MODELOS DE COMPUTACIÓN Y COMPLEJIDAD

Grado en Ingeniería Informática. Tecnologías Informáticas

ETS Ingeniería Informática. Universidad de Sevilla (Curso 2021-2022)

Problemas de FUNCIONES GOTO-COMPUTABLES

EJERCICIO 12.

Probar que las funciones binarias que calculan el *máximo común divisor* y el *mínimo común múltiplo* de dos números naturales, son `GOTO` computables.

SOLUCIÓN:

Solución: En primer lugar, vamos a definir con precisión quiénes son las funciones binarias que calculan el *máximo común divisor* y el *mínimo común múltiplo* de dos números naturales.

Dados dos números naturales $x, y \in \mathbb{N}$, diremos que x *divide a* y (y notaremos $x|y$) si y sólo si existe un número natural z tal que $y = x \cdot z$. En tal situación, diremos que x *es un divisor de* y, o bien que y *es un múltiplo de* x. De esta definición se deduce inmediatamente que:

(a) Cualquier número natural $x \in \mathbb{N}$ es un divisor de 0.

(b) Para cualquier número natural $x \neq 0$, todo divisor de x es menor o igual que x. Por tanto, en este caso, el conjunto de divisores de x es finito y no vacío.

(c) El único múltiplo de 0 es el 0.

(d) Para cualquier número natural $x \neq 0$, el conjunto de múltiplos de x es infinito.

Así pues, dados dos números naturales x, y distintos de 0 se tiene lo siguiente:

(a) El conjunto de los números naturales que son divisores comunes de x e y, será finito y no vacío. Por tanto (por el *principio del máximo* en $\mathbb{N}$: *todo conjunto finito y no vacío de número naturales posee elemento máximo*), existirá el **mayor** elemento z de dicho conjunto (denominado *máximo común divisor* de x e y). En este caso, notaremos $mcd(x, y) = z$.

(b) El conjunto de los números naturales que son múltiplos comunes de x e y, será infinito. Por tanto (por el *principio del mínimo* en $\mathbb{N}$: *todo conjunto no vacío de número naturales posee elemento mínimo*), existirá el **menor** elemento z de dicho conjunto (denominado *mínimo común múltiplo* de x e y). En este caso, notaremos $mcm(x, y) = z$.

La *función máximo común divisor* es la función total f de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ definida como sigue:

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = 0 \lor y = 0 \\ mcd(x, y) & \text{si} \quad x \neq 0 \lor y \neq 0 \end{cases}$$

La `GOTO`-computabilidad de la función f se obtiene aplicando el teorema de definición por casos para funciones totales y teniendo presente que para el caso en que x, y sean números naturales distintos de cero, se verifica lo siguiente:

$$f(x, y) = \mu z \leq x \ [\ z|x \land z|y \land \forall t \leq x \ (t|x \land t|y \to t \leq z\ )]$$

Es decir, en este caso $f(x,y)$ es la minimización acotada de un predicado GOTO-computable.

- Específicamente, dicho predicado es, a su vez, la conjunción de tres predicados GOTO-computables: dos predicados de divisibilidad y una cuantificación universal acotada de otro predicado GOTO-computable - una implicación en donde el antecedente es la conjunción de dos predicados de divisibilidad y el consecuente es un predicado $\leq$).

Por su parte, la *función mínimo común múltiplo* es la función total g de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ definida como sigue:

$$g(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = 0 \vee y = 0 \\ mcm(x,y) & \text{si} \quad x \neq 0 \vee y \neq 0 \end{cases}$$

La GOTO-computabilidad de la función g se obtiene aplicando el teorema de definición por casos para funciones totales y teniendo presente que para el caso en que x, y sean números naturales distintos de cero, se verifica lo siguiente:

$$g(x,y) = \mu z \leq x \cdot y \ [\ x|z \wedge y|z \wedge \forall t \leq x \cdot y \ (x|t \wedge y|t \rightarrow z \leq t\ )]$$

Es decir, en este caso $g(x,y)$ es la minimización acotada de un predicado GOTO-computable (obsérvese que el producto $x \cdot y$ es múltiplo de x y múltiplo de y, luego ha de ser mayor o igual que el menor de los múltiplos comunes a x e y).

- Específicamente, dicho predicado es, a su vez, la conjunción de tres predicados GOTO-computables: dos predicados de divisibilidad y una cuantificación universal acotada de otro predicado GOTO-computable - una implicación en donde el antecedente es la conjunción de dos predicados de divisibilidad y el consecuente es un predicado $\leq$).

— —