Lógicas clásicas

Francisco J. Martín Mateos

Dpto. Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial
Universidad de Sevilla

Lógicas clásicas

- Objetivos de la lógica:
  - Formalización del lenguaje natural.
  - Desarrollar métodos de razonamiento independientes del contexto.
- Sistemas lógicos:
  - Lógica proposicional.
  - Lógica de primer orden.
  - Lógica de orden superior.
  - Lógicas modales.
  - Lógicas descriptivas.

Lógicas clásicas

- Las lógicas clásicas son sistemas formales que cumplen:
  - *Principio de tercio excluso*: Cualquier afirmación es verdadera o falsa.
  - *Principio de no contradicción*: No hay afirmaciones que sean verdaderas y falsas al mismo tiempo.
  - *Principio de explosión*: De una afirmación contradictoria se puede deducir cualquier cosa.
  - *Principio de monotonía de la implicación*: Las hipótesis de cualquier hecho derivado pueden ampliarse con supuestos adicionales.
- Ejemplos:
  - Lógica proposicional.
  - Lógica de primer orden.
  - Lógica de segundo orden.

Lógica proposicional

Argumentaciones y formalización

- Argumentaciones:
  - Si el tren llega a las 7 y no hay taxis en la estación, entonces Juan llegará tarde a la reunión. Juan no ha llegado tarde a la reunión. El tren llegó a las 7. Por tanto, había taxis en la estación.
  - Si hay corriente y la lámpara no está fundida, entonces está encendida. La lámpara no está encendida. Hay corriente. Por tanto, la lámpara está fundida.

Argumentaciones y formalización

- Formalización:
  - Primer caso:
    - $\mathbf{p} \equiv$ "el tren llega a las 7"
    - $\mathbf{q} \equiv$ "hay taxis en la estación"
    - $\mathbf{r} \equiv$ "juan llegará tarde a la reunión"
  - Segundo caso:
    - $\mathbf{p} \equiv$ "hay corriente"
    - $\mathbf{q} \equiv$ "la lámpara está fundida"
    - $\mathbf{r} \equiv$ "la lámpara está encendida"
- En ambos casos:
  - Argumentación: Si $\mathbf{p}$ y no $\mathbf{q}$, entonces $\mathbf{r}$. No $\mathbf{r}$. $\mathbf{p}$. Por tanto, $\mathbf{q}$
  - Formulación: $\mathbf{p} \wedge \neg \mathbf{q} \rightarrow \mathbf{r}, \neg \mathbf{r}, \mathbf{p} \models \mathbf{q}$.

Sintaxis

- Alfabeto proposicional:
  - Variables proposicionales: $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{r}$, $\ldots$, $\mathbf{p_1}$, $\mathbf{p_2}$, $\ldots$
  - Conectivas lógicas:
    - Conectivas monarias:
      negación, $\neg$.
    - Conectivas binarias:
      conjunción, $\wedge$;
      disyunción, $\vee$;
      condicional $\rightarrow$;
      bicondicional $\leftrightarrow$.
  - Símbolos adicionales: **(** y **)**.

Sintaxis

- Fórmulas proposicionales:
  - Cualquier variable proposicional es una fórmula (fórmulas atómicas).
  - Si **F** y **G** son fórmulas entonces también son fórmulas:
    - Negación: $(\neg \mathbf{F})$
    - Conjunción: $(\mathbf{F} \wedge \mathbf{G})$
    - Disyunción: $(\mathbf{F} \vee \mathbf{G})$
    - Condicional: $(\mathbf{F} \rightarrow \mathbf{G})$
    - Bicondicional: $(\mathbf{F} \leftrightarrow \mathbf{G})$
- Ejemplos:
  - Son fórmulas: $\mathbf{p}$, $(\mathbf{p} \vee (\neg \mathbf{q}))$, $((\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) \rightarrow (\mathbf{q} \vee \mathbf{p}))$.
  - No es fórmula: $(\mathbf{p} \wedge \vee \mathbf{q})$.

Sintaxis

- Notación:
  - Variables proposicionales: **p**, **q**, **r**
  - Conjunto de todas las variables proposicionales: **VP**
  - Fórmulas proposicionales: **F**, **G**, **H**
  - Conjunto de todas las fórmulas proposicionales: **Prop**
- Los paréntesis se eliminan cuando no hay duda sobre el uso de las conectivas lógicas.
  - Se eliminan los paréntesis externos:
    - $\mathbf{F} \vee \mathbf{G}$ en lugar de $\mathbf{(F \vee G)}$.
  - Se usa una precedencia entre las conectivas: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$.
    - $\mathbf{F} \wedge \mathbf{G} \rightarrow \neg\mathbf{F} \vee \mathbf{G}$ en lugar de $\mathbf{(F \wedge G)} \rightarrow \mathbf{((\neg F) \vee G)}$
  - Asociación por la derecha de las conectivas:
    - $\mathbf{F} \vee \mathbf{G} \vee \mathbf{H}$ en lugar de $\mathbf{F} \vee \mathbf{(G \vee H)}$

Semántica

- Valores de verdad: verdadero ($\mathbf{1}$ o $\top$) y falso ($\mathbf{0}$ o $\bot$)
  - El conjunto de los valores de verdad es $\mathbb{B}$
- Funciones de verdad asociadas a las conectivas:

$$\mathbf{H}_{\neg}(\mathbf{i}) = \begin{cases} \mathbf{1} & \text{si } \mathbf{i} = \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \text{si } \mathbf{i} = \mathbf{1} \end{cases}$$

$$\mathbf{H}_{\wedge}(\mathbf{i},\mathbf{j}) = \begin{cases} \mathbf{1} & \text{si } \mathbf{i} = \mathbf{j} = \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\mathbf{H}_{\vee}(\mathbf{i},\mathbf{j}) = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{si } \mathbf{i} = \mathbf{j} = \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\mathbf{H}_{\rightarrow}(\mathbf{i},\mathbf{j}) = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{si } \mathbf{i} = \mathbf{1} \text{ y } \mathbf{j} = \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\mathbf{H}_{\leftrightarrow}(\mathbf{i},\mathbf{j}) = \begin{cases} \mathbf{1} & \text{si } \mathbf{i} = \mathbf{j} \\ \mathbf{0} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Semántica

- Tablas de verdad:
  - Conectivas monarias:

$\mathbf{i}$	$\mathbf{\neg i}$
1	**0**
0	**1**

  - Conectivas binarias:

$\mathbf{i}$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{i \wedge j}$	$\mathbf{i \vee j}$	$\mathbf{i \rightarrow j}$	$\mathbf{i \leftrightarrow j}$
0	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**
0	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**
1	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**
1	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**

Semántica

- Interpretaciones: Funciones del conjunto de las variables proposicionales en el conjunto de valores de verdad.

$$\mathbf{I : VP} \longrightarrow \mathbb{B}$$

- Para cada interpretación **I** existe una única función que da significado a las fórmulas, $\mathbf{I : Prop} \longrightarrow \mathbb{B}$, tal que:

$$\mathbf{I(F)} = \begin{cases} \mathbf{I(F)} & \text{si } \mathbf{F} \text{ es atómica} \\ \mathbf{H_{\neg}(I(G))} & \text{si } \mathbf{F} = \neg\mathbf{G} \\ \mathbf{H_{*}(I(G), I(H))} & \text{si } \mathbf{F} = \mathbf{G} * \mathbf{H} \end{cases}$$

Donde $*$ es cualquier conectiva binaria.

Semántica

- Interpretaciones de fórmulas:
  - $\mathbf{F = (p \vee q) \wedge (\neg q \vee r)}$ en la interpretación $\mathbf{I_1}$ tal que $\mathbf{I_1(p) = I_1(r) = 1}$ e $\mathbf{I_1(q) = 0}$:

p	q	r	p ∨ q	¬q	¬q ∨ r	F
1	0	1	1	1	1	1

  - $\mathbf{F = (p \vee q) \wedge (\neg q \vee r)}$ en la interpretación $\mathbf{I_2}$ tal que $\mathbf{I_2(r) = 1}$ e $\mathbf{I_2(p) = I_2(q) = 0}$:

p	q	r	p ∨ q	¬q	¬q ∨ r	F
0	0	1	0	1	1	0

- Si dos interpretaciones $\mathbf{I_1}$ e $\mathbf{I_2}$ coinciden en todas las variables proposicionales de una fórmula $\mathbf{F}$ entonces $\mathbf{I_1(F) = I_2(F)}$.

Modelos y satisfacibilidad

- Módelo de una fórmula:
  - Una interpretación $\mathbf{I}$ es modelo de una fórmula $\mathbf{F}$ si $\mathbf{I(F) = 1}$
  - Se escribe $\mathbf{I} \models \mathbf{F}$
    - Si $\mathbf{I_1(p) = I_1(r) = 1}$ e $\mathbf{I_1(q) = 0}$, entonces $\mathbf{I_1} \models \mathbf{(p \vee q) \wedge (\neg q \vee r)}$
    - Si $\mathbf{I_2(r) = 1}$ e $\mathbf{I_2(p) = I_2(q) = 0}$, entonces $\mathbf{I_2} \not\models \mathbf{(p \vee q) \wedge (\neg q \vee r)}$
- Una fórmula es satisfacible si tiene modelos:
  - La fórmula $\mathbf{(p \vee q) \wedge (\neg q \vee r)}$ es satisfacible.
- Una fórmula es insatisfacible si no tiene modelos:
  - La fórmula $\mathbf{p \wedge \neg p}$ es insatisfacible

Tautologías y contradicciones

- Una fórmula **F** es una tautología o válida ($\models \mathbf{F}$), si toda interpretación es un modelo de **F**.
  - La fórmula $\mathbf{(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)}$ es una tautología.
- Una fórmula **F** es una contradicción o insatisfacible, si ninguna interpretación es un modelo de **F**.
  - La fórmula $\mathbf{(p \rightarrow q) \wedge \neg (p \rightarrow q)}$ es una contradicción.
- Una fórmula **F** es contingente, si no es una tautología ni una contradicción.
  - La fórmula $\mathbf{p \rightarrow q}$ es contingente.

Satisfacibilidad y validez

- Los problemas SAT y TAUT
  - Problema SAT: Dada una fórmula, determinar si es satisfacible.
  - Problema TAUT: Dada una fórmula, determinar si es una tautología.
- Relaciones entre estos dos problemas:
  - **F** es una tautología $\Longleftrightarrow$ $\neg$**F** es insatisfacible.
  - **F** es una tautología $\Longrightarrow$ **F** es satisfacible.
  - **F** es satisfacible $\not\Longrightarrow$ $\neg$**F** es insatisfacible.

Fórmulas equivalentes

- Dos fórmulas $\mathbf{F}$ y $\mathbf{G}$ son equivalentes ($\mathbf{F} \equiv \mathbf{G}$), si para toda interpretación $\mathbf{I}$ se tiene que $\mathbf{I(F) = I(G)}$.
- Equivalencias importantes:
  - Idempotencia:
    $$\mathbf{F} \vee \mathbf{F} \equiv \mathbf{F}$$
    $$\mathbf{F} \wedge \mathbf{F} \equiv \mathbf{F}$$
  - Conmutatividad:
    $$\mathbf{F} \vee \mathbf{G} \equiv \mathbf{G} \vee \mathbf{F}$$
    $$\mathbf{F} \wedge \mathbf{G} \equiv \mathbf{G} \wedge \mathbf{F}$$
  - Asociatividad:
    $$\mathbf{F} \vee (\mathbf{G} \vee \mathbf{H}) \equiv (\mathbf{F} \vee \mathbf{G}) \vee \mathbf{H}$$
    $$\mathbf{F} \wedge (\mathbf{G} \wedge \mathbf{H}) \equiv (\mathbf{F} \wedge \mathbf{G}) \wedge \mathbf{H}$$
  - Absorción:
    $$\mathbf{F} \wedge (\mathbf{F} \vee \mathbf{G}) \equiv \mathbf{F}$$
    $$\mathbf{F} \vee (\mathbf{F} \wedge \mathbf{G}) \equiv \mathbf{F}$$

Fórmulas equivalentes

- Dos fórmulas $\mathbf{F}$ y $\mathbf{G}$ son equivalentes ($\mathbf{F} \equiv \mathbf{G}$), si para toda interpretación $\mathbf{I}$ se tiene que $\mathbf{I(F) = I(G)}$.
- Equivalencias importantes:
  - Distributividad:
    $$\mathbf{F} \vee (\mathbf{G} \wedge \mathbf{H}) \equiv (\mathbf{F} \vee \mathbf{G}) \wedge (\mathbf{F} \vee \mathbf{H})$$
    $$\mathbf{F} \wedge (\mathbf{G} \vee \mathbf{H}) \equiv (\mathbf{F} \wedge \mathbf{G}) \vee (\mathbf{F} \wedge \mathbf{H})$$
  - Doble negación:
    $$\neg\neg\mathbf{F} \equiv \mathbf{F}$$
  - Leyes de De Morgan:
    $$\neg(\mathbf{F} \wedge \mathbf{G}) \equiv \neg\mathbf{F} \vee \neg\mathbf{G}$$
    $$\neg(\mathbf{F} \vee \mathbf{G}) \equiv \neg\mathbf{F} \wedge \neg\mathbf{G}$$
  - Leyes de tautologías. Si $\mathbf{F}$ es una tautología:
    $$\mathbf{F} \wedge \mathbf{G} \equiv \mathbf{G}$$
    $$\mathbf{F} \vee \mathbf{G} \equiv \mathbf{F}$$
  - Leyes de contradicciones. Si $\mathbf{F}$ es una contradicción:
    $$\mathbf{F} \wedge \mathbf{G} \equiv \mathbf{F}$$
    $$\mathbf{F} \vee \mathbf{G} \equiv \mathbf{G}$$

Propiedades de la equivalencia lógica

- La equivalencia lógica es una relación de equivalencia
  - Reflexividad: $\mathbf{F} \equiv \mathbf{F}$
  - Simetría: Si $\mathbf{F} \equiv \mathbf{G}$, entonces $\mathbf{G} \equiv \mathbf{F}$.
  - Transitividad: Si $\mathbf{F} \equiv \mathbf{G}$ y $\mathbf{G} \equiv \mathbf{H}$, entonces $\mathbf{F} \equiv \mathbf{H}$.
- Relación entre equivalencia y bicondicional

$$\mathbf{F} \equiv \mathbf{G} \text{ si y solo si } \models \mathbf{F} \leftrightarrow \mathbf{G}$$

- Principio de sustitución de fórmulas equivalentes: Si en una fórmula $\mathbf{F}$ se sustituye una subfórmula $\mathbf{G}$ por otra lógicamente equivalente $\mathbf{G'}$, entonces la fórmula obtenida $\mathbf{F'}$ es logicamente equivalente a la original.
  - $\mathbf{F} = \neg(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) \rightarrow \neg(\mathbf{p} \wedge \neg\neg\mathbf{r})$
  - $\mathbf{G} = \neg(\mathbf{p} \wedge \neg\neg\mathbf{r})$
  - $\mathbf{G'} = \neg\mathbf{p} \vee \neg\mathbf{r}$
  - $\mathbf{F'} = \neg(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) \rightarrow \neg\mathbf{p} \vee \neg\mathbf{r}$

Conjuntos de fórmulas

- Modelo de un conjunto de fórmulas:
  - Una interpretación $\mathbf{I}$ es modelo de un conjunto de fórmulas $\mathbf{S}$ ($\mathbf{I} \models \mathbf{S}$), si para toda $\mathbf{F} \in \mathbf{S}$ se tiene que $\mathbf{I} \models \mathbf{F}$.
- Sea $\mathbf{S} = \{\mathbf{F_1} = (\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \wedge (\neg \mathbf{q} \vee \mathbf{r}), \mathbf{F_2} = \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{r}\}$
  - La interpretación $\mathbf{I_1}$ tal que $\mathbf{I_1(p) = I_1(r) = 1}$ e $\mathbf{I_1(q) = 0}$ es modelo de $\mathbf{S}$.

$\mathbf{p}$	$\mathbf{q}$	$\mathbf{r}$	$\mathbf{p \vee q}$	$\mathbf{\neg q}$	$\mathbf{\neg q \vee r}$	$\mathbf{p \rightarrow r}$	$\mathbf{F_1}$	$\mathbf{F_2}$
1	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**

  - La interpretación $\mathbf{I_2}$ tal que $\mathbf{I_2(p) = I_2(q) = 0}$ e $\mathbf{I_2(r) = 1}$ no es modelo de $\mathbf{S}$.

$\mathbf{p}$	$\mathbf{q}$	$\mathbf{r}$	$\mathbf{p \vee q}$	$\mathbf{\neg q}$	$\mathbf{\neg q \vee r}$	$\mathbf{p \rightarrow r}$	$\mathbf{F_1}$	$\mathbf{F_2}$
0	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**

Consistencia y consecuencia lógica

- Un conjunto **S** es consistente, si tiene algún modelo.
  - El conjunto $\{(\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \wedge (\neg \mathbf{q} \vee \mathbf{r}), \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{r}\}$ es consistente.
- Un conjunto **S** es inconsistente, si no tiene ningún modelo.
  - El conjunto $\{\mathbf{p} \vee \mathbf{q}, \neg \mathbf{p} \vee \mathbf{q}, \mathbf{p} \vee \neg \mathbf{q}, \neg \mathbf{p} \vee \neg \mathbf{q}\}$ es inconsistente.
- Una fórmula **F** es consecuencia lógica de un conjunto de fórmulas **S** ($\mathbf{S} \models \mathbf{F}$) si todos los modelos de **S** son a su vez modelos de **F**.
  - $\{\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}, \mathbf{q} \rightarrow \mathbf{r}\} \models \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{r}$
  - $\{\mathbf{p}\} \not\models \mathbf{p} \wedge \mathbf{q}$

Propiedades de la consecuencia lógica

- Propiedades básicas de la relación de consecuencia lógica:
  - Reflexividad: $\mathbf{S} \models \mathbf{S}$.
  - Monotonía: Si $\mathbf{S_1} \models \mathbf{F}$ y $\mathbf{S_1} \subset \mathbf{S_2}$, entonces $\mathbf{S_2} \models \mathbf{F}$.
  - Transitividad: Si $\mathbf{S} \models \mathbf{F}$ y $\{\mathbf{F}\} \models \mathbf{G}$, entonces $\mathbf{S} \models \mathbf{G}$.
- Relación entre consecuencia, validez, satisfacibilidad y consistencia. Las siguientes condiciones son equivalentes:
  - $\{\mathbf{F_1}, \ldots, \mathbf{F_n}\} \models \mathbf{G}$.
  - $\models \mathbf{F_1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{F_n} \rightarrow \mathbf{G}$.
  - $\neg(\mathbf{F_1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{F_n} \rightarrow \mathbf{G})$ es insatisfacible.
  - $\{\mathbf{F_1}, \ldots, \mathbf{F_n}, \neg\mathbf{G}\}$ es inconsistente.

Cálculos lógicos

- Un cálculo lógico ($\vdash$) es un procedimiento de decisión que permite comprobar la validez de una fórmula.
  - También permiten comprobar la satisfacibilidad, la consistencia y la consecuencia lógica.
- La combinación exhaustiva de todos los valores de verdad de las variables proposicionales y el cálculo del valor de verdad mediante las tablas de verdad es un ejemplo de cálculo lógico.
- Otros cálculos lógicos: tableros semánticos, secuentes, deducción natural, resolución, ...

Propiedades de los cálculos lógicos

- Un cálculo lógico es correcto ($\vdash \Longrightarrow \models$), si toda fórmula que se puede demostrar que es válida con el cálculo lógico, es válida en la lógica.
  - Todo cálculo lógico debería cumplir esta propiedad.
- Un cálculo lógico es completo ($\models \Longrightarrow \vdash$), si para toda fórmula válida en la lógica, se puede demostrar su validez utilizando únicamente el cálculo lógico.
- Existen cálculos lógicos para la lógica proposicional que son correctos y completos.
  - Los cálculos lógicos mencionados para la lógica proposicional son correctos y completos: tablas de verdad, tableros semánticos, secuentes, deducción natural, resolución, ...
- La lógica proposicional es decidible: existen procedimientos capaces de decidir si una fórmula es válida o no, en un número finito de pasos.

Lógica de primer orden

Limitación expresiva de la lógica proposicional

- Si Sevilla es vecina de Cádiz, entonces Cádiz es vecina de Sevilla. Sevilla es vecina de Cádiz. Por tanto Cádiz es vecina de Sevilla.
  - Formalización en lógica proposicional: $\{\mathbf{SvC} \rightarrow \mathbf{CvS}, \mathbf{SvC}\} \models \mathbf{CvS}$
- Si una provincia es vecina de otra, entonces la segunda es vecina de la primera. Sevilla es vecina de Cádiz. Por tanto Cádiz es vecina de Sevilla.
  - Formalización en lógica proposicional: Imposible
  - Es necesario poder hacer referencia a individuos genéricos caracterizados por funciones.
    - *Ser una provincia*
    - *Ser vecinas*

Lenguaje de primer orden

- Símbolos lógicos
  - Variables: $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$, $\ldots$, $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$, $\ldots$
  - Conectivas lógicas: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$
  - Cuantificadores:
    - Cuantificador universal: $\forall$
    - Cuantificador existencial: $\exists$
- Símbolos propios
  - Constantes de individuos: $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\ldots$, $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$, $\ldots$
  - Predicados (con aridad): $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\ldots$, $\mathbf{P_1}$, $\mathbf{P_2}$, $\ldots$
  - Funciones (con aridad): $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$, $\mathbf{h}$, $\ldots$, $\mathbf{f_1}$, $\mathbf{f_2}$, $\ldots$
- Símbolos auxiliares: $\mathbf{(}$, $\mathbf{)}$, $\mathbf{,}$

Lenguaje de primer orden

- Notación:
  - Lenguajes de primer orden: $\mathbf{L}$, $\mathbf{L_1}$, ...
  - Conjunto de las variables: **Var**
- Observaciones:
  - Un lenguaje de primer orden se describe con sus constantes, predicados y funciones propias. Los símbolos lógicos siempre están presentes en el lenguaje.
  - Los símbolos de predicado de aridad 1 (un argumento) se llaman propiedades.
  - Los símbolos de predicado de aridad mayor que 1 (dos o más argumentos) se llaman relaciones.
  - La mayoría de los lenguajes de primer orden incluyen el predicado de igualdad ($=$).

Lenguaje de primer orden

- Lenguaje de la vecindad entre provincias:
  - Símbolos de constantes: $\{\mathbf{Sevilla}, \mathbf{Cadiz}\}$
  - Símbolos de predicado: $\{\mathbf{provincia}, \mathbf{vecinas}\}$
  - Símbolos de función: $\{\}$
- Lenguaje de la aritmética natural:
  - Símbolos de constantes: $\{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \ldots\}$
  - Símbolos de predicado: $\{<, \leq, =, \ldots\}$
  - Símbolos de función: $\{+, -, *\}$

Términos

- Términos en un lenguaje de primer orden **L**:
  - Las variables son términos de **L**.
  - Las constantes de **L** son términos de **L**.
  - Si **f** es un símbolo de función de **L** de aridad **n** (o **n**-aria) y $\mathbf{t_1}, \ldots, \mathbf{t_n}$ son términos de **L**, entonces $\mathbf{f(t_1, \ldots, t_n)}$ es un término de **L**.
- Notación:
  - Términos de un lenguaje de primer orden: **t**, **s**, ..., $\mathbf{t_1}$, $\mathbf{t_2}$, ...
  - Conjunto de términos del lenguaje **L**: **Term(L)**
- Ejemplos:
  - En el lenguaje de la vecindad entre provincias: **Sevilla**, **Cadiz**.
  - En el lenguaje de la aritmética: $\mathbf{+(*(x, 1), y)}$ (o $\mathbf{(x * 1) + y}$).

Fórmulas atómicas

- Fórmulas atómicas en un lenguaje de primer orden **L**:
  - Si **P** es un símbolo de predicado **n**-ario y $\mathbf{t_1}, \ldots, \mathbf{t_n}$ son términos del lenguaje **L**, entonces $\mathbf{P(t_1, \ldots, t_n)}$ es una fórmula atómica.
- Notación:
  - Fórmulas atómicas de un lenguaje de primer orden: **A**, **B**, ..., $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$, ...
  - Conjunto de fórmulas atómicas del lenguaje **L**: **Atom(L)**
- Ejemplos:
  - En el lenguaje de la vecindad entre provincias: **provincia(x)**, **vecinas(Cadiz, y)**.
  - En el lenguaje de la aritmética: $<\mathbf{(x, *(2, s(x)))}$ (o $\mathbf{x < 2 * s(x)}$).

Fórmulas

- Fórmulas en un lenguaje de primer orden **L**:
  - Las fórmulas atómicas de **L** son fórmulas en **L**.
  - Si **F** y **G** son fórmulas en **L**, entonces $(\neg \mathbf{F})$, $(\mathbf{F} \wedge \mathbf{G})$, $(\mathbf{F} \vee \mathbf{G})$, $(\mathbf{F} \rightarrow \mathbf{G})$ y $(\mathbf{F} \leftrightarrow \mathbf{G})$ son fórmulas en **L**.
  - Si **F** es una fórmula en **L**, entonces $(\forall \mathbf{x}\ \mathbf{F})$ y $(\exists \mathbf{x}\ \mathbf{F})$ son fórmulas en **F**.
- Notación:
  - Fórmulas en un lenguaje de primer orden: $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$, ..., $\mathbf{F_1}$, $\mathbf{F_2}$, ...
  - Conjunto de las fórmulas del lenguaje **L**: **Form(L)**
  - Se siguen los mismo criterios para eliminar paréntesis que en la lógica proposicional, con $\forall$ y $\exists$ con la mayor precedencia.
- Ejemplos:
  - En el lenguaje de la vecindad entre provincias: $\forall \mathbf{x}$ **provincia(x)** $\forall \mathbf{x}\ (\exists \mathbf{y}$ **vecinas(x, y))**.
  - En el lenguaje de la aritmética: $\exists \mathbf{x}\ (\forall \mathbf{y}\ \leq (\mathbf{x}, \mathbf{y}))$.

Variables

- Conjunto de variables de un término:

$$\mathbf{V(t)} = \begin{cases} \emptyset & \text{si } \mathbf{t} \text{ es una constante} \\ \{\mathbf{x}\} & \text{si } \mathbf{t} \text{ es la variable } \mathbf{x} \\ \mathbf{V(t_1)} \cup \ldots \cup \mathbf{V(t_n)} & \text{si } \mathbf{t} \text{ es } \mathbf{f(t_1, \ldots, t_n)} \end{cases}$$

- Conjunto de variables de una fórmula:

$$\mathbf{V(F)} = \begin{cases} \mathbf{V(t_1)} \cup \ldots \cup \mathbf{V(t_n)} & \text{si } \mathbf{F} \text{ es } \mathbf{P(t_1, \ldots, t_n)} \\ \mathbf{V(G)} & \text{si } \mathbf{F} \text{ es } \neg\mathbf{G} \\ \mathbf{V(G)} \cup \mathbf{V(H)} & \text{si } \mathbf{F} \text{ es } \mathbf{G} * \mathbf{H} \\ \mathbf{V(G)} & \text{si } \mathbf{F} \text{ es } \forall\mathbf{x}\ \mathbf{G} \\ \mathbf{V(G)} & \text{si } \mathbf{F} \text{ es } \exists\mathbf{x}\ \mathbf{G} \end{cases}$$

  Donde $*$ es una conectiva binaria.

- Ejemplos
  - El conjunto de variables de $\forall\mathbf{x}\ (\mathbf{R(x)} \rightarrow \mathbf{P(y)})$ es $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$
  - El conjunto de variables de $\forall\mathbf{x}\ (\mathbf{R(a)} \rightarrow \mathbf{P(y)})$ es $\{\mathbf{y}\}$

Variables

- Apariciones libres y ligadas en una fórmula:
  - Una aparición de una variable **x** es ligada si ocurre en una subfórmula de de la forma $\forall \mathbf{x}\ \mathbf{G}$ o $\exists \mathbf{x}\ \mathbf{G}$.
  - Una aparición de una variable **x** es libre si no es ligada.
- Ejemplos:
  - $\forall \mathbf{x}\ (\mathbf{P}(\underline{\mathbf{x}}) \rightarrow \mathbf{R}(\underline{\mathbf{x}}, \mathbf{y})) \rightarrow (\exists \mathbf{y}\ \mathbf{P}(\underline{\mathbf{y}}) \rightarrow \mathbf{R}(\mathbf{y}, \mathbf{x}))$
  - $\exists \mathbf{x}\ \mathbf{R}(\underline{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) \vee \exists \mathbf{y}\ \mathbf{P}(\underline{\mathbf{y}})$
  - $\forall \mathbf{x}\ (\mathbf{P}(\underline{\mathbf{x}}) \rightarrow \exists \mathbf{y}\ \mathbf{R}(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}}))$
  - $\forall \mathbf{z}\ (\mathbf{P}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{R}(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$

Variables

- Variables libres y ligadas en una fórmula:
  - Una variable **x** es libre si tiene una aparición libre.
  - Una variable **x** es ligada si tiene una aparición ligada.
  - Conjunto de las variables libres de una fórmula **F** es:

$$\mathbf{VL(F)} = \begin{cases} \mathbf{V(t_1)} \cup \ldots \cup \mathbf{V(t_n)} & \text{si } \mathbf{F} \text{ es } \mathbf{P(t_1, \ldots, t_n)} \\ \mathbf{VL(G)} & \text{si } \mathbf{F} \text{ es } \neg\mathbf{G} \\ \mathbf{VL(G)} \cup \mathbf{VL(H)} & \text{si } \mathbf{F} \text{ es } \mathbf{G} * \mathbf{H} \\ \mathbf{VL(G)} - \{\mathbf{x}\} & \text{si } \mathbf{F} \text{ es } \forall\mathbf{x}\ \mathbf{G} \\ \mathbf{VL(G)} - \{\mathbf{x}\} & \text{si } \mathbf{F} \text{ es } \exists\mathbf{x}\ \mathbf{G} \end{cases}$$

  Donde $*$ es una conectiva binaria.

- Ejemplos:

	V.Ligadas	V.Libres
$\forall x\ (P(x) \rightarrow R(x,y)) \rightarrow (\exists y\ P(y) \rightarrow R(y,x))$	$\{x, y\}$	$\{x, y\}$
$\forall x\ (P(x) \rightarrow \exists y\ R(x,y))$	$\{x, y\}$	
$\forall z\ (P(x) \rightarrow R(x,y))$		$\{x, y\}$

Fórmulas cerradas y abiertas

- Una fórmula cerrada (o sentencia) es una fórmula sin variables libres.
- Una fórmula abierta es una fórmula con variables libres.
- Ejemplos
  - $\forall \mathbf{x}\ (\mathbf{P(x)} \rightarrow \exists \mathbf{y}\ \mathbf{R(x,y)})$ es una fórmula cerrada.
  - $\exists \mathbf{x}\ \mathbf{R(x,y)} \vee \forall \mathbf{y}\ \mathbf{P(y)}$ es una fórmula abierta.

Estructuras

- Una estructura del lenguaje de primer orden $\mathbf{L}$ es un par $\mathcal{I} = (\mathbf{U}, \mathbf{I})$ tal que:
  - $\mathbf{U}$ es un conjunto no vacío, denominado universo de la estructura.
  - $\mathbf{I}$ es una función cuyo dominio es el conjunto de los símbolos propios del lenguaje $\mathbf{L}$ tal que:
    - Si $\mathbf{c}$ es una constante en $\mathbf{L}$, entonces $\mathbf{I(c)} \in \mathbf{U}$.
    - Si $\mathbf{f}$ es un símbolo de función $\mathbf{n}$-ario en $\mathbf{L}$, entonces $\mathbf{I(f)}$ es una función de $\mathbf{U^n}$ en $\mathbf{U}$.
    - Si $\mathbf{P}$ es un símbolo de predicado $\mathbf{0}$-ario en $\mathbf{L}$, entonces $\mathbf{I(P)} \in \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$.
    - Si $\mathbf{P}$ es un símbolo de predicado $\mathbf{n}$-ario en $\mathbf{L}$ con $\mathbf{n} > \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{I(P)}$ es un subconjunto de $\mathbf{U^n}$.
- Una estructura proporciona una interpretación $\mathbf{I}$ de los símbolos propios de un lenguaje $\mathbf{L}$ en un conjunto de individuos $\mathbf{U}$.

Estructuras

- Sea $\mathbf{L}$ el lenguaje con los siguientes símbolos propios:
  - Una constante: $\mathbf{0}$
  - Un símbolo de función monaria: $\mathbf{s}$.
  - Un símbolo de función binaria: $\odot$.
  - Un símbolo de relación binaria: $\prec$.
- Primera estructura para $\mathbf{L}$: $\mathbf{U_1} = \mathbb{N}$
  - $\mathbf{I_1(0) = 0}$
  - $\mathbf{I_1(s) = \{n \Longrightarrow n + 1 : n \in \mathbb{N}\}}$
  - $\mathbf{I_1(\odot) = \{(n, m) \Longrightarrow n + m : n, m \in \mathbb{N}\}}$
  - $\mathbf{I_1(\prec) = \{(n, m) : n, m \in \mathbb{N}; n \leq m\}}$
- Segunda estructura para $\mathbf{L}$: $\mathbf{U_2 = [01]^*}$ (cadenas de $\mathbf{0}$ y $\mathbf{1}$)
  - $\mathbf{I_2(0) = \epsilon}$
  - $\mathbf{I_2(s) = \{w \Longrightarrow w1 : w \in [01]^*\}}$
  - $\mathbf{I_2(\odot) = \{(w_1, w_2) \Longrightarrow w_1 w_2 : w_1, w_2 \in [01]^*\}}$
  - $\mathbf{I_2(\prec) = \{(w_1, w_2) : w_1, w_2 \in [01]^*; w_1}$ es prefijo de $\mathbf{w_2\}}$

Asignaciones e Interpretaciones

- Una asignación **A** en una estructura $\mathcal{I} = \mathbf{(U, I)}$ para un lenguaje **L** es función del conjunto de las variables **Var** en el universo de la estructura **U**.
  - Una asignación hace corresponder a cada variable un individo del universo de la estructura.
- Una interpretación de un lenguaje **L** es un par $\mathbf{(\mathcal{I}, A)}$ formado por una estructura $\mathcal{I}$ de **L** y una asignación **A** en $\mathcal{I}$.

Evaluación de términos

- Dada una estructura $\mathcal{I} = (\mathbf{U}, \mathbf{I})$ del lenguaje $\mathbf{L}$ y una asignación $\mathbf{A}$ en $\mathcal{I}$, la función de evaluación de términos $\mathcal{I}_{\mathbf{A}}$ es:

$$\mathcal{I}_{\mathbf{A}}(\mathbf{t}) = \begin{cases} \mathbf{I(c)} & \text{si } \mathbf{t} \text{ es la constante } \mathbf{c} \\ \mathbf{A(x)} & \text{si } \mathbf{t} \text{ es la variable } \mathbf{x} \\ \mathbf{I(f)}(\mathcal{I}_{\mathbf{A}}(\mathbf{t_1}), \ldots, \mathcal{I}_{\mathbf{A}}(\mathbf{t_n})) & \text{si } \mathbf{t} \text{ es } \mathbf{f(t_1, \ldots, t_n)} \end{cases}$$

- $\mathcal{I}_{\mathbf{A}}(\mathbf{t})$ es el valor de $\mathbf{t}$ en $\mathcal{I}$ respecto de $\mathbf{A}$.

Evaluación de términos

- Consideramos el lenguaje $\mathbf{L} = \{\mathbf{0}, \mathbf{s}, \odot, \prec\}$ y el término $\mathbf{t} = \mathbf{s(x \odot s(0))}$.
- En la estructura $\mathcal{I}^1 = (\mathbb{N}, \mathbf{I_1})$ con $\mathbf{A(x) = 3}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}^1{}_{\mathbf{A}}(\mathbf{t}) &= \mathcal{I}^1{}_{\mathbf{A}}(\mathbf{s(x \odot s(0))}) \\
&= \mathbf{I_1(s)(I_1(\odot)(A(x), I_1(s)(I_1(0))))} \\
&= \mathbf{+^1(3 + +^1(0))} \\
&= \mathbf{5}
\end{aligned}$$

- En la estructura $\mathcal{I}^2 = (\mathbf{[01]^*}, \mathbf{I_2})$ con $\mathbf{A(x) = 10}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}^2{}_{\mathbf{A}}(\mathbf{t}) &= \mathcal{I}^2{}_{\mathbf{A}}(\mathbf{s(x \odot s(0))}) \\
&= \mathbf{I_2(s)(I_2(\odot)(A(x), I_2(s)(I_2(0))))} \\
&= \mathbf{@^1(10 \ @ \ @^1(\epsilon))} \\
&= \mathbf{1011}
\end{aligned}$$

Evaluación de fórmulas

- Dada una estructura $\mathcal{I} = (\mathbf{U}, \mathbf{I})$ del lenguaje $\mathbf{L}$ y una asignación $\mathbf{A}$ en $\mathcal{I}$, la función de evaluación de fórmulas $\mathcal{I}_{\mathbf{A}}$ es:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I}_{\mathbf{A}}(\mathbf{P}(\mathbf{t_1}, \ldots, \mathbf{t_n})) &= \mathbf{H}_{\mathbf{I(P)}}(\mathcal{I}_{\mathbf{A}}(\mathbf{t_1}), \ldots, \mathcal{I}_{\mathbf{A}}(\mathbf{t_n})) \\
\mathcal{I}_{\mathbf{A}}(\neg \mathbf{G}) &= \mathbf{H}_{\neg}(\mathcal{I}_{\mathbf{A}}(\mathbf{G})) \\
\mathcal{I}_{\mathbf{A}}(\mathbf{G} * \mathbf{H}) &= \mathbf{H}_{*}(\mathcal{I}_{\mathbf{A}}(\mathbf{G}), \mathcal{I}_{\mathbf{A}}(\mathbf{H})) \\
\mathcal{I}_{\mathbf{A}}(\forall \mathbf{x}\ \mathbf{G}) &= \begin{cases} \mathbf{1} & \text{si para todo } \mathbf{u} \in \mathbf{U} \\ & \text{se tiene } \mathcal{I}_{\mathbf{A[x/u]}}(\mathbf{G}) = \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \text{en caso contrario} \end{cases} \\
\mathcal{I}_{\mathbf{A}}(\exists \mathbf{x}\ \mathbf{G}) &= \begin{cases} \mathbf{1} & \text{si existe un } \mathbf{u} \in \mathbf{U} \\ & \text{tal que } \mathcal{I}_{\mathbf{A[x/u]}}(\mathbf{G}) = \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \text{en caso contrario} \end{cases}
\end{aligned}
$$

  Donde $*$ es una conectiva binaria.

- $\mathcal{I}_{\mathbf{A}}(\mathbf{F})$ es el valor de $\mathbf{F}$ en $\mathcal{I}$ respecto de $\mathbf{A}$.

Evaluación de fórmulas

- Si **R** es un subconjunto de $\mathbf{U^n}$, entonces la función de verdad de **R** es:

$$\mathbf{H_R(u_1, \ldots, u_n)} = \begin{cases} \mathbf{1} & \text{si } \mathbf{(u_1, \ldots, u_n)} \in \mathbf{R} \\ \mathbf{0} & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

- Si **A** es una asignación en la estructura **(U, I)**, $\mathbf{x} \in \mathbf{Var}$ y $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$, entonces la variante de la asignación **A** para **x** igual a **u** es:

$$\mathbf{A[x/u](y)} = \begin{cases} \mathbf{u} & \text{si } \mathbf{y} \text{ es la variable } \mathbf{x} \\ \mathbf{A(y)} & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Evaluación de fórmulas

- Evaluación de $\forall \mathbf{x}\ \exists \mathbf{y}\ \mathbf{P(x,y)}$ en la estructura $\mathcal{I} = \mathbf{(U, I)}$ tal que $\mathbf{U} = \{1, 2\}$ e $\mathbf{I(P)} = \{(1,1), (2,2)\}$:

$$\mathcal{I}_{\mathbf{A}}(\forall \mathbf{x}\ \exists \mathbf{y}\ \mathbf{P(x,y)}) = \begin{cases} \mathbf{1} & \text{si } \mathcal{I}_{\mathbf{A[x/1]}}(\exists \mathbf{y}\ \mathbf{P(x,y)}) = \mathbf{1} \\ & \text{y } \mathcal{I}_{\mathbf{A[x/2]}}(\exists \mathbf{y}\ \mathbf{P(x,y)}) = \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$\mathcal{I}_{\mathbf{A[x/1]}}(\exists \mathbf{y}\ \mathbf{P(x,y)}) = \begin{cases} \mathbf{1} & \text{si } \mathcal{I}_{\mathbf{A[y/1,x/1]}}(\mathbf{P(x,y)}) = \mathbf{1}\ \checkmark \\ & \text{o } \mathcal{I}_{\mathbf{A[y/2,x/1]}}(\mathbf{P(x,y)}) = \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{\mathbf{A[y/1,x/1]}}(\mathbf{P(x,y)}) &= \mathbf{H_{I(P)}}(\mathcal{I}_{\mathbf{A[y/1,x/1]}}(\mathbf{x}), \mathcal{I}_{\mathbf{A[y/1,x/1]}}(\mathbf{y})) \\ &= \mathbf{H_{I(P)}}(\mathbf{A[y/1,x/1](x)}, \mathbf{A[y/1,x/1](y)}) \\ &= \mathbf{H_{I(P)}}(\mathbf{1,1}) \\ &= \mathbf{1} \text{ pues } \mathbf{(1,1)} \in \mathbf{I(P)} \end{aligned}$$

Por tanto $\mathcal{I}_{\mathbf{A[x/1]}}(\exists \mathbf{y}\ \mathbf{P(x,y)}) = \mathbf{1}$.

Evaluación de fórmulas

- Evaluación de $\forall \mathbf{x}\ \exists \mathbf{y}\ \mathbf{P(x,y)}$ en la estructura $\mathcal{I} = \mathbf{(U, I)}$ tal que $\mathbf{U} = \{1, 2\}$ e $\mathbf{I(P)} = \{(1,1), (2,2)\}$:

$$\mathcal{I}_{\mathbf{A}}(\forall \mathbf{x}\ \exists \mathbf{y}\ \mathbf{P(x,y)}) = \begin{cases} \mathbf{1} & \text{si } \mathcal{I}_{\mathbf{A[x/1]}}(\exists \mathbf{y}\ \mathbf{P(x,y)}) = 1 \checkmark \\ & \text{y } \mathcal{I}_{\mathbf{A[x/2]}}(\exists \mathbf{y}\ \mathbf{P(x,y)}) = 1 \\ \mathbf{0} & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$\mathcal{I}_{\mathbf{A[x/2]}}(\exists \mathbf{y}\ \mathbf{P(x,y)}) = \begin{cases} \mathbf{1} & \text{si } \mathcal{I}_{\mathbf{A[y/1,x/2]}}(\mathbf{P(x,y)}) = 1 \boldsymbol{\times} \\ & \text{o } \mathcal{I}_{\mathbf{A[y/2,x/2]}}(\mathbf{P(x,y)}) = 1 \\ \mathbf{0} & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{\mathbf{A[y/1,x/2]}}(\mathbf{P(x,y)}) &= \mathbf{H_{I(P)}}(\mathcal{I}_{\mathbf{A[y/1,x/2]}}(\mathbf{x}), \mathcal{I}_{\mathbf{A[y/1,x/2]}}(\mathbf{y})) \\ &= \mathbf{H_{I(P)}}(\mathbf{A[y/1,x/2](x)}, \mathbf{A[y/1,x/2](y)}) \\ &= \mathbf{H_{I(P)}}(2,1) \\ &= \mathbf{0} \text{ pues } (2,1) \notin \mathbf{I(P)} \end{aligned}$$

Evaluación de fórmulas

- Evaluación de $\forall \mathbf{x}\ \exists \mathbf{y}\ \mathbf{P(x,y)}$ en la estructura $\mathcal{I} = \mathbf{(U, I)}$ tal que $\mathbf{U} = \{1, 2\}$ e $\mathbf{I(P)} = \{(1,1), (2,2)\}$:

$$\mathcal{I}_{\mathbf{A}}(\forall \mathbf{x}\ \exists \mathbf{y}\ \mathbf{P(x,y)}) = \begin{cases} \mathbf{1} & \text{si } \mathcal{I}_{\mathbf{A[x/1]}}(\exists \mathbf{y}\ \mathbf{P(x,y)}) = 1 \checkmark \\ & \text{y } \mathcal{I}_{\mathbf{A[x/2]}}(\exists \mathbf{y}\ \mathbf{P(x,y)}) = 1 \\ \mathbf{0} & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$\mathcal{I}_{\mathbf{A[x/2]}}(\exists \mathbf{y}\ \mathbf{P(x,y)}) = \begin{cases} \mathbf{1} & \text{si } \mathcal{I}_{\mathbf{A[y/1,x/2]}}(\mathbf{P(x,y)}) = 1 \boldsymbol{\times} \\ & \text{o } \mathcal{I}_{\mathbf{A[y/2,x/2]}}(\mathbf{P(x,y)}) = 1 \checkmark \\ \mathbf{0} & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{\mathbf{A[y/2,x/2]}}(\mathbf{P(x,y)}) &= \mathbf{H_{I(P)}}(\mathcal{I}_{\mathbf{A[y/2,x/2]}}(\mathbf{x}), \mathcal{I}_{\mathbf{A[y/2,x/2]}}(\mathbf{y})) \\ &= \mathbf{H_{I(P)}}(\mathbf{A[y/2,x/2](x)}, \mathbf{A[y/2,x/2](y)}) \\ &= \mathbf{H_{I(P)}}(2,2) \\ &= 1 \text{ pues } (2,2) \in \mathbf{I(P)} \end{aligned}$$

Por tanto $\mathcal{I}_{\mathbf{A[x/2]}}(\exists \mathbf{y}\ \mathbf{P(x,y)}) = 1$.

Evaluación de fórmulas

- Evaluación de $\forall \mathbf{x}\ \exists \mathbf{y}\ \mathbf{P(x,y)}$ en la estructura $\mathcal{I} = \mathbf{(U, I)}$ tal que $\mathbf{U} = \{1, 2\}$ e $\mathbf{I(P)} = \{(1,1), (2,2)\}$:

$$\mathcal{I}_{\mathbf{A}}(\forall \mathbf{x}\ \exists \mathbf{y}\ \mathbf{P(x,y)}) = \begin{cases} \mathbf{1} & \text{si } \mathcal{I}_{\mathbf{A[x/1]}}(\exists \mathbf{y}\ \mathbf{P(x,y)}) = 1 \checkmark \\ & \text{y } \mathcal{I}_{\mathbf{A[x/2]}}(\exists \mathbf{y}\ \mathbf{P(x,y)}) = 1 \checkmark \\ \mathbf{0} & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Por tanto $\mathcal{I}(\forall \mathbf{x}\ \exists \mathbf{y}\ \mathbf{P(x,y)}) = \mathbf{1}$.

Evaluación de fórmulas

- Evaluación de $\forall \mathbf{x}\ (\mathbf{g}(\mathbf{g}(\mathbf{x})) = \mathbf{x})$ en la estructura $\mathcal{I} = (\mathbf{U}, \mathbf{I})$ tal que $\mathbf{U} = \{1, 2\}$ e $\mathbf{I}(\mathbf{g}) = \{1 \Longrightarrow 2, 2 \Longrightarrow 1\}$:

$$\mathcal{I}_{\mathbf{A}}(\forall \mathbf{x}\ (\mathbf{g}(\mathbf{g}(\mathbf{x})) = \mathbf{x})) = \begin{cases} \mathbf{1} & \text{si } \mathcal{I}_{\mathbf{A}[\mathbf{x}/1]}(\mathbf{g}(\mathbf{g}(\mathbf{x})) = \mathbf{x}) = 1 \\ & \text{y } \mathcal{I}_{\mathbf{A}[\mathbf{x}/2]}(\mathbf{g}(\mathbf{g}(\mathbf{x})) = \mathbf{x}) = 1 \\ \mathbf{0} & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{\mathbf{A}[\mathbf{x}/1]}(\mathbf{g}(\mathbf{g}(\mathbf{x})) = \mathbf{x}) &= \mathbf{H}_{=}(\mathcal{I}_{\mathbf{A}[\mathbf{x}/1]}(\mathbf{g}(\mathbf{g}(\mathbf{x}))), \mathcal{I}_{\mathbf{A}[\mathbf{x}/1]}(\mathbf{x})) \\ &= \mathbf{H}_{=}(\mathbf{I}(\mathbf{g})(\mathcal{I}_{\mathbf{A}[\mathbf{x}/1]}(\mathbf{g}(\mathbf{x}))), 1) \\ &= \mathbf{H}_{=}(\mathbf{I}(\mathbf{g})(\mathbf{I}(\mathbf{g})(\mathcal{I}_{\mathbf{A}[\mathbf{x}/1]}(\mathbf{x}))), 1) \\ &= \mathbf{H}_{=}(\mathbf{I}(\mathbf{g})(\mathbf{I}(\mathbf{g})(1)), 1) \\ &= \mathbf{H}_{=}(\mathbf{I}(\mathbf{g})(2), 1) \\ &= \mathbf{H}_{=}(1, 1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Evaluación de fórmulas

- Evaluación de $\forall \mathbf{x}\ (\mathbf{g}(\mathbf{g}(\mathbf{x})) = \mathbf{x})$ en la estructura $\mathcal{I} = (\mathbf{U}, \mathbf{I})$ tal que $\mathbf{U} = \{1, 2\}$ e $\mathbf{I}(\mathbf{g}) = \{1 \Longrightarrow 2, 2 \Longrightarrow 1\}$:

$$\mathcal{I}_{\mathbf{A}}(\forall \mathbf{x}\ (\mathbf{g}(\mathbf{g}(\mathbf{x})) = \mathbf{x})) = \begin{cases} \mathbf{1} & \text{si } \mathcal{I}_{\mathbf{A}[\mathbf{x}/1]}(\mathbf{g}(\mathbf{g}(\mathbf{x})) = \mathbf{x}) = 1 \checkmark \\ & \text{y } \mathcal{I}_{\mathbf{A}[\mathbf{x}/2]}(\mathbf{g}(\mathbf{g}(\mathbf{x})) = \mathbf{x}) = 1 \\ \mathbf{0} & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{\mathbf{A}[\mathbf{x}/2]}(\mathbf{g}(\mathbf{g}(\mathbf{x})) = \mathbf{x}) &= \mathbf{H}_{=}(\mathcal{I}_{\mathbf{A}[\mathbf{x}/2]}(\mathbf{g}(\mathbf{g}(\mathbf{x}))), \mathcal{I}_{\mathbf{A}[\mathbf{x}/2]}(\mathbf{x})) \\ &= \mathbf{H}_{=}(\mathbf{I}(\mathbf{g})(\mathcal{I}_{\mathbf{A}[\mathbf{x}/2]}(\mathbf{g}(\mathbf{x}))), 2) \\ &= \mathbf{H}_{=}(\mathbf{I}(\mathbf{g})(\mathbf{I}(\mathbf{g})(\mathcal{I}_{\mathbf{A}[\mathbf{x}/2]}(\mathbf{x}))), 2) \\ &= \mathbf{H}_{=}(\mathbf{I}(\mathbf{g})(\mathbf{I}(\mathbf{g})(2)), 2) \\ &= \mathbf{H}_{=}(\mathbf{I}(\mathbf{g})(1), 2) \\ &= \mathbf{H}_{=}(2, 2) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Evaluación de fórmulas

- Evaluación de $\forall \mathbf{x}\ (\mathbf{g}(\mathbf{g}(\mathbf{x})) = \mathbf{x})$ en la estructura $\mathcal{I} = (\mathbf{U}, \mathbf{I})$ tal que $\mathbf{U} = \{1, 2\}$ e $\mathbf{I}(\mathbf{g}) = \{1 \Longrightarrow 2, 2 \Longrightarrow 1\}$:

$$\mathcal{I}_{\mathbf{A}}(\forall \mathbf{x}\ (\mathbf{g}(\mathbf{g}(\mathbf{x})) = \mathbf{x})) = \begin{cases} \mathbf{1} & \text{si } \mathcal{I}_{\mathbf{A[x/1]}}(\mathbf{g}(\mathbf{g}(\mathbf{x})) = \mathbf{x}) = \mathbf{1} \checkmark \\ & \text{y } \mathcal{I}_{\mathbf{A[x/2]}}(\mathbf{g}(\mathbf{g}(\mathbf{x})) = \mathbf{x}) = \mathbf{1} \checkmark \\ \mathbf{0} & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

  Por tanto $\mathcal{I}_{\mathbf{A}}(\forall \mathbf{x}\ (\mathbf{g}(\mathbf{g}(\mathbf{x})) = \mathbf{x})) = \mathbf{1}$.

Evaluación de fórmulas

- Dependencia del Universo.
  Sea $\mathbf{F} = \forall \mathbf{x}\ \exists \mathbf{y}\ \mathbf{R(x, y)}$, entonces:
  - $\mathcal{I}_{\mathbf{A}}(\mathbf{F}) = \mathbf{1}$ con $\mathcal{I} = (\mathbb{Z}, \mathbf{I})$, $\mathbf{I(R)} = >$ y $\mathbf{A}$ una asignación.
  - $\mathcal{I}_{\mathbf{A}}(\mathbf{F}) = \mathbf{0}$ con $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, \mathbf{I})$, $\mathbf{I(R)} = >$ y $\mathbf{A}$ una asignación.
- Dependencia de la Estructura.
  Sea $\mathbf{F} = \exists \mathbf{x}\ \forall \mathbf{y}\ \mathbf{R(x, y)}$, entonces:
  - $\mathcal{I}_{\mathbf{A}}(\mathbf{F}) = \mathbf{1}$ con $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, \mathbf{I})$, $\mathbf{I(R)} = \leq$ y $\mathbf{A}$ una asignación.
  - $\mathcal{I}_{\mathbf{A}}(\mathbf{F}) = \mathbf{0}$ con $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, \mathbf{I})$, $\mathbf{I(R)} = \geq$ y $\mathbf{A}$ una asignación.
- Dependencia de la Asignación.
  Sea $\mathbf{F} = \forall \mathbf{y}\ \mathbf{R(x, y)}$, entonces:
  - $\mathcal{I}_{\mathbf{A}}(\mathbf{F}) = \mathbf{1}$ con $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, \mathbf{I})$, $\mathbf{I(R)} = \leq$ y $\mathbf{A}$ una asignación en $\mathcal{I}$ tal que $\mathbf{A(x)} = \mathbf{0}$.
  - $\mathcal{I}_{\mathbf{A}}(\mathbf{F}) = \mathbf{0}$ con $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, \mathbf{I})$, $\mathbf{I(R)} = \leq$ y $\mathbf{A}$ una asignación en $\mathcal{I}$ tal que $\mathbf{A(x)} = \mathbf{1}$.

Evaluación de fórmulas

- Sea $\mathbf{t}$ un término de $\mathbf{L}$ e $\mathcal{I}$ una estructura de $\mathbf{L}$:
  - Si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son dos asignaciones en $\mathcal{I}$ que coinciden sobre las variables de $\mathbf{t}$, entonces $\mathcal{I}_{\mathbf{A}}(\mathbf{t}) = \mathcal{I}_{\mathbf{B}}(\mathbf{t})$.
  - Si $\mathbf{t}$ no tiene variables, entonces $\mathcal{I}_{\mathbf{A}}(\mathbf{t}) = \mathcal{I}_{\mathbf{B}}(\mathbf{t})$ para cualesquiera asignaciones $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ en $\mathcal{I}$.
- Sea $\mathbf{F}$ una fórmula de $\mathbf{L}$ e $\mathcal{I}$ una estructura de $\mathbf{L}$:
  - Si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son dos asignaciones en $\mathcal{I}$ que coinciden sobre las variables libres de $\mathbf{F}$, entonces $\mathcal{I}_{\mathbf{A}}(\mathbf{F}) = \mathcal{I}_{\mathbf{B}}(\mathbf{F})$.
  - Si $\mathbf{F}$ es cerrada, entonces $\mathcal{I}_{\mathbf{A}}(\mathbf{F}) = \mathcal{I}_{\mathbf{B}}(\mathbf{F})$ para cualesquiera asignaciones $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ en $\mathcal{I}$.

Modelo de una fórmula

- Sea $\mathbf{F}$ una fórmula de $\mathbf{L}$ e $\mathcal{I}$ una estructura de $\mathbf{L}$:
  - $(\mathcal{I}, \mathbf{A})$ es una realización de $\mathbf{F}$ ($\mathcal{I}_{\mathbf{A}} \models \mathbf{F}$), si $\mathbf{A}$ es una asignación en $\mathcal{I}$ tal que $\mathcal{I}_{\mathbf{A}}(\mathbf{F}) = \mathbf{1}$.
  - $\mathcal{I}$ es un modelo de $\mathbf{F}$ ($\mathcal{I} \models \mathbf{F}$), si para toda asignación $\mathbf{A}$ en $\mathcal{I}$ se tiene $\mathcal{I}_{\mathbf{A}} \models \mathbf{F}$.
- Ejemplos:
  - Sea $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, \mathbf{I})$ una estructura tal que $\mathbf{I(f)} = +$ e $\mathbf{I(g)} = *$.
    - Si $\mathbf{A}$ es una asignación en $\mathcal{I}$ tal que $\mathbf{A(x)} = \mathbf{A(y)} = \mathbf{2}$, entonces $\mathcal{I}_{\mathbf{A}} \models \mathbf{f(x, x) = g(x, x)}$.
    - Si $\mathbf{B}$ es una asignación en $\mathcal{I}$ tal que $\mathbf{B(x)} = \mathbf{1}$ y $\mathbf{B(y)} = \mathbf{2}$, entonces $\mathcal{I}_{\mathbf{B}} \not\models \mathbf{f(x, x) = g(x, x)}$.
    - $\mathcal{I} \models \mathbf{f(x, y) = f(y, x)}$
    - $\mathcal{I} \not\models \mathbf{f(x, y) = g(x, y)}$

Satisfacibilidad y validez

- Sea **F** una fórmula de **L**:
  - **F** es válida ($\models$ **F**) si toda estructura de **L** es un modelo de **F**.
  - **F** es satisfacible si tiene alguna realización.
  - **F** es insatisfacible si no tiene ninguna realización.
- Ejemplos:
  - $\exists$**x P(x)** $\vee$ $\forall$**x** $\neg$**P(x)** es válida.
  - $\exists$**x P(x)** $\wedge$ $\exists$**x** $\neg$**P(x)** es satisfacible, pero no válida.
  - $\forall$**x P(x)** $\wedge$ $\exists$**x** $\neg$**P(x)** es insatisfacible.

Satisfacibilidad y validez

- Relaciones entre estos conceptos:
  - $\mathbf{F}$ es válida $\iff \neg\mathbf{F}$ es insatisfacible.
  - $\mathbf{F}$ es válida $\implies \mathbf{F}$ es satisfacible.
  - $\mathbf{F}$ es satisfacible $\not\implies \neg\mathbf{F}$ es insatisfacible.
- Sea $\mathbf{F}$ una fórmula en $\mathbf{L}$ y $\mathbf{x_1},\ldots,\mathbf{x_n}$ las variables libres de $\mathbf{F}$:
  - $\mathbf{F}$ es válida $\iff \forall\mathbf{x_1}\ldots\forall\mathbf{x_n}\ \mathbf{F}$ es válida.
    La fórmula $\forall\mathbf{x_1}\ldots\forall\mathbf{x_n}\ \mathbf{F}$ es el cierre universal de $\mathbf{F}$.
  - $\mathbf{F}$ es satisfacible $\iff \exists\mathbf{x_1}\ldots\exists\mathbf{x_n}\ \mathbf{F}$ es satisfacible.
    La fórmula $\exists\mathbf{x_1}\ldots\exists\mathbf{x_n}\ \mathbf{F}$ es el cierre existencial de $\mathbf{F}$.

Fórmulas equivalentes

- Dos fórmulas $\mathbf{F}$ y $\mathbf{G}$ de un lenguaje $\mathbf{L}$ son equivalentes ($\mathbf{F} \equiv \mathbf{G}$) si para toda estructura $\mathcal{I}$ de $\mathbf{L}$ y toda asignación $\mathbf{A}$ en $\mathcal{I}$ se tiene $\mathcal{I}_{\mathbf{A}}(\mathbf{F}) = \mathcal{I}_{\mathbf{A}}(\mathbf{G})$.
- Equivalencias importantes:
  - Las derivadas de las conectivas proposicionales.
  - Conmutatividad de los cuantificadores:
    $$\forall \mathbf{x}\ \forall \mathbf{y}\ \mathbf{F} \equiv \forall \mathbf{y}\ \forall \mathbf{x}\ \mathbf{F}$$
    $$\exists \mathbf{x}\ \exists \mathbf{y}\ \mathbf{F} \equiv \exists \mathbf{y}\ \exists \mathbf{x}\ \mathbf{F}$$
  - Cuantificadores con la negación:
    $$\forall \mathbf{x}\ (\neg \mathbf{F}) \equiv \neg(\exists \mathbf{x}\ \mathbf{F})$$
    $$\exists \mathbf{x}\ (\neg \mathbf{F}) \equiv \neg(\forall \mathbf{x}\ \mathbf{F})$$
  - Cuantificador universal con la conjunción:
    $$\forall \mathbf{x}\ (\mathbf{F} \wedge \mathbf{G}) \equiv (\forall \mathbf{x}\ \mathbf{F}) \wedge (\forall \mathbf{x}\ \mathbf{G})$$
  - Cuantificador existencial con la disyunción:
    $$\exists \mathbf{x}\ (\mathbf{F} \vee \mathbf{G}) \equiv (\exists \mathbf{x}\ \mathbf{F}) \vee (\exists \mathbf{x}\ \mathbf{G})$$
  - Cuantificador existencial con la implicación:
    $$\exists \mathbf{x}\ (\mathbf{F} \rightarrow \mathbf{G}) \equiv (\forall \mathbf{x}\ \mathbf{F}) \rightarrow (\exists \mathbf{x}\ \mathbf{G})$$

Propiedades de la equivalencia lógica

- La equivalencia lógica es una relación de equivalencia
  - Reflexividad: $\mathbf{F} \equiv \mathbf{F}$
  - Simetría: Si $\mathbf{F} \equiv \mathbf{G}$, entonces $\mathbf{G} \equiv \mathbf{F}$.
  - Transitividad: Si $\mathbf{F} \equiv \mathbf{G}$ y $\mathbf{G} \equiv \mathbf{H}$, entonces $\mathbf{F} \equiv \mathbf{H}$.
- Principio de sustitución de fórmulas equivalentes: Si en una fórmula $\mathbf{F}$ se sustituye una subfórmula $\mathbf{G}$ por otra lógicamente equivalente $\mathbf{G'}$, entonces la fórmula obtenida $\mathbf{F'}$ es logicamente equivalente a la original.
  - $\mathbf{F = \neg(\forall x\ P(x)) \rightarrow \exists x\ Q(x)}$
  - $\mathbf{G = \neg(\forall x\ P(x))}$
  - $\mathbf{G' = \exists y\ \neg P(y)}$
  - $\mathbf{F' = \exists y\ \neg P(y) \rightarrow \exists x\ Q(x)}$

Conjuntos de fórmulas

- Modelo de un conjunto de fórmulas. Sea $\mathbf{S}$ un conjunto de fórmulas de $\mathbf{L}$, $\mathcal{I}$ una estructura de $\mathbf{L}$ y $\mathbf{A}$ una asignación en $\mathcal{I}$:
  - $(\mathcal{I}, \mathbf{A})$ es una realización de $\mathbf{S}$ ($\mathcal{I}_{\mathbf{A}} \models \mathbf{S}$) si para toda $\mathbf{F} \in \mathbf{S}$, se tiene que $(\mathcal{I}, \mathbf{A})$ es una realización de $\mathbf{F}$.
  - $\mathcal{I}$ es un modelo de $\mathbf{S}$ ($\mathcal{I} \models \mathbf{S}$) si para toda $\mathbf{F} \in \mathbf{S}$, se tiene que $\mathcal{I} \models \mathbf{F}$.
- Ejemplos:
  - Sea $\mathbf{S} = \{\forall \mathbf{y}\ \mathbf{R(x, y)}, \forall \mathbf{y}\ \mathbf{f(x, y) = y}\}$
    - $(\mathcal{I}, \mathbf{A})$ con $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, \mathbf{I})$, $\mathbf{I(R)} = \leq$, $\mathbf{I(f)} = +$ y $\mathbf{A(x)} = \mathbf{0}$ es una realización de $\mathbf{S}$.
    - $(\mathcal{I}, \mathbf{A})$ con $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, \mathbf{I})$, $\mathbf{I(R)} = <$, $\mathbf{I(f)} = +$ y $\mathbf{A(x)} = \mathbf{0}$ no es una realización de $\mathbf{S}$.
  - Sea $\mathbf{S} = \{\mathbf{R(e, y)}, \mathbf{f(e, y) = y}\}$
    - $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, \mathbf{I})$, $\mathbf{I(R)} = \leq$, $\mathbf{I(f)} = +$ e $\mathbf{I(e)} = \mathbf{0}$ es un modelo de $\mathbf{S}$.
    - $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, \mathbf{I})$, $\mathbf{I(R)} = <$, $\mathbf{I(f)} = +$ e $\mathbf{I(e)} = \mathbf{0}$ no es un modelo de $\mathbf{S}$.

Conjuntos de fórmulas

- Consistencia de un conjunto de fórmulas. Sea **S** un conjunto de fórmulas de **L**:
  - **S** es consistente si tiene alguna realización.
  - **S** es inconsistente si no tiene ninguna realización.
- Ejemplos:
  - $\{\forall \mathbf{y}\ \mathbf{R(x,y)}, \forall \mathbf{y}\ \mathbf{f(x,y) = y}\}$ es consistente
  - $\{\mathbf{P(x)} \rightarrow \mathbf{Q(x)}, \forall \mathbf{y}\ \mathbf{P(y)}, \neg \mathbf{Q(x)}\}$ es inconsistente
- Si **S** es un conjunto de fórmulas cerradas de **L**, entonces **S** es consistente si y solo si **S** tiene algún modelo.

Conjuntos de fórmulas

- Consecuencia lógica. Sea $\mathbf{F}$ una fórmula de $\mathbf{L}$ y $\mathbf{S}$ un conjunto de fórmulas de $\mathbf{L}$:
  - $\mathbf{F}$ es consecuencia lógica de $\mathbf{S}$ ($\mathbf{S} \models \mathbf{F}$) si todas las realizaciones de $\mathbf{S}$ lo son también de $\mathbf{F}$.
- Ejemplos:
  - $\{\forall \mathbf{x}\ \mathbf{P(x)}\} \models \mathbf{P(y)}$
  - $\{\mathbf{P(y)}\} \not\models \{\forall \mathbf{x}\ \mathbf{P(x)}\}$
  - $\{\forall \mathbf{x}\ (\mathbf{P(x)} \rightarrow \mathbf{Q(x)}), \mathbf{P(c)}\} \models \mathbf{Q(c)}$
  - $\{\forall \mathbf{x}\ (\mathbf{P(x)} \rightarrow \mathbf{Q(x)}), \mathbf{Q(c)}\} \not\models \mathbf{P(c)}$
- $\mathbf{S} \models \mathbf{F} \Longleftrightarrow \mathbf{S} \cup \{\neg \mathbf{F}\}$ es inconsistente.
- Si $\mathbf{S} \cup \{\mathbf{F}\}$ es un conjunto de fórmulas cerradas de $\mathbf{L}$, entonces son equivalentes:
  - $\mathbf{F}$ es consecuencia lógica de $\mathbf{S}$.
  - Todos los modelos de $\mathbf{S}$ también lo son de $\mathbf{F}$.

Cálculos lógicos

- Un cálculo lógico ($\vdash$) es un procedimiento que permite comprobar la validez de una fórmula.
- Existen cálculos lógicos correctos ($\vdash \Longrightarrow \models$) y completos ($\models \Longrightarrow \vdash$) para la lógica de primer orden.
  - Generalmente se trata de extensiones de los cálculos proposicionales incluyendo los cuantificadores: tableros semánticos, secuentes, deducción natural, resolución, ...
- La lógica de primer orden es semidecidible: no existen procedimientos capaces de decidir en un número finito de pasos si una fórmula es válida o no.
  - Existen procedimientos capaces de responder afirmativamente si una fórmula es válida, pero que no son capaces de dar respuesta cuando no lo es.

Otras lógicas

Lógicas de Orden Superior

- Las lógicas de orden superior son extensiones de la lógica de primer orden que incluyen entre otras cosas:
  - Variables que representan propiedades, funciones y relaciones.
  - Cuantificadores que operan sobre estas variables.
  - Funciones que actúan sobre símbolos de función y predicado.
  - Propiedades de los símbolos de función y predicado.
- Se trata de lógicas para las que no existen cálculos lógicos completos.
- Se utilizan para formalizar matemáticas de orden superior.
- Sistemas de razonamiento: Isabelle/HOL, PVS, HOL-Ligth, ...

Lógicas Descriptivas

- Lenguajes de representación de conocimiento terminológico estructurado. Disponen de:
  - Un formalismo descriptivo: conceptos, roles, individuos y constructores.
  - Un formalismo terminológico: propiedades de la terminología descriptiva.
  - Un formalismo asertivo: propiedades de individuos.
- Se trata de lógicas decidibles que están situadas entre la lógica proposicional y la lógica de primer orden.
- Se utilizan para formalizar ontologías.
- Sistemas de razonamiento: FaCT, RACER, CEL, JCEL, ...

Lógicas Modales

- Lógicas que permiten calificar la verdad de los juicios. Extienden la lógica de primer orden con operadores modales:
  - Operador de necesidad.
  - Operador de posibilidad.
- Su semántica se basa en la existencia de mundos posibles o maximales y las relaciones de accesibilidad entre ellos.
- Las lógicas temporales son un tipo de lógicas modales usadas para la formalización de sistemas software y hardware.
- Sistemas de razonamiento: SMV, SPIN, KRONOS, NuSMV, ...

Logicas multivaluadas

- Las lógicas multivaluadas son extensiones de las lógicas clásicas admitiendo una variedad más amplia de valores de verdad.
  - Lógicas con un número finito de valores de verdad: Lógicas trivaluadas de Lukasiewicz o de Kleene.
  - Lógicas con un número infinito de valores de verdad: Lógica difusa, lógica probabilística.
- Se usan en entornos en los que la toma de decisiones depende del grado de certeza de las hipótesis.

Bibliografía

- M. Ben-Ari. *Mathematical logic for computer science*
  Capítulos 1 y 2.
- J.A. Díez. *Iniciación a la Lógica*
  Capítulos 2 y 3.
- M. Huth y M. Ryan. *Logic in computer science: modelling and reasoning about systems*