MODELOS DE COMPUTACIÓN Y COMPLEJIDAD

Grado en Ingeniería Informática. Tecnologías Informáticas

ETS Ingeniería Informática. Universidad de Sevilla (Curso 2021-2022)

Problemas de FUNCIONES GOTO-COMPUTABLES

EJERCICIO 14.

Probar que las siguientes funciones totales de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ son `GOTO`-computables:

(a) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ \text{la suma de divisores de } x & \text{si} \quad x \neq 0 \end{cases}$

(b) $g(x) =$ el número de primos que son menores o iguales que x.

(c) $h(x) =$ el único número natural n tal que $n \leq \sqrt{2} \cdot x < n + 1$.

SOLUCIÓN:

(a) En primer lugar, observemos que para cada número natural x distinto de 0 se tiene:

1. Si z es un divisor de x entonces $z \leq x$ y el predicado $z|x$ vale 1.
2. Si $z \leq x$ no es un divisor de x entonces el predicado $z|x$ vale 0.
3. Si $z \leq x$ entonces la expresión $z \cdot (z|x)$ es igual a z, en el caso en que z sea un divisor de x, y es igual a 0 en caso contrario.

Por tanto, la función f se puede describir como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ \sum_{z \leq x} z \cdot (z|x) & \text{si} \quad x \neq 0 \end{cases}$$

Es decir, f es una función total definida por casos a partir de dos predicados `GOTO` s ($x = 0$ y $x \neq 0$) y de dos funciones `GOTO`-computables ($f_1(x) = 0$ y $f_2(x) = \sum_{z \leq x} z \cdot (z|x)$: la primera es, obviamente `GOTO`-computable y la segunda lo es por tratarse de una función suma acotada de una función total `GOTO`).

(b) Teniendo presente que todo número primo es mayor o igual que 2, resulta que $g(x) = 0$ para $x \in \{0, 1\}$. Además, si $x \geq 2$ entonces $g(x) = \sum_{z \leq x} primo(z)$. Por tanto, la función g se puede describir como sigue:

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = 0 \vee x = 1 \\ \sum_{z \leq x} primo(z) & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

Es decir, g es una función total definida por casos a partir de tres predicados `GOTO` s ($x = 0$, $x = 1$ y $x \geq 2$) y de dos funciones `GOTO`-computables ($f_1(x) = 0$ y $f_2(x) = \sum_{z \leq x} primo(z)$, para cada $x \in \mathbb{N}$: la primera es, obviamente `GOTO`-computable y la segunda lo es por tratarse de una función suma acotada de un predicado `GOTO`).

(c) En primer lugar, obsérvese que si α es el **único** número natural que verifica un cierto predicado $\theta(x)$ sobre $\mathbb{N}$, entonces es, así mismo, el **menor** número natural que satisface dicho predicado.

Así pues, la función h se puede describir como sigue: $h(x) = \mu\alpha\ (\alpha \leq \sqrt{2} \cdot x < \alpha + 1)$. Ahora bien, si $\alpha \leq \sqrt{2} \cdot x$ entonces $\alpha \leq \alpha^2 \leq 2 \cdot x^2$. Por tanto, se tiene que $h(x) = \mu\alpha \leq 2 \cdot x^2\ (\alpha^2 \leq 2 \cdot x^2 < (\alpha + 1)^2)$. Es decir, la función total h es la minimización acotada de un predicado $(\alpha^2 \leq 2 \cdot x^2 < (\alpha + 1)^2)$ que, a su vez, es conjunción de dos predicados ($\alpha^2 \leq 2 \cdot x^2$ y $2x^2 < (\alpha + 1)^2$ que, obviamente, son `GOTO` s. De lo que antecede, concluimos que la función total h es `GOTO` .

– –