

MODELOS DE COMPUTACIÓN Y COMPLEJIDAD

Grado en Ingeniería Informática. Tecnologías Informáticas
ETS Ingeniería Informática. Universidad de Sevilla (Curso 2021-2022)

Problemas de FUNCIONES GOTO-COMPUTABLES

EJERCICIO 11.

Probar que es GOTO-computable la función total $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definida por:

$$f(0) = 1 \text{ y } f(n + 1) = \text{número de dígitos de } n + 1 \text{ en base } 10$$

SOLUCIÓN:

En primer lugar, observemos que para cada número natural $n > 0$ **existe un único número natural** z que verifica lo siguiente: $10^z \leq n < 10^{z+1}$. Desde luego, ese único número z , será el **menor número** z que satisface esa propiedad.

Ahora bien, de acuerdo con la definición de f , para cada $n \geq 1$, se verifica:

- $f(n) = 1$ **sii** $10^0 \leq n < 10^1$.
- $f(n) = 2$ **sii** $10^1 \leq n < 10^2$.
- $f(n) = 3$ **sii** $10^2 \leq n < 10^3$.
- En general, $f(n) = z + 1$ **sii** $10^z \leq n < 10^{z+1}$, para cada $n > 0$.

Por tanto, la función f se puede describir a través de la **minimización no acotada** de un predicado, como sigue:

$$f(n) = 1 + \mu z (10^z \leq n < 10^{z+1})$$

Teniendo presente que $z < 10^z$, para cada $z \in \mathbb{N}$, la descripción anterior de f podemos expresarla mediante una **minimización acotada**:

$$f(n) = 1 + \mu z \leq n (10^z \leq n < 10^{z+1})$$

En consecuencia, la función f podemos describirla como una **función definida por casos** como sigue:

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{sii } n = 0 \\ 1 + \mu z \leq n (10^z \leq n < 10^{z+1}) & \text{sii } n \neq 0 \end{cases}$$

Es decir: f está definida por casos a partir de: (a) dos funciones totales $f_1(n) = 1$ y $f_2(n) = 1 + \mu z \leq n (10^z \leq n < 10^{z+1})$; y (b) dos predicados $\theta_1(n) \equiv n = 0$ y $\theta_2(n) \equiv n \neq 0$.

Ahora bien:

- f_1 es la función constante igual a 1, de aridad 1. Por tanto, es una función GOTO-computable.

- f_2 es GOTO-computable ya que es la suma de dos funciones ($g(n) = 1$ y $h(n) = \mu z \leq n (10^z \leq n < 10^{z+1})$) que son GOTO-computables, ya que g trivialmente lo es y h también (ya que se trata de la minimización acotada de la conjunción de los predicados GOTO-computables $10^z \leq n$ y $n < 10^{z+1}$),
- θ_1 y θ_2 son predicados GOTO-computables ya que uno es el predicado “menor o igual” en \mathbb{N} y el otro es el predicado “estríctamente menor” en \mathbb{N} (en los que intervienen una función exponencial).

Por tanto, del teorema de definición por casos para funciones totales, concluimos que la función f es, asimismo, GOTO-computable.
