Lógicas clásicas

Francisco J. Martín Mateos

Dpto. Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial
Universidad de Sevilla

Lógicas clásicas

- Objetivos de la lógica:
  - Formalización del lenguaje natural.
  - Desarrollar métodos de razonamiento independientes del contexto.
- Sistemas lógicos:
  - Lógica proposicional.
  - Lógica de primer orden.
  - Lógica de orden superior.
  - Lógicas modales.
  - Lógicas descriptivas.

Lógicas clásicas

- Las lógicas clásicas son sistemas formales que cumplen:
  - *Principio de tercio excluso*: Cualquier afirmación es verdadera o falsa.
  - *Principio de no contradicción*: No hay afirmaciones que sean verdaderas y falsas al mismo tiempo.
  - *Principio de explosión*: De una afirmación contradictoria se puede deducir cualquier cosa.
  - *Principio de monotonía de la implicación*: Las hipótesis de cualquier hecho derivado pueden ampliarse con supuestos adicionales.
- Ejemplos:
  - Lógica proposicional.
  - Lógica de primer orden.
  - Lógica de segundo orden.

Lógica proposicional

Argumentaciones y formalización

- Argumentaciones:
  - Si el tren llega a las 7 y no hay taxis en la estación, entonces Juan llegará tarde a la reunión. Juan no ha llegado tarde a la reunión. El tren llegó a las 7. Por tanto, había taxis en la estación.
  - Si hay corriente y la lámpara no está fundida, entonces está encendida. La lámpara no está encendida. Hay corriente. Por tanto, la lámpara está fundida.

Argumentaciones y formalización

- Formalización:
  - Primer caso:
    - $\boldsymbol{p} \equiv$ "el tren llega a las 7"
    - $\boldsymbol{q} \equiv$ "hay taxis en la estación"
    - $\boldsymbol{r} \equiv$ "juan llegará tarde a la reunión"
  - Segundo caso:
    - $\boldsymbol{p} \equiv$ "hay corriente"
    - $\boldsymbol{q} \equiv$ "la lámpara está fundida"
    - $\boldsymbol{r} \equiv$ "la lámpara está encendida"
- En ambos casos:
  - Argumentación: Si $\boldsymbol{p}$ y no $\boldsymbol{q}$, entonces $\boldsymbol{r}$. No $\boldsymbol{r}$. $\boldsymbol{p}$. Por tanto, $\boldsymbol{q}$
  - Formulación: $\boldsymbol{p} \wedge \neg \boldsymbol{q} \to \boldsymbol{r}, \neg \boldsymbol{r}, \boldsymbol{p} \models \boldsymbol{q}$.

Sintaxis

- Alfabeto proposicional:
  - Variables proposicionales: $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{r}$, $\dots$, $\boldsymbol{p_1}$, $\boldsymbol{p_2}$, $\dots$
  - Conectivas lógicas:
    - Conectivas monarias:
      negación, $\neg$.
    - Conectivas binarias:
      conjunción, $\wedge$;
      disyunción, $\vee$;
      condicional $\rightarrow$;
      bicondicional $\leftrightarrow$.
  - Símbolos adicionales: (y).

Sintaxis

- Fórmulas proposicionales:
  - Cualquier variable proposicional es una fórmula (fórmulas atómicas).
  - Si $\boldsymbol{F}$ y $\boldsymbol{G}$ son fórmulas entonces también son fórmulas:
    - Negación: $(\neg \boldsymbol{F})$
    - Conjunción: $(\boldsymbol{F} \wedge \boldsymbol{G})$
    - Disyunción: $(\boldsymbol{F} \vee \boldsymbol{G})$
    - Condicional: $(\boldsymbol{F} \rightarrow \boldsymbol{G})$
    - Bicondicional: $(\boldsymbol{F} \leftrightarrow \boldsymbol{G})$
- Ejemplos:
  - Son fórmulas: $\boldsymbol{p}$, $(\boldsymbol{p} \vee (\neg \boldsymbol{q}))$, $((\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}) \rightarrow (\boldsymbol{q} \vee \boldsymbol{p}))$.
  - No es fórmula: $(\boldsymbol{p} \wedge \vee \boldsymbol{q})$.

Sintaxis

- Notación:
  - Variables proposicionales: p, q, r
  - Conjunto de todas las variables proposicionales: VP
  - Fórmulas proposicionales: F, G, H
  - Conjunto de todas las fórmulas proposicionales: $Prop$
- Los paréntesis se eliminan cuando no hay duda sobre el uso de las conectivas lógicas.
  - Se eliminan los paréntesis externos:
    - $F \vee G$ en lugar de $(F \vee G)$.
  - Se usa una precedencia entre las conectivas: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$.
    - $F \wedge G \rightarrow \neg F \vee G$ en lugar de $(F \wedge G) \rightarrow ((\neg F) \vee G)$
  - Asociación por la derecha de las conectivas:
    - $F \vee G \vee H$ en lugar de $F \vee (G \vee H)$

Semántica

- Valores de verdad: verdadero ($\mathbf{1}$ o $\top$) y falso ($\mathbf{0}$ o $\bot$)
  - El conjunto de los valores de verdad es $\mathbb{B}$
- Funciones de verdad asociadas a las conectivas:

$$\boldsymbol{H}_{\neg}(\boldsymbol{i}) = \begin{cases} \mathbf{1} & \text{si } \boldsymbol{i} = \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \text{si } \boldsymbol{i} = \mathbf{1} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{H}_{\wedge}(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}) = \begin{cases} \mathbf{1} & \text{si } \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} = \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{H}_{\vee}(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}) = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{si } \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} = \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{H}_{\rightarrow}(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}) = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{si } \boldsymbol{i} = \mathbf{1} \text{ y } \boldsymbol{j} = \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{H}_{\leftrightarrow}(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}) = \begin{cases} \mathbf{1} & \text{si } \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} \\ \mathbf{0} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Semántica

- Tablas de verdad:
  - Conectivas monarias:

i	$\neg i$
1	0
0	1

  - Conectivas binarias:

i	j	$i \wedge j$	$i \vee j$	$i \rightarrow j$	$i \leftrightarrow j$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Semántica

- Interpretaciones: Funciones del conjunto de las variables proposicionales en el conjunto de valores de verdad.

$$\boldsymbol{I} : \boldsymbol{VP} \longrightarrow \mathbb{B}$$

- Para cada interpretación $\boldsymbol{I}$ existe una única función que da significado a las fórmulas, $\boldsymbol{I} : \boldsymbol{Prop} \longrightarrow \mathbb{B}$, tal que:

$$\boldsymbol{I}(\boldsymbol{F}) = \begin{cases} \boldsymbol{I}(\boldsymbol{F}) & \text{si } \boldsymbol{F} \text{ es atómica} \\ \boldsymbol{H}_{\neg}(\boldsymbol{I}(\boldsymbol{G})) & \text{si } \boldsymbol{F} = \neg \boldsymbol{G} \\ \boldsymbol{H}_{*}(\boldsymbol{I}(\boldsymbol{G}), \boldsymbol{I}(\boldsymbol{H})) & \text{si } \boldsymbol{F} = \boldsymbol{G} * \boldsymbol{H} \end{cases}$$

Donde $*$ es cualquier conectiva binaria.

- Interpretaciones de fórmulas:
  - $\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}) \wedge (\neg \boldsymbol{q} \vee \boldsymbol{r})$ en la interpretación $\boldsymbol{I_1}$ tal que $\boldsymbol{I_1}(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{I_1}(\boldsymbol{r}) = \mathbf{1}$ e $\boldsymbol{I_1}(\boldsymbol{q}) = \mathbf{0}$:

p	q	r	$p \vee q$	$\neg q$	$\neg q \vee r$	F
1	0	1	1	1	1	1

  - $\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}) \wedge (\neg \boldsymbol{q} \vee \boldsymbol{r})$ en la interpretación $\boldsymbol{I_2}$ tal que $\boldsymbol{I_2}(\boldsymbol{r}) = \mathbf{1}$ e $\boldsymbol{I_2}(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{I_2}(\boldsymbol{q}) = \mathbf{0}$:

p	q	r	$p \vee q$	$\neg q$	$\neg q \vee r$	F
0	0	1	0	1	1	0

- Si dos interpretaciones $\boldsymbol{I_1}$ e $\boldsymbol{I_2}$ coinciden en todas las variables proposicionales de una fórmula $\boldsymbol{F}$ entonces $\boldsymbol{I_1}(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{I_2}(\boldsymbol{F})$.

Modelos y satisfacibilidad

- Módelo de una fórmula:
  - Una interpretación $\boldsymbol{I}$ es modelo de una fórmula $\boldsymbol{F}$ si $\boldsymbol{I}(\boldsymbol{F}) = \mathbf{1}$
  - Se escribe $\boldsymbol{I} \models \boldsymbol{F}$
    - Si $\boldsymbol{I_1}(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{I_1}(\boldsymbol{r}) = \mathbf{1}$ e $\boldsymbol{I_1}(\boldsymbol{q}) = \mathbf{0}$, entonces $\boldsymbol{I_1} \models (\boldsymbol{p} \lor \boldsymbol{q}) \land (\neg \boldsymbol{q} \lor \boldsymbol{r})$
    - Si $\boldsymbol{I_2}(\boldsymbol{r}) = \mathbf{1}$ e $\boldsymbol{I_2}(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{I_2}(\boldsymbol{q}) = \mathbf{0}$, entonces $\boldsymbol{I_2} \not\models (\boldsymbol{p} \lor \boldsymbol{q}) \land (\neg \boldsymbol{q} \lor \boldsymbol{r})$
- Una fórmula es satisfacible si tiene modelos:
  - La fórmula $(\boldsymbol{p} \lor \boldsymbol{q}) \land (\neg \boldsymbol{q} \lor \boldsymbol{r})$ es satisfacible.
- Una fórmula es insatisfacible si no tiene modelos:
  - La fórmula $\boldsymbol{p} \land \neg \boldsymbol{p}$ es insatisfacible

Tautologías y contradicciones

- Una fórmula $\boldsymbol{F}$ es una tautología o válida ($\models \boldsymbol{F}$), si toda interpretación es un modelo de $\boldsymbol{F}$.
  - La fórmula $(\boldsymbol{p} \to \boldsymbol{q}) \vee (\boldsymbol{q} \to \boldsymbol{p})$ es una tautología.
- Una fórmula $\boldsymbol{F}$ es una contradicción o insatisfacible, si ninguna interpretación es un modelo de $\boldsymbol{F}$.
  - La fórmula $(\boldsymbol{p} \to \boldsymbol{q}) \wedge \neg(\boldsymbol{p} \to \boldsymbol{q})$ es una contradicción.
- Una fórmula $\boldsymbol{F}$ es contingente, si no es una tautología ni una contradicción.
  - La fórmula $\boldsymbol{p} \to \boldsymbol{q}$ es contingente.

Satisfacibilidad y validez

- Los problemas SAT y TAUT
  - Problema SAT: Dada una fórmula, determinar si es satisfacible.
  - Problema TAUT: Dada una fórmula, determinar si es una tautología.
- Relaciones entre estos dos problemas:
  - $\boldsymbol{F}$ es una tautología $\Longleftrightarrow \neg \boldsymbol{F}$ es insatisfacible.
  - $\boldsymbol{F}$ es una tautología $\Longrightarrow \boldsymbol{F}$ es satisfacible.
  - $\boldsymbol{F}$ es satisfacible $\not\Longrightarrow \neg \boldsymbol{F}$ es insatisfacible.

Fórmulas equivalentes

- Dos fórmulas $\boldsymbol{F}$ y $\boldsymbol{G}$ son equivalentes ($\boldsymbol{F} \equiv \boldsymbol{G}$), si para toda interpretación $\boldsymbol{I}$ se tiene que $\boldsymbol{I}(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{I}(\boldsymbol{G})$.
- Equivalencias importantes:
  - Idempotencia:
    $$\boldsymbol{F} \vee \boldsymbol{F} \equiv \boldsymbol{F}$$
    $$\boldsymbol{F} \wedge \boldsymbol{F} \equiv \boldsymbol{F}$$
  - Conmutatividad:
    $$\boldsymbol{F} \vee \boldsymbol{G} \equiv \boldsymbol{G} \vee \boldsymbol{F}$$
    $$\boldsymbol{F} \wedge \boldsymbol{G} \equiv \boldsymbol{G} \wedge \boldsymbol{F}$$
  - Asociatividad:
    $$\boldsymbol{F} \vee (\boldsymbol{G} \vee \boldsymbol{H}) \equiv (\boldsymbol{F} \vee \boldsymbol{G}) \vee \boldsymbol{H}$$
    $$\boldsymbol{F} \wedge (\boldsymbol{G} \wedge \boldsymbol{H}) \equiv (\boldsymbol{F} \wedge \boldsymbol{G}) \wedge \boldsymbol{H}$$
  - Absorción:
    $$\boldsymbol{F} \wedge (\boldsymbol{F} \vee \boldsymbol{G}) \equiv \boldsymbol{F}$$
    $$\boldsymbol{F} \vee (\boldsymbol{F} \wedge \boldsymbol{G}) \equiv \boldsymbol{F}$$

Fórmulas equivalentes

- Dos fórmulas F y G son equivalentes ($F \equiv G$), si para toda interpretación I se tiene que $I(F) = I(G)$.
- Equivalencias importantes:
  - Distributividad:
    $$F \vee (G \wedge H) \equiv (F \vee G) \wedge (F \vee H)$$
    $$F \wedge (G \vee H) \equiv (F \wedge G) \vee (F \wedge H)$$
  - Doble negación:
    $$\neg\neg F \equiv F$$
  - Leyes de De Morgan:
    $$\neg(F \wedge G) \equiv \neg F \vee \neg G$$
    $$\neg(F \vee G) \equiv \neg F \wedge \neg G$$
  - Leyes de tautologías. Si F es una tautología:
    $$F \wedge G \equiv G$$
    $$F \vee G \equiv F$$
  - Leyes de contradicciones. Si F es una contradicción:
    $$F \wedge G \equiv F$$
    $$F \vee G \equiv G$$

Propiedades de la equivalencia lógica

- La equivalencia lógica es una relación de equivalencia
  - Reflexividad: $F \equiv F$
  - Simetría: Si $F \equiv G$, entonces $G \equiv F$.
  - Transitividad: Si $F \equiv G$ y $G \equiv H$, entonces $F \equiv H$.
- Relación entre equivalencia y bicondicional

$$F \equiv G \text{ si y solo si } \models F \leftrightarrow G$$

- Principio de sustitución de fórmulas equivalentes: Si en una fórmula F se sustituye una subfórmula G por otra lógicamente equivalente G', entonces la fórmula obtenida F' es logicamente equivalente a la original.
  - $F = \neg(p \wedge q) \to \neg(p \wedge \neg\neg r)$
  - $G = \neg(p \wedge \neg\neg r)$
  - $G' = \neg p \vee \neg r$
  - $F' = \neg(p \wedge q) \to \neg p \vee \neg r$

Conjuntos de fórmulas

- Modelo de un conjunto de fórmulas:
  - Una interpretación $\boldsymbol{I}$ es modelo de un conjunto de fórmulas $\boldsymbol{S}$ ($\boldsymbol{I} \models \boldsymbol{S}$), si para toda $\boldsymbol{F} \in \boldsymbol{S}$ se tiene que $\boldsymbol{I} \models \boldsymbol{F}$.
- Sea $\boldsymbol{S} = \{\boldsymbol{F_1} = (\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}) \wedge (\neg \boldsymbol{q} \vee \boldsymbol{r}), \boldsymbol{F_2} = \boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{r}\}$
  - La interpretación $\boldsymbol{I_1}$ tal que $\boldsymbol{I_1}(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{I_1}(\boldsymbol{r}) = \mathbf{1}$ e $\boldsymbol{I_1}(\boldsymbol{q}) = \mathbf{0}$ es modelo de $\boldsymbol{S}$.

p	q	r	$p \vee q$	$\neg q$	$\neg q \vee r$	$p \rightarrow r$	F_1	F_2
1	0	1	1	1	1	1	1	1

  - La interpretación $\boldsymbol{I_2}$ tal que $\boldsymbol{I_2}(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{I_2}(\boldsymbol{q}) = \mathbf{0}$ e $\boldsymbol{I_2}(\boldsymbol{r}) = \mathbf{1}$ no es modelo de $\boldsymbol{S}$.

p	q	r	$p \vee q$	$\neg q$	$\neg q \vee r$	$p \rightarrow r$	F_1	F_2
0	0	1	0	1	1	1	0	1

- Un conjunto $\boldsymbol{S}$ es consistente, si tiene algún modelo.
  - El conjunto $\{(\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}) \wedge (\neg \boldsymbol{q} \vee \boldsymbol{r}), \boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{r}\}$ es consistente.
- Un conjunto $\boldsymbol{S}$ es inconsistente, si no tiene ningún modelo.
  - El conjunto $\{\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}, \neg \boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p} \vee \neg \boldsymbol{q}, \neg \boldsymbol{p} \vee \neg \boldsymbol{q}\}$ es inconsistente.
- Una fórmula $\boldsymbol{F}$ es consecuencia lógica de un conjunto de fórmulas $\boldsymbol{S}$ ($\boldsymbol{S} \models \boldsymbol{F}$) si todos los modelos de $\boldsymbol{S}$ son a su vez modelos de $\boldsymbol{F}$.
  - $\{\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{q}, \boldsymbol{q} \rightarrow \boldsymbol{r}\} \models \boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{r}$
  - $\{\boldsymbol{p}\} \not\models \boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}$

Propiedades de la consecuencia lógica

- Propiedades básicas de la relación de consecuencia lógica:
  - Reflexividad: $\boldsymbol{S} \models \boldsymbol{S}$.
  - Monotonía: Si $\boldsymbol{S_1} \models \boldsymbol{F}$ y $\boldsymbol{S_1} \subset \boldsymbol{S_2}$, entonces $\boldsymbol{S_2} \models \boldsymbol{F}$.
  - Transitividad: Si $\boldsymbol{S} \models \boldsymbol{F}$ y $\{\boldsymbol{F}\} \models \boldsymbol{G}$, entonces $\boldsymbol{S} \models \boldsymbol{G}$.
- Relación entre consecuencia, validez, satisfacibilidad y consistencia. Las siguientes condiciones son equivalentes:
  - $\{\boldsymbol{F_1}, \dots, \boldsymbol{F_n}\} \models \boldsymbol{G}$.
  - $\models \boldsymbol{F_1} \wedge \dots \wedge \boldsymbol{F_n} \rightarrow \boldsymbol{G}$.
  - $\neg(\boldsymbol{F_1} \wedge \dots \wedge \boldsymbol{F_n} \rightarrow \boldsymbol{G})$ es insatisfacible.
  - $\{\boldsymbol{F_1}, \dots, \boldsymbol{F_n}, \neg \boldsymbol{G}\}$ es inconsistente.

Cálculos lógicos

- Un cálculo lógico ($\vdash$) es un procedimiento de decisión que permite comprobar la validez de una fórmula.
  - También permiten comprobar la satisfacibilidad, la consistencia y la consecuencia lógica.
- La combinación exhaustiva de todos los valores de verdad de las variables proposicionales y el cálculo del valor de verdad mediante las tablas de verdad es un ejemplo de cálculo lógico.
- Otros cálculos lógicos: tableros semánticos, secuentes, deducción natural, resolución, ...

Propiedades de los cálculos lógicos

- Un cálculo lógico es correcto ($\vdash \implies \models$), si toda fórmula que se puede demostrar que es válida con el cálculo lógico, es válida en la lógica.
  - Todo cálculo lógico debería cumplir esta propiedad.
- Un cálculo lógico es completo ($\models \implies \vdash$), si para toda fórmula válida en la lógica, se puede demostrar su validez utilizando únicamente el cálculo lógico.
- Existen cálculos lógicos para la lógica proposicional que son correctos y completos.
  - Los cálculos lógicos mencionados para la lógica proposicional son correctos y completos: tablas de verdad, tableros semánticos, secuentes, deducción natural, resolución, ...
- La lógica proposicional es decidible: existen procedimientos capaces de decidir si una fórmula es válida o no, en un número finito de pasos.

Lógica de primer orden

Limitación expresiva de la lógica proposicional

- Si Sevilla es vecina de Cádiz, entonces Cádiz es vecina de Sevilla. Sevilla es vecina de Cádiz. Por tanto Cádiz es vecina de Sevilla.
  - Formalización en lógica proposicional:
    $\{\boldsymbol{SvC} \rightarrow \boldsymbol{CvS}, \boldsymbol{SvC}\} \models \boldsymbol{CvS}$
- Si una provincia es vecina de otra, entonces la segunda es vecina de la primera. Sevilla es vecina de Cádiz. Por tanto Cádiz es vecina de Sevilla.
  - Formalización en lógica proposicional: Imposible
  - Es necesario poder hacer referencia a individuos genéricos caracterizados por funciones.
    - *Ser una provincia*
    - *Ser vecinas*

Lenguaje de primer orden

- Símbolos lógicos
  - Variables: $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$, $\dots$, $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\dots$
  - Conectivas lógicas: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$
  - Cuantificadores:
    - Cuantificador universal: $\forall$
    - Cuantificador existencial: $\exists$
- Símbolos propios
  - Constantes de individuos: $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\dots$, $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\dots$
  - Predicados (con aridad): $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{R}$, $\dots$, $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$, $\dots$
  - Funciones (con aridad): $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{h}$, $\dots$, $\boldsymbol{f}_1$, $\boldsymbol{f}_2$, $\dots$
- Símbolos auxiliares: (,), ,

Lenguaje de primer orden

- Notación:
  - Lenguajes de primer orden: $\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{L_1}$, ...
  - Conjunto de las variables: $\boldsymbol{Var}$
- Observaciones:
  - Un lenguaje de primer orden se describe con sus constantes, predicados y funciones propias. Los símbolos lógicos siempre están presentes en el lenguaje.
  - Los símbolos de predicado de aridad 1 (un argumento) se llaman propiedades.
  - Los símbolos de predicado de aridad mayor que 1 (dos o más argumentos) se llaman relaciones.
  - La mayoría de los lenguajes de primer orden incluyen el predicado de igualdad $(=)$.

Lenguaje de primer orden

- Lenguaje de la vecindad entre provincias:
  - Símbolos de constantes: $\{\boldsymbol{Sevilla}, \boldsymbol{Cadiz}\}$
  - Símbolos de predicado: $\{\boldsymbol{provincia}, \boldsymbol{vecinas}\}$
  - Símbolos de función: $\{\}$
- Lenguaje de la aritmética natural:
  - Símbolos de constantes: $\{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \ldots\}$
  - Símbolos de predicado: $\{<, \leq, =, \ldots\}$
  - Símbolos de función: $\{+, -, *\}$

Términos

- Términos en un lenguaje de primer orden $\boldsymbol{L}$:
  - Las variables son términos de $\boldsymbol{L}$.
  - Las constantes de $\boldsymbol{L}$ son términos de $\boldsymbol{L}$.
  - Si $\boldsymbol{f}$ es un símbolo de función de $\boldsymbol{L}$ de aridad $\boldsymbol{n}$ (o $\boldsymbol{n}$-aria) y $\boldsymbol{t_1, \dots, t_n}$ son términos de $\boldsymbol{L}$, entonces $\boldsymbol{f(t_1, \dots, t_n)}$ es un término de $\boldsymbol{L}$.
- Notación:
  - Términos de un lenguaje de primer orden: $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{s}$, ..., $\boldsymbol{t_1}$, $\boldsymbol{t_2}$, ...
  - Conjunto de términos del lenguaje $\boldsymbol{L}$: $\boldsymbol{Term(L)}$
- Ejemplos:
  - En el lenguaje de la vecindad entre provincias: ***Sevilla***, ***Cadiz***.
  - En el lenguaje de la aritmética: $+(*(\boldsymbol{x}, \mathbf{1}), \boldsymbol{y})$ (o $(\boldsymbol{x} * \mathbf{1}) + \boldsymbol{y}$).

Fórmulas atómicas

- Fórmulas atómicas en un lenguaje de primer orden L:
  - Si P es un símbolo de predicado n-ario y $t_1, \dots, t_n$ son términos del lenguaje L, entonces $P(t_1, \dots, t_n)$ es una fórmula atómica.
- Notación:
  - Fórmulas atómicas de un lenguaje de primer orden: A, B, ..., A_1, A_2, ...
  - Conjunto de fórmulas atómicas del lenguaje L: $Atom(L)$
- Ejemplos:
  - En el lenguaje de la vecindad entre provincias: $provincia(x)$, $vecinas(Cadiz, y)$.
  - En el lenguaje de la aritmética: $< (x, *(2, s(x)))$ (o $x < 2 * s(x)$).

Fórmulas

- Fórmulas en un lenguaje de primer orden $\boldsymbol{L}$:
  - Las fórmulas atómicas de $\boldsymbol{L}$ son fórmulas en $\boldsymbol{L}$.
  - Si $\boldsymbol{F}$ y $\boldsymbol{G}$ son fórmulas en $\boldsymbol{L}$, entonces $(\neg \boldsymbol{F})$, $(\boldsymbol{F} \wedge \boldsymbol{G})$, $(\boldsymbol{F} \vee \boldsymbol{G})$, $(\boldsymbol{F} \rightarrow \boldsymbol{G})$ y $(\boldsymbol{F} \leftrightarrow \boldsymbol{G})$ son fórmulas en $\boldsymbol{L}$.
  - Si $\boldsymbol{F}$ es una fórmula en $\boldsymbol{L}$, entonces $(\forall \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{F})$ y $(\exists \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{F})$ son fórmulas en $\boldsymbol{F}$.
- Notación:
  - Fórmulas en un lenguaje de primer orden: $\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G}, \dots, \boldsymbol{F_1}, \boldsymbol{F_2}, \dots$
  - Conjunto de las fórmulas del lenguaje $\boldsymbol{L}$: $\boldsymbol{Form}(\boldsymbol{L})$
  - Se siguen los mismo criterios para eliminar paréntesis que en la lógica proposicional, con $\forall$ y $\exists$ con la mayor precedencia.
- Ejemplos:
  - En el lenguaje de la vecindad entre provincias: $\forall \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{provincia}(\boldsymbol{x})$ $\forall \boldsymbol{x}\ (\exists \boldsymbol{y}\ \boldsymbol{vecinas}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}))$.
  - En el lenguaje de la aritmética: $\exists \boldsymbol{x}\ (\forall \boldsymbol{y}\ \leq (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}))$.

Variables

- Conjunto de variables de un término:

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{t}) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } \boldsymbol{t} \text{ es una constante} \\ \{\boldsymbol{x}\} & \text{si } \boldsymbol{t} \text{ es la variable } \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{V}(\boldsymbol{t_1}) \cup \ldots \cup \boldsymbol{V}(\boldsymbol{t_n}) & \text{si } \boldsymbol{t} \text{ es } \boldsymbol{f}(\boldsymbol{t_1}, \ldots, \boldsymbol{t_n}) \end{cases}$$

- Conjunto de variables de una fórmula:

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{F}) = \begin{cases} \boldsymbol{V}(\boldsymbol{t_1}) \cup \ldots \cup \boldsymbol{V}(\boldsymbol{t_n}) & \text{si } \boldsymbol{F} \text{ es } \boldsymbol{P}(\boldsymbol{t_1}, \ldots, \boldsymbol{t_n}) \\ \boldsymbol{V}(\boldsymbol{G}) & \text{si } \boldsymbol{F} \text{ es } \neg\boldsymbol{G} \\ \boldsymbol{V}(\boldsymbol{G}) \cup \boldsymbol{V}(\boldsymbol{H}) & \text{si } \boldsymbol{F} \text{ es } \boldsymbol{G} * \boldsymbol{H} \\ \boldsymbol{V}(\boldsymbol{G}) & \text{si } \boldsymbol{F} \text{ es } \forall \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{G} \\ \boldsymbol{V}(\boldsymbol{G}) & \text{si } \boldsymbol{F} \text{ es } \exists \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{G} \end{cases}$$

  Donde $*$ es una conectiva binaria.

- Ejemplos
  - El conjunto de variables de $\forall \boldsymbol{x}\ (\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}) \rightarrow \boldsymbol{P}(\boldsymbol{y}))$ es $\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\}$
  - El conjunto de variables de $\forall \boldsymbol{x}\ (\boldsymbol{R}(\boldsymbol{a}) \rightarrow \boldsymbol{P}(\boldsymbol{y}))$ es $\{\boldsymbol{y}\}$

- Apariciones libres y ligadas en una fórmula:
  - Una aparición de una variable $\boldsymbol{x}$ es ligada si ocurre en una subfórmula de la forma $\forall \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{G}$ o $\exists \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{G}$.
  - Una aparición de una variable $\boldsymbol{x}$ es libre si no es ligada.
- Ejemplos:
  - $\forall \boldsymbol{x}\ (\boldsymbol{P}(\underline{\boldsymbol{x}}) \to \boldsymbol{R}(\underline{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{y})) \to (\exists \boldsymbol{y}\ \boldsymbol{P}(\underline{\boldsymbol{y}}) \to \boldsymbol{R}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}))$
  - $\exists \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{R}(\underline{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{y}) \vee \exists \boldsymbol{y}\ \boldsymbol{P}(\underline{\boldsymbol{y}})$
  - $\forall \boldsymbol{x}\ (\boldsymbol{P}(\underline{\boldsymbol{x}}) \to \exists \boldsymbol{y}\ \boldsymbol{R}(\underline{\boldsymbol{x}}, \underline{\boldsymbol{y}}))$
  - $\forall \boldsymbol{z}\ (\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \to \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}))$

Variables

- Variables libres y ligadas en una fórmula:
  - Una variable $\boldsymbol{x}$ es libre si tiene una aparición libre.
  - Una variable $\boldsymbol{x}$ es ligada si tiene una aparición ligada.
  - Conjunto de las variables libres de una fórmula $\boldsymbol{F}$ es:

$$\boldsymbol{VL(F)} = \begin{cases} \boldsymbol{V(t_1)} \cup \ldots \cup \boldsymbol{V(t_n)} & \text{si } \boldsymbol{F} \text{ es } \boldsymbol{P(t_1, \ldots, t_n)} \\ \boldsymbol{VL(G)} & \text{si } \boldsymbol{F} \text{ es } \neg\boldsymbol{G} \\ \boldsymbol{VL(G)} \cup \boldsymbol{VL(H)} & \text{si } \boldsymbol{F} \text{ es } \boldsymbol{G * H} \\ \boldsymbol{VL(G)} - \{\boldsymbol{x}\} & \text{si } \boldsymbol{F} \text{ es } \forall \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{G} \\ \boldsymbol{VL(G)} - \{\boldsymbol{x}\} & \text{si } \boldsymbol{F} \text{ es } \exists \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{G} \end{cases}$$

  Donde $*$ es una conectiva binaria.

- Ejemplos:

	V.Ligadas	V.Libres
$\forall x\ (P(x) \to R(x,y)) \to (\exists y\ P(y) \to R(y,x))$	$\{x, y\}$	$\{x, y\}$
$\forall x\ (P(x) \to \exists y\ R(x,y))$	$\{x, y\}$	
$\forall z\ (P(x) \to R(x,y))$		$\{x, y\}$

Fórmulas cerradas y abiertas

- Una fórmula cerrada (o sentencia) es una fórmula sin variables libres.
- Una fórmula abierta es una fórmula con variables libres.
- Ejemplos
  - $\forall \boldsymbol{x}\ (\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \to \exists \boldsymbol{y}\ \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}))$ es una fórmula cerrada.
  - $\exists \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \vee \forall \boldsymbol{y}\ \boldsymbol{P}(\boldsymbol{y})$ es una fórmula abierta.

Estructuras

- Una estructura del lenguaje de primer orden $\boldsymbol{L}$ es un par $\mathcal{I} = (\boldsymbol{U}, \boldsymbol{I})$ tal que:
  - $\boldsymbol{U}$ es un conjunto no vacío, denominado universo de la estructura.
  - $\boldsymbol{I}$ es una función cuyo dominio es el conjunto de los símbolos propios del lenguaje $\boldsymbol{L}$ tal que:
    - Si $\boldsymbol{c}$ es una constante en $\boldsymbol{L}$, entonces $\boldsymbol{I}(\boldsymbol{c}) \in \boldsymbol{U}$.
    - Si $\boldsymbol{f}$ es un símbolo de función $\boldsymbol{n}$-ario en $\boldsymbol{L}$, entonces $\boldsymbol{I}(\boldsymbol{f})$ es una función de $\boldsymbol{U}^{\boldsymbol{n}}$ en $\boldsymbol{U}$.
    - Si $\boldsymbol{P}$ es un símbolo de predicado $\boldsymbol{0}$-ario en $\boldsymbol{L}$, entonces $\boldsymbol{I}(\boldsymbol{P}) \in \{\boldsymbol{0}, \boldsymbol{1}\}$.
    - Si $\boldsymbol{P}$ es un símbolo de predicado $\boldsymbol{n}$-ario en $\boldsymbol{L}$ con $\boldsymbol{n} > \boldsymbol{0}$, entonces $\boldsymbol{I}(\boldsymbol{P})$ es un subconjunto de $\boldsymbol{U}^{\boldsymbol{n}}$.
- Una estructura proporciona una interpretación $\boldsymbol{I}$ de los símbolos propios de un lenguaje $\boldsymbol{L}$ en un conjunto de individuos $\boldsymbol{U}$.

Estructuras

- Sea $\boldsymbol{L}$ el lenguaje con los siguientes símbolos propios:
  - Una constante: $\mathbf{0}$
  - Un símbolo de función monaria: $\boldsymbol{s}$.
  - Un símbolo de función binaria: $\odot$.
  - Un símbolo de relación binaria: $\prec$.
- Primera estructura para $\boldsymbol{L}$: $\boldsymbol{U_1} = \mathbb{N}$
  - $\boldsymbol{I_1}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$
  - $\boldsymbol{I_1}(\boldsymbol{s}) = \{\boldsymbol{n} \Longrightarrow \boldsymbol{n} + \mathbf{1} : \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}\}$
  - $\boldsymbol{I_1}(\odot) = \{(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{m}) \Longrightarrow \boldsymbol{n} + \boldsymbol{m} : \boldsymbol{n}, \boldsymbol{m} \in \mathbb{N}\}$
  - $\boldsymbol{I_1}(\prec) = \{(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{m}) : \boldsymbol{n}, \boldsymbol{m} \in \mathbb{N}; \boldsymbol{n} \leq \boldsymbol{m}\}$
- Segunda estructura para $\boldsymbol{L}$: $\boldsymbol{U_2} = [\mathbf{01}]^*$ (cadenas de $\mathbf{0}$ y $\mathbf{1}$)
  - $\boldsymbol{I_2}(\mathbf{0}) = \epsilon$
  - $\boldsymbol{I_2}(\boldsymbol{s}) = \{\boldsymbol{w} \Longrightarrow \boldsymbol{w}\mathbf{1} : \boldsymbol{w} \in [\mathbf{01}]^*\}$
  - $\boldsymbol{I_2}(\odot) = \{(\boldsymbol{w_1}, \boldsymbol{w_2}) \Longrightarrow \boldsymbol{w_1}\boldsymbol{w_2} : \boldsymbol{w_1}, \boldsymbol{w_2} \in [\mathbf{01}]^*\}$
  - $\boldsymbol{I_2}(\prec) = \{(\boldsymbol{w_1}, \boldsymbol{w_2}) : \boldsymbol{w_1}, \boldsymbol{w_2} \in [\mathbf{01}]^*; \boldsymbol{w_1}$ es prefijo de $\boldsymbol{w_2}\}$

Asignaciones e Interpretaciones

- Una asignación $\boldsymbol{A}$ en una estructura $\mathcal{I} = (\boldsymbol{U}, \boldsymbol{I})$ para un lenguaje $\boldsymbol{L}$ es función del conjunto de las variables $\boldsymbol{Var}$ en el universo de la estructura $\boldsymbol{U}$.
  - Una asignación hace corresponder a cada variable un individo del universo de la estructura.
- Una interpretación de un lenguaje $\boldsymbol{L}$ es un par $(\mathcal{I}, \boldsymbol{A})$ formado por una estructura $\mathcal{I}$ de $\boldsymbol{L}$ y una asignación $\boldsymbol{A}$ en $\mathcal{I}$.

Evaluación de términos

- Dada una estructura $\mathcal{I} = (\boldsymbol{U}, \boldsymbol{I})$ del lenguaje $\boldsymbol{L}$ y una asignación $\boldsymbol{A}$ en $\mathcal{I}$, la función de evaluación de términos $\mathcal{I}_{\boldsymbol{A}}$ es:

$$\mathcal{I}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{t}) = \begin{cases} \boldsymbol{I}(\boldsymbol{c}) & \text{si } \boldsymbol{t} \text{ es la constante } \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) & \text{si } \boldsymbol{t} \text{ es la variable } \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{I}(\boldsymbol{f})(\mathcal{I}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{t}_1), \dots, \mathcal{I}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{t}_n)) & \text{si } \boldsymbol{t} \text{ es } \boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}_1, \dots, \boldsymbol{t}_n) \end{cases}$$

- $\mathcal{I}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{t})$ es el valor de $\boldsymbol{t}$ en $\mathcal{I}$ respecto de $\boldsymbol{A}$.

Evaluación de términos

- Consideramos el lenguaje $L = \{0, s, \odot, \prec\}$ y el término $t = s(x \odot s(0))$.
- En la estructura $\mathcal{I}^1 = (\mathbb{N}, I_1)$ con $A(x) = 3$

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}^1{}_A(t) &= \mathcal{I}^1{}_A(s(x \odot s(0))) \\
&= I_1(s)(I_1(\odot)(A(x), I_1(s)(I_1(0)))) \\
&= +^1(3 + +^1(0)) \\
&= 5
\end{aligned}$$

- En la estructura $\mathcal{I}^2 = ([01]^*, I_2)$ con $A(x) = 10$

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}^2{}_A(t) &= \mathcal{I}^2{}_A(s(x \odot s(0))) \\
&= I_2(s)(I_2(\odot)(A(x), I_2(s)(I_2(0)))) \\
&= @^1(10 \; @ \; @^1(\epsilon)) \\
&= 1011
\end{aligned}$$

Evaluación de fórmulas

- Dada una estructura $\mathcal{I} = (\boldsymbol{U}, \boldsymbol{I})$ del lenguaje $\boldsymbol{L}$ y una asignación $\boldsymbol{A}$ en $\mathcal{I}$, la función de evaluación de fórmulas $\mathcal{I}_{\boldsymbol{A}}$ es:

$$
\begin{array}{ll}
\mathcal{I}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{P}(\boldsymbol{t}_1, \dots, \boldsymbol{t}_n)) & = \boldsymbol{H}_{\boldsymbol{I}(\boldsymbol{P})}(\mathcal{I}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{t}_1), \dots, \mathcal{I}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{t}_n)) \\
\mathcal{I}_{\boldsymbol{A}}(\neg \boldsymbol{G}) & = \boldsymbol{H}_{\neg}(\mathcal{I}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{G})) \\
\mathcal{I}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{G} * \boldsymbol{H}) & = \boldsymbol{H}_{*}(\mathcal{I}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{G}), \mathcal{I}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{H})) \\
\mathcal{I}_{\boldsymbol{A}}(\forall \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{G}) & = \begin{cases} \mathbf{1} & \text{si para todo } \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{U} \\ & \text{se tiene } \mathcal{I}_{\boldsymbol{A}[\boldsymbol{x}/\boldsymbol{u}]}(\boldsymbol{G}) = \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \text{en caso contrario} \end{cases} \\
\mathcal{I}_{\boldsymbol{A}}(\exists \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{G}) & = \begin{cases} \mathbf{1} & \text{si existe un } \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{U} \\ & \text{tal que } \mathcal{I}_{\boldsymbol{A}[\boldsymbol{x}/\boldsymbol{u}]}(\boldsymbol{G}) = \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \text{en caso contrario} \end{cases}
\end{array}
$$

  Donde $*$ es una conectiva binaria.

- $\mathcal{I}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{F})$ es el valor de $\boldsymbol{F}$ en $\mathcal{I}$ respecto de $\boldsymbol{A}$.

Evaluación de fórmulas

- Si R es un subconjunto de U^n, entonces la función de verdad de R es:

$$H_R(u_1, \dots, u_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } (u_1, \dots, u_n) \in R \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

- Si A es una asignación en la estructura (U, I), $x \in Var$ y $u \in U$, entonces la variante de la asignación A para x igual a u es:

$$A[x/u](y) = \begin{cases} u & \text{si } y \text{ es la variable } x \\ A(y) & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Evaluación de fórmulas

- Evaluación de $\forall x\ \exists y\ P(x,y)$ en la estructura $\mathcal{I} = (U, I)$ tal que $U = \{1,2\}$ e $I(P) = \{(1,1),(2,2)\}$:

$$\mathcal{I}_A(\forall x\ \exists y\ P(x,y)) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathcal{I}_{A[x/1]}(\exists y\ P(x,y)) = 1 \\ & \text{y } \mathcal{I}_{A[x/2]}(\exists y\ P(x,y)) = 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$\mathcal{I}_{A[x/1]}(\exists y\ P(x,y)) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathcal{I}_{A[y/1,x/1]}(P(x,y)) = 1 \checkmark \\ & \text{o } \mathcal{I}_{A[y/2,x/1]}(P(x,y)) = 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{A[y/1,x/1]}(P(x,y)) &= H_{I(P)}(\mathcal{I}_{A[y/1,x/1]}(x), \mathcal{I}_{A[y/1,x/1]}(y)) \\ &= H_{I(P)}(A[y/1,x/1](x), A[y/1,x/1](y)) \\ &= H_{I(P)}(1,1) \\ &= 1 \text{ pues } (1,1) \in I(P) \end{aligned}$$

Por tanto $\mathcal{I}_{A[x/1]}(\exists y\ P(x,y)) = 1$.

Evaluación de fórmulas

- Evaluación de $\forall x\ \exists y\ P(x,y)$ en la estructura $\mathcal{I} = (U, I)$ tal que $U = \{1, 2\}$ e $I(P) = \{(1,1), (2,2)\}$:

$$\mathcal{I}_A(\forall x\ \exists y\ P(x,y)) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathcal{I}_{A[x/1]}(\exists y\ P(x,y)) = 1\ \checkmark \\ & \text{y } \mathcal{I}_{A[x/2]}(\exists y\ P(x,y)) = 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$\mathcal{I}_{A[x/2]}(\exists y\ P(x,y)) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathcal{I}_{A[y/1,x/2]}(P(x,y)) = 1\ \text{✗} \\ & \text{o } \mathcal{I}_{A[y/2,x/2]}(P(x,y)) = 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{A[y/1,x/2]}(P(x,y)) &= H_{I(P)}(\mathcal{I}_{A[y/1,x/2]}(x), \mathcal{I}_{A[y/1,x/2]}(y)) \\ &= H_{I(P)}(A[y/1,x/2](x), A[y/1,x/2](y)) \\ &= H_{I(P)}(2,1) \\ &= 0 \text{ pues } (2,1) \notin I(P) \end{aligned}$$

- Evaluación de $\forall x\ \exists y\ P(x,y)$ en la estructura $\mathcal{I} = (U, I)$ tal que $U = \{1,2\}$ e $I(P) = \{(1,1),(2,2)\}$:

$$\mathcal{I}_A(\forall x\ \exists y\ P(x,y)) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathcal{I}_{A[x/1]}(\exists y\ P(x,y)) = 1 \ \checkmark \\ & \text{y } \mathcal{I}_{A[x/2]}(\exists y\ P(x,y)) = 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$\mathcal{I}_{A[x/2]}(\exists y\ P(x,y)) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathcal{I}_{A[y/1,x/2]}(P(x,y)) = 1 \ \text{✗} \\ & \text{o } \mathcal{I}_{A[y/2,x/2]}(P(x,y)) = 1 \ \checkmark \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{A[y/2,x/2]}(P(x,y)) &= H_{I(P)}(\mathcal{I}_{A[y/2,x/2]}(x), \mathcal{I}_{A[y/2,x/2]}(y)) \\ &= H_{I(P)}(A[y/2,x/2](x), A[y/2,x/2](y)) \\ &= H_{I(P)}(2,2) \\ &= 1 \text{ pues } (2,2) \in I(P) \end{aligned}$$

Por tanto $\mathcal{I}_{A[x/2]}(\exists y\ P(x,y)) = 1$.

Evaluación de fórmulas

- Evaluación de $\forall x\ \exists y\ P(x, y)$ en la estructura $\mathcal{I} = (U, I)$ tal que $U = \{1, 2\}$ e $I(P) = \{(1, 1), (2, 2)\}$:

$$\mathcal{I}_A(\forall x\ \exists y\ P(x, y)) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathcal{I}_{A[x/1]}(\exists y\ P(x, y)) = 1\ \checkmark \\ & \text{y } \mathcal{I}_{A[x/2]}(\exists y\ P(x, y)) = 1\ \checkmark \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Por tanto $\mathcal{I}(\forall x\ \exists y\ P(x, y)) = 1$.

Evaluación de fórmulas

- Evaluación de $\forall x\ (g(g(x)) = x)$ en la estructura $\mathcal{I} = (U, I)$ tal que $U = \{1, 2\}$ e $I(g) = \{1 \Longrightarrow 2, 2 \Longrightarrow 1\}$:

$$\mathcal{I}_A(\forall x\ (g(g(x)) = x)) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathcal{I}_{A[x/1]}(g(g(x)) = x) = 1 \\ & \text{y } \mathcal{I}_{A[x/2]}(g(g(x)) = x) = 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{A[x/1]}(g(g(x)) = x) &= H_{=}(\mathcal{I}_{A[x/1]}(g(g(x))), \mathcal{I}_{A[x/1]}(x)) \\ &= H_{=}(I(g)(\mathcal{I}_{A[x/1]}(g(x))), 1) \\ &= H_{=}(I(g)(I(g)(\mathcal{I}_{A[x/1]}(x))), 1) \\ &= H_{=}(I(g)(I(g)(1)), 1) \\ &= H_{=}(I(g)(2), 1) \\ &= H_{=}(1, 1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Evaluación de fórmulas

- Evaluación de $\forall x\,(g(g(x)) = x)$ en la estructura $\mathcal{I} = (U, I)$ tal que $U = \{1, 2\}$ e $I(g) = \{1 \Longrightarrow 2, 2 \Longrightarrow 1\}$:

$$\mathcal{I}_A(\forall x\,(g(g(x)) = x)) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathcal{I}_{A[x/1]}(g(g(x)) = x) = 1 \checkmark \\ & \text{y } \mathcal{I}_{A[x/2]}(g(g(x)) = x) = 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{A[x/2]}(g(g(x)) = x) &= H_=(\mathcal{I}_{A[x/2]}(g(g(x))), \mathcal{I}_{A[x/2]}(x)) \\ &= H_=(I(g)(\mathcal{I}_{A[x/2]}(g(x))), 2) \\ &= H_=(I(g)(I(g)(\mathcal{I}_{A[x/2]}(x))), 2) \\ &= H_=(I(g)(I(g)(2)), 2) \\ &= H_=(I(g)(1), 2) \\ &= H_=(2, 2) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Evaluación de fórmulas

- Evaluación de $\forall \boldsymbol{x}\ (\boldsymbol{g}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{x})$ en la estructura $\mathcal{I} = (\boldsymbol{U}, \boldsymbol{I})$ tal que $\boldsymbol{U} = \{1, 2\}$ e $\boldsymbol{I}(\boldsymbol{g}) = \{1 \Longrightarrow 2, 2 \Longrightarrow 1\}$:

$$\mathcal{I}_{\boldsymbol{A}}(\forall \boldsymbol{x}\ (\boldsymbol{g}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{x})) = \begin{cases} \mathbf{1} & \text{si } \mathcal{I}_{\boldsymbol{A}[x/1]}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{x}) = \mathbf{1} \checkmark \\ & \text{y } \mathcal{I}_{\boldsymbol{A}[x/2]}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{x}) = \mathbf{1} \checkmark \\ \mathbf{0} & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Por tanto $\mathcal{I}_{\boldsymbol{A}}(\forall \boldsymbol{x}\ (\boldsymbol{g}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{x})) = \mathbf{1}$.

Evaluación de fórmulas

- Dependencia del Universo.
  Sea $\boldsymbol{F} = \forall \boldsymbol{x}\ \exists \boldsymbol{y}\ \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, entonces:
  - $\mathcal{I}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{F}) = \mathbf{1}$ con $\mathcal{I} = (\mathbb{Z}, \boldsymbol{I})$, $\boldsymbol{I}(\boldsymbol{R}) = >$ y $\boldsymbol{A}$ una asignación.
  - $\mathcal{I}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{F}) = \mathbf{0}$ con $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, \boldsymbol{I})$, $\boldsymbol{I}(\boldsymbol{R}) = >$ y $\boldsymbol{A}$ una asignación.
- Dependencia de la Estructura.
  Sea $\boldsymbol{F} = \exists \boldsymbol{x}\ \forall \boldsymbol{y}\ \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, entonces:
  - $\mathcal{I}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{F}) = \mathbf{1}$ con $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, \boldsymbol{I})$, $\boldsymbol{I}(\boldsymbol{R}) = \leq$ y $\boldsymbol{A}$ una asignación.
  - $\mathcal{I}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{F}) = \mathbf{0}$ con $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, \boldsymbol{I})$, $\boldsymbol{I}(\boldsymbol{R}) = \geq$ y $\boldsymbol{A}$ una asignación.
- Dependencia de la Asignación.
  Sea $\boldsymbol{F} = \forall \boldsymbol{y}\ \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, entonces:
  - $\mathcal{I}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{F}) = \mathbf{1}$ con $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, \boldsymbol{I})$, $\boldsymbol{I}(\boldsymbol{R}) = \leq$ y $\boldsymbol{A}$ una asignación en $\mathcal{I}$ tal que $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$.
  - $\mathcal{I}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{F}) = \mathbf{0}$ con $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, \boldsymbol{I})$, $\boldsymbol{I}(\boldsymbol{R}) = \leq$ y $\boldsymbol{A}$ una asignación en $\mathcal{I}$ tal que $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{1}$.

Evaluación de fórmulas

- Sea $\boldsymbol{t}$ un término de $\boldsymbol{L}$ e $\mathcal{I}$ una estructura de $\boldsymbol{L}$:
  - Si $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son dos asignaciones en $\mathcal{I}$ que coinciden sobre las variables de $\boldsymbol{t}$, entonces $\mathcal{I}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{t}) = \mathcal{I}_{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{t})$.
  - Si $\boldsymbol{t}$ no tiene variables, entonces $\mathcal{I}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{t}) = \mathcal{I}_{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{t})$ para cualesquiera asignaciones $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ en $\mathcal{I}$.
- Sea $\boldsymbol{F}$ una fórmula de $\boldsymbol{L}$ e $\mathcal{I}$ una estructura de $\boldsymbol{L}$:
  - Si $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son dos asignaciones en $\mathcal{I}$ que coinciden sobre las variables libres de $\boldsymbol{F}$, entonces $\mathcal{I}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{F}) = \mathcal{I}_{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{F})$.
  - Si $\boldsymbol{F}$ es cerrada, entonces $\mathcal{I}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{F}) = \mathcal{I}_{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{F})$ para cualesquiera asignaciones $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ en $\mathcal{I}$.

Modelo de una fórmula

- Sea F una fórmula de L e $\mathcal{I}$ una estructura de L:
  - $(\mathcal{I}, A)$ es una realización de F ($\mathcal{I}_A \models F$), si A es una asignación en $\mathcal{I}$ tal que $\mathcal{I}_A(F) = 1$.
  - $\mathcal{I}$ es un modelo de F ($\mathcal{I} \models F$), si para toda asignación A en $\mathcal{I}$ se tiene $\mathcal{I}_A \models F$.
- Ejemplos:
  - Sea $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, I)$ una estructura tal que $I(f) = +$ e $I(g) = *$.
    - Si A es una asignación en $\mathcal{I}$ tal que $A(x) = A(y) = 2$, entonces $\mathcal{I}_A \models f(x,x) = g(x,x)$.
    - Si B es una asignación en $\mathcal{I}$ tal que $B(x) = 1$ y $B(y) = 2$, entonces $\mathcal{I}_B \not\models f(x,x) = g(x,x)$.
    - $\mathcal{I} \models f(x,y) = f(y,x)$
    - $\mathcal{I} \not\models f(x,y) = g(x,y)$

Satisfacibilidad y validez

- Sea $\boldsymbol{F}$ una fórmula de $\boldsymbol{L}$:
  - $\boldsymbol{F}$ es válida ($\models \boldsymbol{F}$) si toda estructura de $\boldsymbol{L}$ es un modelo de $\boldsymbol{F}$.
  - $\boldsymbol{F}$ es satisfacible si tiene alguna realización.
  - $\boldsymbol{F}$ es insatisfacible si no tiene ninguna realización.
- Ejemplos:
  - $\exists \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \lor \forall \boldsymbol{x}\ \neg \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$ es válida.
  - $\exists \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \land \exists \boldsymbol{x}\ \neg \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$ es satisfacible, pero no válida.
  - $\forall \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \land \exists \boldsymbol{x}\ \neg \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$ es insatisfacible.

- Relaciones entre estos conceptos:
  - F es válida $\Longleftrightarrow$ $\neg F$ es insatisfacible.
  - F es válida $\Longrightarrow$ F es satisfacible.
  - F es satisfacible $\not\Longrightarrow$ $\neg F$ es insatisfacible.
- Sea F una fórmula en L y $x_1, \dots, x_n$ las variables libres de F:
  - F es válida $\Longleftrightarrow$ $\forall x_1 \dots \forall x_n\ F$ es válida.
    La fórmula $\forall x_1 \dots \forall x_n\ F$ es el cierre universal de F.
  - F es satisfacible $\Longleftrightarrow$ $\exists x_1 \dots \exists x_n\ F$ es satisfacible.
    La fórmula $\exists x_1 \dots \exists x_n\ F$ es el cierre existencial de F.

Fórmulas equivalentes

- Dos fórmulas F y G de un lenguaje L son equivalentes ($F \equiv G$) si para toda estructura $\mathcal{I}$ de L y toda asignación A en $\mathcal{I}$ se tiene $\mathcal{I}_A(F) = \mathcal{I}_A(G)$.
- Equivalencias importantes:
  - Las derivadas de las conectivas proposicionales.
  - Conmutatividad de los cuantificadores:
    $$\forall x\ \forall y\ F \equiv \forall y\ \forall x\ F$$
    $$\exists x\ \exists y\ F \equiv \exists y\ \exists x\ F$$
  - Cuantificadores con la negación:
    $$\forall x\ (\neg F) \equiv \neg(\exists x\ F)$$
    $$\exists x\ (\neg F) \equiv \neg(\forall x\ F)$$
  - Cuantificador universal con la conjunción:
    $$\forall x\ (F \wedge G) \equiv (\forall x\ F) \wedge (\forall x\ G)$$
  - Cuantificador existencial con la disyunción:
    $$\exists x\ (F \vee G) \equiv (\exists x\ F) \vee (\exists x\ G)$$
  - Cuantificador existencial con la implicación:
    $$\exists x\ (F \to G) \equiv (\forall x\ F) \to (\exists x\ G)$$

Propiedades de la equivalencia lógica

- La equivalencia lógica es una relación de equivalencia
  - Reflexividad: $\boldsymbol{F} \equiv \boldsymbol{F}$
  - Simetría: Si $\boldsymbol{F} \equiv \boldsymbol{G}$, entonces $\boldsymbol{G} \equiv \boldsymbol{F}$.
  - Transitividad: Si $\boldsymbol{F} \equiv \boldsymbol{G}$ y $\boldsymbol{G} \equiv \boldsymbol{H}$, entonces $\boldsymbol{F} \equiv \boldsymbol{H}$.
- Principio de sustitución de fórmulas equivalentes: Si en una fórmula $\boldsymbol{F}$ se sustituye una subfórmula $\boldsymbol{G}$ por otra lógicamente equivalente $\boldsymbol{G'}$, entonces la fórmula obtenida $\boldsymbol{F'}$ es logicamente equivalente a la original.
  - $\boldsymbol{F} = \neg(\forall \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})) \to \exists \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})$
  - $\boldsymbol{G} = \neg(\forall \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}))$
  - $\boldsymbol{G'} = \exists \boldsymbol{y}\ \neg \boldsymbol{P}(\boldsymbol{y})$
  - $\boldsymbol{F'} = \exists \boldsymbol{y}\ \neg \boldsymbol{P}(\boldsymbol{y}) \to \exists \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})$

Conjuntos de fórmulas

- Modelo de un conjunto de fórmulas. Sea $\boldsymbol{S}$ un conjunto de fórmulas de $\boldsymbol{L}$, $\mathcal{I}$ una estructura de $\boldsymbol{L}$ y $\boldsymbol{A}$ una asignación en $\mathcal{I}$:
  - $(\mathcal{I}, \boldsymbol{A})$ es una realización de $\boldsymbol{S}$ ($\mathcal{I}_{\boldsymbol{A}} \models \boldsymbol{S}$) si para toda $\boldsymbol{F} \in \boldsymbol{S}$, se tiene que $(\mathcal{I}, \boldsymbol{A})$ es una realización de $\boldsymbol{F}$.
  - $\mathcal{I}$ es un modelo de $\boldsymbol{S}$ ($\mathcal{I} \models \boldsymbol{S}$) si para toda $\boldsymbol{F} \in \boldsymbol{S}$, se tiene que $\mathcal{I} \models \boldsymbol{F}$.
- Ejemplos:
  - Sea $\boldsymbol{S} = \{\forall \boldsymbol{y}\ \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \forall \boldsymbol{y}\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}\}$
    - $(\mathcal{I}, \boldsymbol{A})$ con $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, \boldsymbol{I})$, $\boldsymbol{I}(\boldsymbol{R}) = \leq$, $\boldsymbol{I}(\boldsymbol{f}) = +$ y $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ es una realización de $\boldsymbol{S}$.
    - $(\mathcal{I}, \boldsymbol{A})$ con $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, \boldsymbol{I})$, $\boldsymbol{I}(\boldsymbol{R}) = <$, $\boldsymbol{I}(\boldsymbol{f}) = +$ y $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ no es una realización de $\boldsymbol{S}$.
  - Sea $\boldsymbol{S} = \{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{y}), \boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}\}$
    - $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, \boldsymbol{I})$, $\boldsymbol{I}(\boldsymbol{R}) = \leq$, $\boldsymbol{I}(\boldsymbol{f}) = +$ e $\boldsymbol{I}(\boldsymbol{e}) = \boldsymbol{0}$ es un modelo de $\boldsymbol{S}$.
    - $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, \boldsymbol{I})$, $\boldsymbol{I}(\boldsymbol{R}) = <$, $\boldsymbol{I}(\boldsymbol{f}) = +$ e $\boldsymbol{I}(\boldsymbol{e}) = \boldsymbol{0}$ no es un modelo de $\boldsymbol{S}$.

Conjuntos de fórmulas

- Consistencia de un conjunto de fórmulas. Sea $\boldsymbol{S}$ un conjunto de fórmulas de $\boldsymbol{L}$:
  - $\boldsymbol{S}$ es consistente si tiene alguna realización.
  - $\boldsymbol{S}$ es inconsistente si no tiene ninguna realización.
- Ejemplos:
  - $\{\forall \boldsymbol{y}\ \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \forall \boldsymbol{y}\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}\}$ es consistente
  - $\{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \to \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}), \forall \boldsymbol{y}\ \boldsymbol{P}(\boldsymbol{y}), \neg \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})\}$ es inconsistente
- Si $\boldsymbol{S}$ es un conjunto de fórmulas cerradas de $\boldsymbol{L}$, entonces $\boldsymbol{S}$ es consistente si y solo si $\boldsymbol{S}$ tiene algún modelo.

Conjuntos de fórmulas

- Consecuencia lógica. Sea $\boldsymbol{F}$ una fórmula de $\boldsymbol{L}$ y $\boldsymbol{S}$ un conjunto de fórmulas de $\boldsymbol{L}$:
  - $\boldsymbol{F}$ es consecuencia lógica de $\boldsymbol{S}$ ($\boldsymbol{S} \models \boldsymbol{F}$) si todas las realizaciones de $\boldsymbol{S}$ lo son también de $\boldsymbol{F}$.
- Ejemplos:
  - $\{\forall x\ P(x)\} \models P(y)$
  - $\{P(y)\} \not\models \{\forall x\ P(x)\}$
  - $\{\forall x\ (P(x) \to Q(x)), P(c)\} \models Q(c)$
  - $\{\forall x\ (P(x) \to Q(x)), Q(c)\} \not\models P(c)$
- $\boldsymbol{S} \models \boldsymbol{F} \iff \boldsymbol{S} \cup \{\neg \boldsymbol{F}\}$ es inconsistente.
- Si $\boldsymbol{S} \cup \{\boldsymbol{F}\}$ es un conjunto de fórmulas cerradas de $\boldsymbol{L}$, entonces son equivalentes:
  - $\boldsymbol{F}$ es consecuencia lógica de $\boldsymbol{S}$.
  - Todos los modelos de $\boldsymbol{S}$ también lo son de $\boldsymbol{F}$.

Cálculos lógicos

- Un cálculo lógico ($\vdash$) es un procedimiento que permite comprobar la validez de una fórmula.
- Existen cálculos lógicos correctos ($\vdash \implies \models$) y completos ($\models \implies \vdash$) para la lógica de primer orden.
  - Generalmente se trata de extensiones de los cálculos proposicionales incluyendo los cuantificadores: tableros semánticos, secuentes, deducción natural, resolución, ...
- La lógica de primer orden es semidecidible: no existen procedimientos capaces de decidir en un número finito de pasos si una fórmula es válida o no.
  - Existen procedimientos capaces de responder afirmativamente si una fórmula es válida, pero que no son capaces de dar respuesta cuando no lo es.

Otras lógicas

Lógicas de Orden Superior

- Las lógicas de orden superior son extensiones de la lógica de primer orden que incluyen entre otras cosas:
  - Variables que representan propiedades, funciones y relaciones.
  - Cuantificadores que operan sobre estas variables.
  - Funciones que actúan sobre símbolos de función y predicado.
  - Propiedades de los símbolos de función y predicado.
- Se trata de lógicas para las que no existen cálculos lógicos completos.
- Se utilizan para formalizar matemáticas de orden superior.
- Sistemas de razonamiento: Isabelle/HOL, PVS, HOL-Ligth, ...

Lógicas Descriptivas

- Lenguajes de representación de conocimiento terminológico estructurado. Disponen de:
  - Un formalismo descriptivo: conceptos, roles, individuos y constructores.
  - Un formalismo terminológico: propiedades de la terminología descriptiva.
  - Un formalismo asertivo: propiedades de individuos.
- Se trata de lógicas decidibles que están situadas entre la lógica proposicional y la lógica de primer orden.
- Se utilizan para formalizar ontologías.
- Sistemas de razonamiento: FaCT, RACER, CEL, JCEL, ...

Lógicas Modales

- Lógicas que permiten calificar la verdad de los juicios. Extienden la lógica de primer orden con operadores modales:
  - Operador de necesidad.
  - Operador de posibilidad.
- Su semántica se basa en la existencia de mundos posibles o maximales y las relaciones de accesibilidad entre ellos.
- Las lógicas temporales son un tipo de lógicas modales usadas para la formalización de sistemas software y hardware.
- Sistemas de razonamiento: SMV, SPIN, KRONOS, NuSMV, ...

Logicas multivaluadas

- Las lógicas multivaluadas son extensiones de las lógicas clásicas admitiendo una variedad más amplia de valores de verdad.
  - Lógicas con un número finito de valores de verdad: Lógicas trivaluadas de Lukasiewicz o de Kleene.
  - Lógicas con un número infinito de valores de verdad: Lógica difusa, lógica probabilística.
- Se usan en entornos en los que la toma de decisiones depende del grado de certeza de las hipótesis.

Bibliografía

- M. Ben-Ari. *Mathematical logic for computer science*
  Capítulos 1 y 2.
- J.A. Díez. *Iniciación a la Lógica*
  Capítulos 2 y 3.
- M. Huth y M. Ryan. *Logic in computer science: modelling and reasoning about systems*