

La función cociente.

Se define la *función cociente*, $\mathbf{qt}: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$, como sigue:

$$\mathbf{qt}(x, y) = z \iff (x = z \cdot y + \mathbf{rm}(x, y))$$

Veamos que esta función es GOTO-computable.

Consideremos la función total f de $\mathbb{N}^2$ en $\mathbb{N}$ definida por recursión primitiva como sigue:

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 = \mathbf{0}^{(1)}(x). \\ f(x, y + 1) = f(x, y) + \overline{\mathbf{sg}}(|x \dot{-} (\mathbf{rm}(x, y) + 1)|). \end{cases}$$

Se tiene que

$$\begin{cases} f(x, y) = g(x) \\ f(x, y + 1) = h(x, y, f(x, y)) \end{cases}$$

En donde:

- $g(x) = 0 = \mathbf{0}^{(1)}(x)$ que es una función GOTO-computable) y
- $h(x, y, f(x, y)) = f(x, y) + \overline{\mathbf{sg}}(|x \dot{-} (\mathbf{rm}(x, y) + 1)|).$

Así pues, $h(x, y, z) = z + \overline{\mathbf{sg}}(|x \dot{-} (\mathbf{rm}(x, y) + 1)|).$ Luego,

$$h = C(+; \Pi_3^{(3)}, C(\overline{\mathbf{sg}}; C(| \cdot |; C(\dot{-}; \Pi_1^{(3)}, C(\mathbf{S}; C(\mathbf{rm}; \Pi_1^{(3)}, \Pi_2^{(3)}))))$$

Por tanto, h es una función GOTO-computable.

Teniendo presente que $f = \mathcal{R}(g, h)$, concluimos que la función f es GOTO-computable.

Aserto: Para cada $x, y \in \mathbb{N}$ se tiene que $\mathbf{qt}(x, y) = f(y, x).$

Prueba: Por inducción sobre x .

$x=0$ Trivial, ya que para cada $y \in \mathbb{N}$ se tiene que $\mathbf{qt}(0, y) = 0 = f(y, 0).$

$x \rightarrow x+1$ Sea $x \in \mathbb{N}$ tal que $\forall y \in \mathbb{N} (\mathbf{qt}(x, y) = f(y, x)).$ Sea $y \in \mathbb{N}.$

Si $z = \mathbf{qt}(x, y)$, entonces $x = z \cdot y + t \wedge 0 \leq t < y.$

Caso 1º. Supongamos que $t + 1 < y.$

En este caso, $\mathbf{qt}(x + 1, y) = z.$

Además, $\overline{\mathbf{sg}}(|x \dot{-} (\mathbf{rm}(x, y) + 1)|) = \overline{\mathbf{sg}}(|y \dot{-} (t + 1)|) = 0.$

Luego,

$$\mathbf{qt}(x + 1, y) = \mathbf{qt}(x, y) \stackrel{h.i.}{=} f(y, x) = f(y, x + 1)$$

Caso 2º. Supongamos que $t + 1 = y.$

En este caso, $\mathbf{qt}(x + 1, y) = z + 1 \wedge \mathbf{rm}(x + 1, y) = 0.$

Además,

$$\begin{aligned} f(y, x + 1) &= f(y, x) + \overline{\mathbf{sg}}(|y \dot{-} (t + 1)|) \\ &= f(y, x) + 1 \stackrel{h.i.}{=} \mathbf{qt}(x, y) + 1 = \mathbf{qt}(x + 1, y) \end{aligned}$$

Del aserto se deduce que $\mathbf{qt}(x, y) = f(\Pi_2^{(2)}(x, y), \Pi_1^{(2)}(x, y)),$ para cada $x, y \in \mathbb{N}.$ Es decir.
 $\mathbf{qt} = C(f; \Pi_2^{(2)}, \Pi_1^{(2)}).$

En consecuencia, la función cociente $\mathbf{qt}$ es GOTO-computable.