuesto          |
| 3.  | $x_0$                     | variable nueva    |
| 4.  | $\neg P(x_0)$             | supuesto          |
| 5.  | $\exists x \neg P(x)$     | $[\exists i 4]$   |
| 6.  | $\perp$                   | $[\neg e 2 5]$    |
| 7.  | $P(x_0)$                  | $[RAA 4-6]$       |
| 8.  | $\forall x P(x)$          | $[\forall i 3-7]$ |
| 9.  | $\perp$                   | $[\neg e 1 8]$    |
| 10. | $\exists x \neg P(x)$     | $[RAA 2-9]$       |

$\{\exists x \neg P(x)\} \vdash \neg\forall x P(x)$

- |    |                       |                     |
|----|-----------------------|---------------------|
| 1. | $\exists x \neg P(x)$ | premisa             |
| 2. | $\forall x P(x)$      | supuesto            |
| 3. | $x_0, \neg P(x_0)$    | supuesto            |
| 4. | $P(x_0)$              | $[\forall e 2]$     |
| 5. | $\perp$               | $[\neg e 3 4]$      |
| 6. | $\perp$               | $[\exists e 1 3-5]$ |
| 7. | $\neg\forall x P(x)$  | $[\neg i 2-7]$      |

# Equivalencia: $\forall x (F \wedge G) \equiv \forall x F \wedge \forall x G$

$\{\forall x (P(x) \wedge Q(x))\} \vdash \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$

- |     |  |                    |
|-----|--|--------------------|
| 1.  | $\forall x (P(x) \wedge Q(x))$         | premisa            |
| 2.  | $x_0$                                  | variable nueva     |
| 3.  | $P(x_0) \wedge Q(x_0)$                 | [ $\forall e$ 1]   |
| 4.  | $P(x_0)$                               | [ $\wedge e_1$ 3]  |
| 5.  | $\forall x P(x)$                       | [ $\forall i$ 2-4] |
| 6.  | $x_1$                                  | variable nueva     |
| 7.  | $P(x_1) \wedge Q(x_1)$                 | [ $\forall e$ 1]   |
| 8.  | $Q(x_1)$                               | [ $\wedge e_2$ 7]  |
| 9.  | $\forall x Q(x)$                       | [ $\forall i$ 6-8] |
| 10. | $\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$ | [ $\wedge i$ 5 9]  |

# Equivalencia: $\forall x (F \wedge G) \equiv \forall x F \wedge \forall x G$

$\{\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)\} \vdash \forall x (P(x) \wedge Q(x))$

- |    |  |                   |
|----|--|-------------------|
| 1. | $\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$ | premisa           |
| 2. | $x_0$                                  | variable nueva    |
| 3. | $\forall x P(x)$                       | $[\wedge e_1 1]$  |
| 4. | $P(x_0)$                               | $[\forall e 2]$   |
| 5. | $\forall x Q(x)$                       | $[\wedge e_2 1]$  |
| 6. | $Q(x_0)$                               | $[\forall e 4]$   |
| 7. | $P(x_0) \wedge Q(x_0)$                 | $[\wedge i 4 6]$  |
| 8. | $\forall x (P(x) \wedge Q(x))$         | $[\forall i 2-7]$ |

# Equivalencia: $\exists x (F \vee G) \equiv \exists x F \vee \exists x G$

$\{\exists x (P(x) \vee Q(x))\} \vdash \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$

- |     |                                      |                      |
|-----|--------------------------------------|----------------------|
| 1.  | $\exists x (P(x) \vee Q(x))$         | premisa              |
| 2.  | $x_0, P(x_0) \vee Q(x_0)$            | supuesto             |
| 3.  | $P(x_0)$                             | supuesto             |
| 4.  | $\exists x P(x)$                     | $[\exists i 3]$      |
| 5.  | $\exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$ | $[\vee i_1 4]$       |
| 6.  | $Q(x_0)$                             | supuesto             |
| 7.  | $\exists x Q(x)$                     | $[\exists i 6]$      |
| 8.  | $\exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$ | $[\vee i_2 7]$       |
| 9.  | $\exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$ | $[\vee e 2 3-5 6-8]$ |
| 10. | $\exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$ | $[\exists e 1 2-9]$  |

# Equivalencia: $\exists x (F \vee G) \equiv \exists x F \vee \exists x G$

$\{\exists x P(x) \vee \exists x Q(x)\} \vdash \exists x (P(x) \vee Q(x))$

- |     |                                      |                      |
|-----|--------------------------------------|----------------------|
| 1.  | $\exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$ | premisa              |
| 2.  | $\exists x P(x)$                     | supuesto             |
| 3.  | $x_0, P(x_0)$                        | supuesto             |
| 4.  | $P(x_0) \vee Q(x_0)$                 | $[\vee i_1 3]$       |
| 5.  | $\exists x (P(x) \vee Q(x))$         | $[\exists i 4]$      |
| 6.  | $\exists x (P(x) \vee Q(x))$         | $[\exists e 2 3-5]$  |
| 7.  | $\exists x Q(x)$                     | supuesto             |
| 8.  | $x_0, Q(x_0)$                        | supuesto             |
| 9.  | $P(x_0) \vee Q(x_0)$                 | $[\vee i_2 8]$       |
| 10. | $\exists x (P(x) \vee Q(x))$         | $[\exists i 9]$      |
| 11. | $\exists x (P(x) \vee Q(x))$         | $[\exists e 7 8-10]$ |
| 12. | $\exists x (P(x) \vee Q(x))$         | $[\vee e 1 2-9]$     |

# Equivalencia: $\exists x \exists y F \equiv \exists y \exists x F$

$\{\exists x \exists y P(x, y)\} \vdash \exists y \exists x P(x, y)$

1.  $\exists x \exists y P(x, y)$  premisa
2.  $x_0, \exists y P(x_0, y)$  supuesto
3.  $y_0, P(x_0, y_0)$  supuesto
4.  $\exists x P(x, y_0)$  [ $\exists i$  3]
5.  $\exists y \exists x P(x, y)$  [ $\exists i$  4]
6.  $\exists y \exists x P(x, y)$  [ $\exists e$  2 3-5]
7.  $\exists y \exists x P(x, y)$  [ $\exists e$  1 2-6]

# Corrección y completitud del cálculo de Deducción Natural en Lógica de Primer Orden

Dados un conjunto finito de fórmulas  $\mathbf{S}$  y una fórmula  $\mathbf{F}$ . Decimos que  $\mathbf{F}$  se deduce a partir de  $\mathbf{S}$  mediante el cálculo de Deducción Natural ( $\mathbf{S} \vdash \mathbf{F}$ ) si hay una secuencia finita de pares  $\mathbf{S}_0 \vdash \mathbf{F}_0$ ,  $\mathbf{S}_1 \vdash \mathbf{F}_1$ , ...,  $\mathbf{S}_n \vdash \mathbf{F}_n$  tales que

- $\mathbf{S}_n = \mathbf{S}$ ,  $\mathbf{F}_n = \mathbf{F}$  y
- para todo  $i = 0, \dots, n$ , el par  $\mathbf{S}_i \vdash \mathbf{F}_i$  se deduce a partir de pares anteriores mediante alguna de las reglas del cálculo de Deducción Natural.

# Deducción en el cálculo de Deducción Natural

Las reglas del cálculo de Deducción Natural son las siguientes:

- $[p]$ : Si  $F \in S$  entonces  $S \vdash F$
- $[\wedge i]$ : Si  $S \vdash F$  y  $S \vdash G$  entonces  $S \vdash F \wedge G$
- $[\wedge e_1]$ : Si  $S \vdash F \wedge G$  entonces  $S \vdash F$
- $[\wedge e_2]$ : Si  $S \vdash F \wedge G$  entonces  $S \vdash G$
- $[\neg\neg i]$ : Si  $S \vdash F$  entonces  $S \vdash \neg\neg F$
- $[\neg\neg e]$ : Si  $S \vdash \neg\neg F$  entonces  $S \vdash F$
- $[\rightarrow e]$ : Si  $S \vdash F \rightarrow G$  y  $S \vdash F$  entonces  $S \vdash G$
- $[\rightarrow i]$ : Si  $S \cup \{F\} \vdash G$  entonces  $S \vdash F \rightarrow G$

# Deducción en el cálculo de Deducción Natural

Las reglas del cálculo de Deducción Natural son las siguientes:

- $[\forall i_1]$ : Si  $S \vdash F$  entonces  $S \vdash F \vee G$
- $[\forall i_2]$ : Si  $S \vdash G$  entonces  $S \vdash F \vee G$
- $[\forall e]$ : Si  $S \vdash F \vee G$ ,  $S \cup \{F\} \vdash H$  y  $S \cup \{G\} \vdash H$ ,  
entonces  $S \vdash H$
- $[\leftrightarrow i]$ : Si  $S \vdash F \rightarrow G$  y  $S \vdash G \rightarrow F$  entonces  $S \vdash F \leftrightarrow G$
- $[\leftrightarrow e_1]$ : Si  $S \vdash F \leftrightarrow G$  entonces  $S \vdash F \rightarrow G$
- $[\leftrightarrow e_2]$ : Si  $S \vdash F \leftrightarrow G$  entonces  $S \vdash G \rightarrow F$
- $[\perp e]$ : Si  $S \vdash \perp$  entonces  $S \vdash F$
- $[\neg e]$ : Si  $S \vdash \neg F$  y  $S \vdash F$  entonces  $S \vdash \perp$
- $[\neg i]$ : Si  $S \cup \{F\} \vdash \perp$  entonces  $S \vdash \neg F$

Las reglas del cálculo de Deducción Natural son las siguientes:

- $[\forall e]$ : Si  $S \vdash \forall x F$  entonces  $S \vdash F[x/t]$   
donde  $[x/t]$  es una sustitución libre para  $F$
- $[\forall i]$ : Si  $S \vdash F[x/x_0]$  entonces  $S \vdash \forall x F$   
donde  $x_0 \notin V(S \cup \{F\})$
- $[\exists i]$ : Si  $S \vdash F[x/t]$  entonces  $S \vdash \exists x F$   
donde  $[x/t]$  es una sustitución libre para  $F$
- $[\exists e]$ : Si  $S \vdash \exists x F$  y  $S \cup \{F[x/x_0]\} \vdash G$  entonces  $S \vdash G$   
donde  $x_0 \notin V(S \cup \{F, G\})$

- **Principio de inducción estructural sobre términos:**

Si  $\mathcal{P}$  es una propiedad sobre los términos que verifica

- Todas las constantes cumplen la propiedad  $\mathcal{P}$
- Todas las variables cumplen la propiedad  $\mathcal{P}$
- Si  $t_1 \dots t_n$  son términos que cumplen la propiedad  $\mathcal{P}$  y  $f$  es un símbolo de función de aridad  $n$ , entonces  $f(t_1, \dots, t_n)$  también cumple

Entonces cualquier término del lenguaje cumple la propiedad  $\mathcal{P}$

- **Principio de inducción estructural sobre fórmulas:**

Si  $\mathcal{P}$  es una propiedad sobre las fórmulas que verifica

- Todas las fórmulas atómicas cumplen la propiedad  $\mathcal{P}$
- Si  $F$  cumple la propiedad  $\mathcal{P}$  entonces  $\neg F$  también la cumple
- Si  $F$  y  $G$  cumplen la propiedad  $\mathcal{P}$  entonces  $F \star G$  también la cumple
- Si  $F$  cumple la propiedad  $\mathcal{P}$  entonces  $\forall x F$  y  $\exists x F$  también la cumplen

Entonces cualquier fórmula de primer orden cumple  $\mathcal{P}$

- **Versión Fuerte:**

- Si  $F[x/t]$  cumple la propiedad  $\mathcal{P}$  para cualquier término del lenguaje  $t$ , entonces  $\forall x F$  y  $\exists x F$  también la cumplen

- **Lemas de irrelevancia de variables**

- Sea  $t$  un término de  $L$  e  $\mathcal{I}$  una estructura de  $L$ :
  - Si  $A$  y  $B$  son dos asignaciones en  $\mathcal{I}$  que coinciden sobre las variables de  $t$ , entonces  $\mathcal{I}_A(t) = \mathcal{I}_B(t)$ .
- Sea  $F$  una fórmula de  $L$  e  $\mathcal{I}$  una estructura de  $L$ :
  - Si  $A$  y  $B$  son dos asignaciones en  $\mathcal{I}$  que coinciden sobre las variables libres de  $F$ , entonces  $\mathcal{I}_A(F) = \mathcal{I}_B(F)$ .

- **Lemas sobre sustituciones y asignaciones:** Sea  $\mathcal{I}$  una estructura de  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{A}$  una asignación en  $\mathcal{I}$  y  $\mathbf{h}$  un término de  $\mathbf{L}$ :
  - Para todo término  $\mathbf{t}$  de  $\mathbf{L}$ :

$$\mathcal{I}_{\mathbf{A}[x/\mathcal{I}_{\mathbf{A}}(\mathbf{h})]}(\mathbf{t}) = \mathcal{I}_{\mathbf{A}}(\mathbf{t}[x/\mathbf{h}])$$

- Para toda fórmula  $\mathbf{F}$  de  $\mathbf{L}$  tal que  $[x/\mathbf{h}]$  es una sustitución libre para  $\mathbf{F}$ :

$$\mathcal{I}_{\mathbf{A}[x/\mathcal{I}_{\mathbf{A}}(\mathbf{h})]}(\mathbf{F}) = \mathcal{I}_{\mathbf{A}}(\mathbf{F}[x/\mathbf{h}])$$

- **Teorema de corrección:** Sea  $S$  un conjunto finito de fórmulas y  $F$  una fórmula:

$$\text{si } S \vdash F \text{ entonces } S \models F$$

- Demostración por inducción fuerte en la longitud de la deducción  $S \vdash F$

- **Lema de monotonía:** Sean  $S$  y  $S'$  dos conjuntos finitos de fórmulas tales que  $S \subseteq S'$  y  $F$  una fórmula:  
si  $S \vdash F$  entonces  $S' \vdash F$
- Demostración por inducción fuerte en la longitud de la deducción  $S \vdash F$

- **Teorema de completitud:** Sea  $S$  un conjunto finito de fórmulas y  $F$  una fórmula:

$$\text{si } S \models F \text{ entonces } S \vdash F$$

- Por reducción al absurdo, usando los **Lemas L1, L2 y L3**.

- **Lema L1:** Dado  $S$  un conjunto de fórmulas y  $F$  una fórmula tal que  $S \not\vdash F$ , entonces  $S \cup \{\neg F\} \not\vdash \perp$
- **Lema L2 (Lema de existencia de modelos):** Todo conjunto de fórmulas  $S$  tal que  $S \not\vdash \perp$ , es consistente
- **Lema L3:** Dado  $S$  un conjunto de fórmulas y  $F$  una fórmula tal que  $S \cup \{\neg F\}$  es consistente, entonces  $S \not\vdash F$

- **Universo de Herbrand:** El conjunto de los términos cerrados del lenguaje definidos como:
  - Las constantes son términos cerrados
  - Si  $f$  es un símbolo de función de aridad  $n$  y  $t_1, \dots, t_n$  son términos cerrados, entonces  $f(t_1, \dots, t_n)$  es un término cerrado

El universo de Herbrand de  $L$ ,  $UH(L)$ , es el conjunto de los términos cerrados en  $L$

- **Numerabilidad de las fórmulas cerradas:** El conjunto de todas las fórmulas cerradas (sentencias) es numerable

- **Cierre maximal no contradictorio:** Sea  $S$  un conjunto de fórmulas tal que  $S \not\vdash \perp$  y consideramos una enumeración de todas las fórmulas cerradas:  $F_1, F_2, \dots$ , con  $F_i \neq F_j$ , para  $i \neq j$ .

Construimos la siguiente secuencia de conjuntos de fórmulas:

- $S_0 = S$
- Para todo  $i > 0$ ,  $S_i =$ 

$\left\{ \begin{array}{l} S_{i-1} \cup \{F_i\} \\ S_{i-1} \cup \{F_i, G[x/c]\} \\ S_{i-1} \end{array} \right.$	si $S_{i-1} \cup \{F_i\} \not\vdash \perp$ y $F_i \neq \exists x G$
	si $S_{i-1} \cup \{F_i\} \not\vdash \perp$ , $F_i = \exists x G$
	y $c$ es una constante nueva en $S_{i-1} \cup F_i$
	en otro caso

Finalmente,  $S_\infty = \bigcup S_i$

- **Cierre maximal no contradictorio:** Sea  $\mathbf{S}$  un conjunto de fórmulas tal que  $\mathbf{S} \not\vdash \perp$  y consideramos una enumeración de todas las fórmulas cerradas:  $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots$ , con  $\mathbf{F}_i \neq \mathbf{F}_j$ , para  $i \neq j$ .

Propiedades:

- $\forall i, \mathbf{S}_i \subseteq \mathbf{S}_\infty$ , en particular  $\mathbf{S} \subseteq \mathbf{S}_\infty$
- $\forall i \leq j, \mathbf{S}_i \subseteq \mathbf{S}_j$  y  $\forall i < j, \mathbf{S}_i \subseteq \mathbf{S}_{j-1}$
- $\forall i, \mathbf{S}_i \not\vdash \perp$
- $\forall i, \mathbf{F}_i \in \mathbf{S}_\infty$  si y solo si  $\mathbf{S}_{i-1} \cup \{\mathbf{F}_i\} \not\vdash \perp$  (si y solo si  $\mathbf{F}_i \in \mathbf{S}_i$ )

- **Interpretación sintáctica:** Sea  $\mathbf{S}$  un conjunto de fórmulas tal que  $\mathbf{S} \not\vdash \perp$  y  $\mathbf{S}_\infty$  el cierre maximal no contradictorio de  $\mathbf{S}$ . Vamos a construir una estructura  $\mathcal{I} = (\mathbf{U}, I)$  de  $\mathbf{L}$ :
  - Universo  $\mathbf{U} = \mathbf{UH}(\mathbf{L})$ 
    - Los elementos del universo son la versión escrita de los términos cerrados, los representaremos como  $\overline{t}$
  - Interpretación de los símbolos propios de  $\mathbf{L}$ :
    - $I(c) = \overline{c}$  para todo símbolo de constante  $c$
    - $I(f) : \mathbf{U}^n \mapsto \mathbf{U}$ , tal que  $I(f)(\overline{t_1}, \dots, \overline{t_n}) = \overline{f(t_1, \dots, t_n)}$ , para todo símbolo de función  $f$
    - $I(P) = \{(\overline{t_1}, \dots, \overline{t_n}) \text{ tales que } P(t_1, \dots, t_n) \in \mathbf{S}_\infty\}$ , para todo símbolo de predicado de aridad  $n > 0$
    - $I(P) = \begin{cases} 1 & \text{si } P \in \mathbf{S}_\infty \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$   
para todo símbolo de predicado de aridad 0.

- **Interpretación sintáctica:** Sea  $\mathbf{S}$  un conjunto de fórmulas tal que  $\mathbf{S} \not\vdash \perp$  y  $\mathbf{S}_\infty$  el cierre maximal no contradictorio de  $\mathbf{S}$  e  $\mathcal{I} = (\mathbf{U}, \mathbf{I})$  la interpretación sintáctica asociada
  - **Valor de los términos cerrados:** Para todo término cerrado  $\mathbf{t}$  y toda asignación  $\mathbf{A}$ :  $\mathcal{I}_{\mathbf{A}}(\mathbf{t}) = \bar{\mathbf{t}}$
  - **Valor de los fórmulas cerrados:** Para toda fórmula cerrada  $\mathbf{F}$  y toda asignación  $\mathbf{A}$ 
    - Si  $\mathbf{F} \in \mathbf{S}_\infty$  entonces  $\mathcal{I}_{\mathbf{A}}(\mathbf{F}) = \mathbf{1}$
    - Si  $\mathbf{F} \notin \mathbf{S}_\infty$  entonces  $\mathcal{I}_{\mathbf{A}}(\mathbf{F}) = \mathbf{0}$

- **Lema de existencia de modelos (cerrado):** Si  $\mathcal{S}$  es un conjunto de fórmulas cerradas con  $\mathcal{S} \not\vdash \perp$  entonces  $\mathcal{S}$  es consistente
- **Lema de existencia de modelos:** Si  $\mathcal{S}$  es un conjunto de fórmulas con  $\mathcal{S} \not\vdash \perp$  entonces  $\mathcal{S}$  es consistente
  - Si  $\mathcal{S} \not\vdash \perp$  entonces  $\{\wedge \mathcal{S}\} \not\vdash \perp$
  - Si  $\{\wedge \mathcal{S}\} \not\vdash \perp$  entonces  $\{\exists \wedge \mathcal{S}\} \not\vdash \perp$
  - Si  $\{\exists \wedge \mathcal{S}\} \not\vdash \perp$  entonces  $\{\exists \wedge \mathcal{S}\}$  es consistente
  - Si  $\{\exists \wedge \mathcal{S}\}$  es consistente entonces  $\{\wedge \mathcal{S}\}$  es consistente
  - Si  $\{\wedge \mathcal{S}\}$  es consistente entonces  $\mathcal{S}$  es consistente

# Reglas de la igualdad

# Reglas de la igualdad

- Regla de eliminación de la igualdad

$$\frac{t_1 = t_2 \quad F[x/t_1]}{F[x/t_2]} [=e]$$

donde  $[x/t_1]$  y  $[x/t_2]$  son sustituciones libres para  $F$

- Regla de sustitución de izquierda a derecha

$$\{x + y = z, x + y > 0\} \vdash z > 0$$

1.  $x + y = z$     premisa
2.  $x + y > 0$     premisa
3.  $z > 0$         [=e 1 2]

- Regla de introducción de la igualdad

$$\frac{}{t = t} [=i]$$

- Se trata de la reflexividad de la igualdad
- Simetría de la igualdad

$$\{s = t\} \vdash t = s$$

1.  $s = t$     premisa
2.  $s = s$     [=i]
3.  $t = s$     [=e 1 2]

- Transitividad de la igualdad

$$\{r = s, s = t\} \vdash r = t$$

1.  $r = s$     premisa
2.  $s = t$     premisa
3.  $r = t$     [=e 2 1]

- Regla de sustitución de derecha a izquierda

$$\{t = s, P(s)\} \vdash P(t)$$

1.  $t = s$     premisa
2.  $P(s)$     premisa
3.  $t = t$     [=i]
4.  $s = t$     [=e 1 3]
5.  $P(t)$     [=e 4 2]

- C. Badesa, I. Jané y R. Jansana *Elementos de lógica formal*  
Capítulo 16
- J.A. Díez. *Iniciación a la Lógica*  
Capítulo 8
- M. Huth y M. Ryan. *Logic in computer science: modelling and reasoning about systems*  
Capítulo 2.3