La función resto.

Se define la *función resto*, **rm**: $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, como sigue:

$$\mathbf{rm}(x,y) = z \iff \leq q \; (x = q \cdot y + z \wedge 0 \leq z < y)$$

Veamos que esta función es `GOTO`–computable.

Consideremos la función total f de $\mathbb{N}^2$ en $\mathbb{N}$ definida por recursión primitiva como sigue:

$$\begin{cases} f(x,y) = 0 = \mathbf{0}^{(1)}(x). \\ f(x,y+1) = (f(x,y)+1) \bullet \mathbf{sg}(x \dot{-} (f(x,y)+1)). \end{cases}$$

Se tiene que $f(x,y+1) = \bullet(\mathbf{S}(\Pi_3^{(3)}(x,y,f(x,y)), \mathbf{sg}(\dot{-}\, (\Pi_1^{(3)}(x,y,f(x,y)), \mathbf{S}(\Pi_3^{(3)}(x,y,f(x,y))))$.

Es decir:

$$f = R(\mathbf{O}^{(1)}, C(\bullet; C(\mathbf{S}; \Pi_3^{(3)}, C(\mathbf{sg}; C(\dot{-}\,; \Pi_1^{(3)}, C(\mathbf{S}; \Pi_3^{(3)}))))$$

Luego, f es una función `GOTO`–computable.

Aserto: Para cada $x, y \in \mathbb{N}$ se tiene que $\mathbf{rm}(x,y) = f(y,x)$.

<u>Prueba:</u> Por inducción sobre x.

$\boxed{x{=}0}$

Trivial, ya que para cada $y \in \mathbb{N}$ se tiene que $\mathbf{rm}(0,y) = 0 = f(y,0)$.

$\boxed{x \to x{+}1}$

Sea $x \in \mathbb{N}$ tal que $\forall y \in \mathbb{N}\ (\mathbf{rm}(x,y) = f(y,x))$. Sea $y \in \mathbb{N}$.

Si $z = \mathbf{rm}(x,y)$, entonces existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $x = q \cdot y + z \wedge 0 \leq z < y$.

<u>Caso 1º.</u> Supongamos que $z+1 < y$.
En este caso, $\mathbf{rm}(x+1,y) = z+1 = \mathbf{rm}(x,y)+1$.
Además, $\mathbf{sg}(y \dot{-} (\mathbf{rm}(x,y)+1)) = \mathbf{sg}(y \dot{-} (z+1)) = 1$.
Luego,

$$\begin{aligned} f(y,x+1) &= (f(y,x)+1) \bullet \mathbf{sg}(y \dot{-} (f(y,x)+1)) \\ &\overset{h.i.}{=} (\mathbf{rm}(x,y)+1) \bullet \mathbf{sg}(y \dot{-} (\mathbf{rm}(x,y)+1)) \\ &= (\mathbf{rm}(x,y)+1) \bullet \mathbf{sg}(y \dot{-} (z+1)) \\ &= \mathbf{rm}(x,y)+1 = \mathbf{rm}(x+1,y) \end{aligned}$$

<u>Caso 2º.</u> Supongamos que $z+1 = y$.
En este caso, $\mathbf{rm}(x+1,y) = 0$.
Además, $\mathbf{sg}(y \dot{-} (\mathbf{rm}(x,y)+1)) = \mathbf{sg}(y \dot{-} (z+1)) = 0$.
Luego, $(f(y,x+1) = (\mathbf{rm}(x,y)+1) \bullet \mathbf{sg}(y \dot{-} (\mathbf{rm}(x,y)+1)) = 0$.

Por tanto, $\mathbf{rm}(x,y) = f(\Pi_2^{(2)}(x,y), \Pi_1^{(2)}(x,y))$, para cada $x, y \in \mathbb{N}$. Es decir, $\mathbf{rm} = C(f; \Pi_2^{(2)}, \Pi_1^{(2)})$.

En consecuencia, la función resto, **rm**, es `GOTO`–computable.

■