MODELOS DE COMPUTACIÓN Y COMPLEJIDAD

Grado en Ingeniería Informática. Tecnologías Informáticas

ETS Ingeniería Informática. Universidad de Sevilla (Curso 2021-2022)

Problemas de FUNCIONES GOTO-COMPUTABLES

EJERCICIO 13.

Probar que los siguientes predicados binarios sobre los números naturales, son GOTO-computables:

(a) $\theta_1(x, y) \equiv x$ e y tienen distinta paridad y, además, tienen el **mismo número de divisores primos**.

(b) $\theta_2(x, y) \equiv x$ e y son distintos de cero y, además, tienen los **mismos divisores primos**.

(c) $\theta_3(x, y) \equiv$ el **número de divisores primos** de x es, al menos, y.

SOLUCIÓN:

Antes de abordar la resolución de este ejercicio, vamos a realizar algunas observaciones interesantes.

1. Se ha visto en clase que es GOTO-computable el predicado 1-ario sobre los números naturales, $primo(x) \equiv x$ *es un número primo*.
2. Todo número primo es un divisor primo de 0. Por tanto, si dos números naturales de distinta paridad tienen el mismo número de divisores primos, entonces ambos números han de ser distintos de 0.
3. Dado un número natural x distinto de 0, el número de divisores primos de x es $\sum_{z \leq x} (z|x) \wedge (primo(z))$. En efecto: cada vez que tengamos un divisor primo z de x añadimos una unidad, notando $(z|x) \wedge (primo(z))$ que, en ese caso, valdrá 1.
4. El predicado 1-ario sobre los números naturales, $par(x) \equiv x$ *es un número par*, es GOTO-computable. En efecto: basta tener presente que dicho predicado puede describirse como sigue: $par(x) \equiv \exists t \leq x \ (x = 2t)$. Es decir, $par(x)$ es la cuantificación existencial acotada de un predicado GOTO-computable.
5. Dos números naturales x, y tienen distinta paridad si y sólo si la suma $x + y$ es un número impar. Es decir, si y sólo si el predicado $\neg par(x + y)$ es verdadero.

Seguidamente, vamos a establecer la GOTO-computabilidad de los tres predicados.

(a) El predicado $\theta_1(x, y)$ puede ser descrito como sigue:

$$\theta_1(x, y) \equiv [\neg par(x + y)] \wedge \Big[\sum_{z \leq x} (z|x) \wedge (primo(z)) = \sum_{t \leq y} (t|y) \wedge (primo(t)) \Big]$$

De esa relación se deduce que $\theta_1(x, y)$ es la conjunción de dos predicados GOTO-computables (recuérdese que del problema 16 resulta que las funciones suma acotada $\sum_{z \leq x} (z|x) \wedge (primo(z))$ y $\sum_{t \leq y} (t|y) \wedge (primo(t))$ son GOTO-computables).

(b) El predicado $\theta_2(x, y)$ puede ser descrito como sigue:

$$[x \neq 0] \wedge [y \neq 0] \wedge [\forall z \leq x\ (z|x \wedge primo(z) \rightarrow z|y)] \wedge [\forall t \leq y\ (t|y \wedge primo(t) \rightarrow t|x)]$$

Así pues, $\theta_2(x, y)$ es la conjunción de cuatro predicados. Los dos primeros son, obviamente, `GOTO`-computables. El tercero y el cuarto también son `GOTO`-computables ya que son cuantificaciones universales acotadas de predicados `GOTO`-computables (el tercer predicado indica que "*todo divisor primo de* x *es un divisor de* y, mientras que el cuarto indica que "*todo divisor primo de* y *es un divisor de* x).

(c) El predicado $\theta_3(x, y)$ puede ser descrito como sigue:

$$\theta_3(x, y) \equiv \big[\sum_{z \leq x} (z|x) \wedge (primo(z))\big] \geq y$$

Así pues, $\theta_3(x, y)$ es un predicado `GOTO`-computable al tratarse de una desigualdad en donde el primer miembro es una función suma acotada de otro predicado `GOTO`-computable.

— —