OTTER: Introducción

Francisco J. Martín Mateos
José A. Alonso Jiménez

Dpto. Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial
Universidad de Sevilla

¿Qué es OTTER?

OTTER es un demostrador automático para la Lógica de Primer Orden con Igualdad.

- El **lenguaje** es el de la lógica de primer orden con una sintaxis similar a PROLOG.
- Es un demostrador por refutación: busca una contradicción a partir de un conjunto de fórmulas.
- El razonamiento se realiza principalmente por resolución (resolución binaria, resolución UR, hiperresolución), con reglas de paramodulación y demodulación para tratar la igualdad.
- Las **pruebas** son secuencias de fórmulas en las que se indica la forma en que cada una de ellas se obtiene a partir de las anteriores. Estas secuencias terminan en la fórmula falsa.

¿Qué es OTTER?

- Desarrollado por William McCune en la sección de Matemáticas y Ciencias de la Computación del "Argonne National Laboratory" (Chicago - EEUU).
- Aplicaciones: Algebra abstracta y lógica formal.
- Exito más importante: Solución al problema de Robbins.

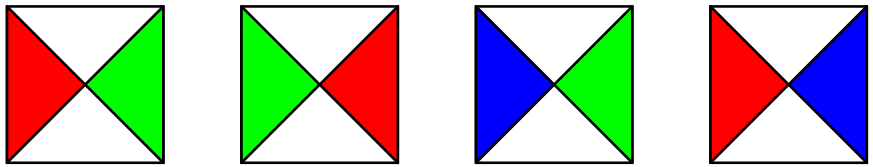
Instalación y ejecución

- Windows: **`Otter33-Win32.zip`**
- Fuentes: **`otter-3.3f.tgz`**
- Incluir la formalización en un fichero de entrada.
- Ejecución en línea de comandos:

  `otter < entrada.in > salida.out`

Ejemplos de problema

- **Rompecabezas**: Un puzzle tiene cuatro tipos distintos de fichas. Estas fichas son las siguientes:



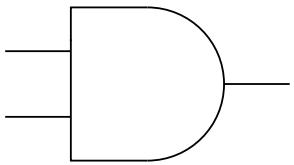
Encontrar todas las maneras posibles de colocar en línea cuatro de estas fichas, no necesariamente distintas, de forma que los colores de los lados adyacentes coincidan.

Ejemplos de problema

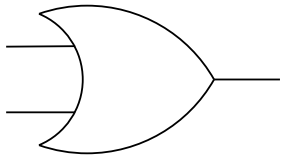
- **Matemáticas**: Sea G un grupo y e su elemento neutro. Demostrar que si para todo x de G, $x \times x = e$, entonces G es conmutativo.
- Axiomas de grupo:
  - $\forall x\ (e \times x = x)$
  - $\forall x\ (x \times e = x)$
  - $\forall x\ (x^{-1} \times x = e)$
  - $\forall x\ (x \times x^{-1} = e)$
  - $\forall x\ \forall y\ \forall z\ ((x \times y) \times z = x \times (y \times z))$
- Hipótesis:
  - $\forall x\ (x \times x = e)$
- Conclusión:
  - $\forall x\ \forall y\ (x \times y = y \times x)$

Ejemplos de problema

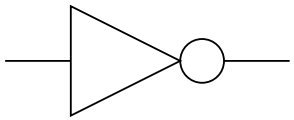
- **Diseño de circuitos lógicos**: Diseñar un circuito lógico que actúe como una componente OR construido exclusivamente con componentes AND y NOT.



i_1	i_2	o_1
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



i_1	i_2	o_1
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



i_1	o_1
0	1
1	0

Alfabeto de la lógica de primer orden

- Variables.
- Funciones: $f(x_1, \ldots, x_n)$
- Predicados: $P(x_1, \ldots, x_m)$
- Conectivas lógicas:
  $\neg$ (negación),
  $\wedge$ (conjunción),
  $\vee$ (disyunción),
  $\rightarrow$ (implicación),
  $\leftrightarrow$ (equivalencia).
- Cuantificadores:
  $\forall$ (universal),
  $\exists$ (existencial).
- Símbolos auxiliares: "(" y ")".

Elementos del lenguaje de OTTER

- Variables, funciones y predicados:
  Cadenas alfanuméricas, `$` y _.
- No se consideran variables libres, todas las variables deben aparecer cuantificadas.
- Conectivas lógicas
  - `-` (negación),
  - `&` (conjunción),
  - `|` (disyunción),
  - `->` (implicación),
  - `<->` (equivalencia).
- Cuantificadores
  - `all` (universal),
  - `exists` (existencial).
- Símbolos auxiliares: `(` y `)`.

Fórmulas de la lógica de primer orden

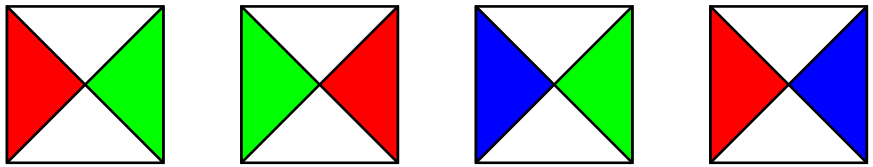
- Cualquier predicado es una fórmula:
  $P(x, y)$ (fórmulas atómicas).
- Si F y G son fórmulas: $(\neg F)$ (negación de F),
  $(F \wedge G)$ (conjunción de F y G),
  $(F \vee G)$ (disyunción de F y G),
  $(F \rightarrow G)$ (F implica G),
  $(F \leftrightarrow G)$ (equivalencia entre F y G).
- Si F es una fórmula y x una variable
  $(\forall x\ F)$ (para todo x se tiene F),
  $(\exists x\ F)$ (existe un x para el que se tiene F).
- Eliminación de paréntesis
  - Paréntesis externos.
  - Precedencia: $\forall, \exists, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$.
  - Asociatividad: $\wedge$ y $\vee$ asocian por la derecha.
  - Agrupación de cuantificadores consecutivos del mismo tipo.

Fórmulas en OTTER

- $(\forall x\ (\neg P(x)))$
  $\Rightarrow_{Simp}\ \forall x\ \neg P(x)$
  $\Rightarrow_{Otter}$ `all x -P(x)`
- $(\forall x\ (\exists y\ P(x,y)))$
  $\Rightarrow_{Simp}\ \forall x\ \exists y\ P(x,y)$
  $\Rightarrow_{Otter}$ `all x exists y P(x,y)`
- $(\forall x\ (\forall y\ (\forall z\ P(x,y,z))))$
  $\Rightarrow_{Simp}\ \forall x\ y\ z\ P(x,y,z)$
  $\Rightarrow_{Otter}$ `all x y z P(x,y,z)`
- $(\forall x\ ((P(x) \wedge (Q(x) \wedge R(x))) \rightarrow S(x)))$
  $\Rightarrow_{Simp}\ \forall x\ (P(x) \wedge Q(x) \wedge R(x) \rightarrow S(x))$
  $\Rightarrow_{Otter}$ `all x (P(x) & Q(x) & R(x) -> S(x))`

Ejemplos: Rompecabezas

- **Rompecabezas**: Un puzzle tiene cuatro tipos distintos de fichas. Estas fichas son las siguientes:



Encontrar todas las maneras posibles de colocar en línea cuatro de estas fichas, no necesariamente distintas, de forma que los colores de los lados adyacentes coincidan.

Ejemplos: Rompecabezas

- Lenguaje del problema
  - **`ficha(x,y,z)`**: La ficha **`x`** tiene a la izquierda el color **`y`**, y a la derecha el color **`z`**.
  - **`posicion(x1,x2,x3,x4)`**: Las fichas **`x1`**, **`x2`**, **`x3`**, **`x4`** forman una posible combinación para resolver el problema.
- Formalización en OTTER.
  - Las fórmulas se agrupan en listas. **`formula_list(sos)`** y **`end_of_list`** delimitan el conjunto soporte.
  - Las opciones de búsqueda se indican mediante banderas y parámetros. **`set(auto2)`** activa el modo automático.

Ejemplos: Rompecabezas

- Formalización en OTTER
  - Si las fichas **x1**, **x2**, **x3**, **x4** se pueden colocar en línea de forma que los colores de los lados adyacentes coinciden, entonces forman una combinación válida para resolver el problema.

```
all x1 x2 x3 x4 y1 y2 y3 y4 y5
 ((ficha(x1,y1,y2) & ficha(x2,y2,y3) &
   ficha(x3,y3,y4) & ficha(x4,y4,y5)) ->
  posicion(x1,x2,x3,x4)).
```

Ejemplos: Rompecabezas

- Formalización en OTTER
  - Las fichas que se pueden colocar se identifican con los números `1`, `2`, `3` y `4`.

```
ficha(1,rojo,verde).
ficha(2,verde,rojo).
ficha(3,azul,verde).
ficha(4,rojo,azul).
```

  - ¿Se puede obtener alguna combinación válida para resolver el problema?

```
all x1 x2 x3 x4 -posicion(x1,x2,x3,x4).
```

Ejemplos: Rompecabezas

- Formalización en OTTER

fichas.in

```
set(auto2).

formula_list(sos).
 all x1 x2 x3 x4 y1 y2 y3 y4 y5
  ((ficha(x1,y1,y2) & ficha(x2,y2,y3) &
    ficha(x3,y3,y4) & ficha(x4,y4,y5)) ->
   posicion(x1,x2,x3,x4)).

 ficha(1,rojo,verde).
 ficha(2,verde,rojo).
 ficha(3,azul,verde).
 ficha(4,rojo,azul).

 all x1 x2 x3 x4 -posicion(x1,x2,x3,x4).
end_of_list.
```

Ejemplos: Rompecabezas

- Ejecución: `otter < fichas.in > fichas.out`

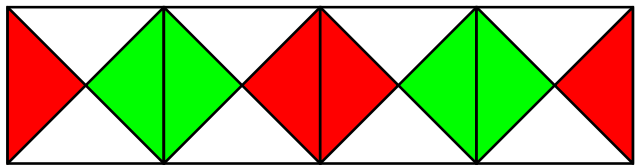
Prueba obtenida

```
1 [] -ficha(x,y,z) | -ficha(u,z,v) | -ficha(w,v,v6) |
     -ficha(v7,v6,v8) | posicion(x,u,w,v7).
2 [] ficha(1,rojo,verde).
3 [] ficha(2,verde,rojo).
6 [] -posicion(x,y,z,u).
7 [hyper,3,1,2,3,2] posicion(1,2,1,2).
8 [binary,7.1,6.1] $F.
```

Ejemplos: Rompecabezas

- Interpretación de la solución

```
7 [hyper,3,1,2,3,2] posicion(1,2,1,2)
```



- Otras cuestiones
  - ¿Se pueden encontrar todas las soluciones?
  - ¿Y si las fichas no se pueden repetir?
  - ¿Y si las fichas se pueden girar?

Ejemplos: Matemáticas

- **Matemáticas**: Sea G un grupo y e su elemento neutro. Demostrar que si para todo x de G, $x \times x = e$, entonces G es conmutativo.
- Axiomas de grupo:
  - $\forall x\ (e \times x = x)$
  - $\forall x\ (x \times e = x)$
  - $\forall x\ (x^{-1} \times x = e)$
  - $\forall x\ (x \times x^{-1} = e)$
  - $\forall x\ \forall y\ \forall z\ ((x \times y) \times z = x \times (y \times z))$
- Hipótesis:
  - $\forall x\ (x \times x = e)$
- Conclusión:
  - $\forall x\ \forall y\ (x \times y = y \times x)$

Ejemplos: Matemáticas

- Lenguaje del problema (usando funciones):
  - `mult(x,y)`: Devuelve el resultado de la operación $\mathtt{x} \times \mathtt{y}$.
  - `inv(x)`: Devuelve el resultado de la operación $\mathtt{x}^{-1}$.
- Lenguaje del problema (usando operadores):
  - `op(400,xfy,*)`: El símbolo `*` representa el operador binario $\times$ del grupo $\boldsymbol{G}$. La expresión $\mathtt{x} \times \mathtt{y}$ se representa como `x * y`.
  - `op(300,yf,^)`: El símbolo `^` representa el operador inversa $^{-1}$ del grupo $\boldsymbol{G}$. La expresión $\mathtt{x}^{-1}$ se representa como `x^`.

Ejemplos: Matemáticas

- Formalización en OTTER (usando funciones)
  - Axiomas de grupo:

```
all x (mult(e,x) = x).
all x (mult(x,e) = x).
all x (mult(inv(x),x) = e).
all x (mult(x,inv(x)) = e).
all x y z (mult(mult(x,y),z) = mult(x,mult(y,z))).
all x (x = x).
```

  - Hipótesis:

```
all x (mult(x,x) = e).
```

  - Conclusión:

```
mult(b,a) != mult(a,b).
```

Ejemplos: Matemáticas

- Formalización en OTTER (usando operadores)
  - Axiomas de grupo:

```
all x (e * x = x).
all x (x * e = x).
all x (x^ * x = e).
all x (x * x^ = e).
all x y z ((x * y) * z = x * (y * z)).
all x (x = x).
```

  - Hipótesis:

```
all x (x * x = e).
```

  - Conclusión:

```
b * a != a * b.
```

Ejemplos: Matemáticas

- Formalización en OTTER

grupos.in

```
op(400, xfy, *).
op(300, yf, ^).

set(auto2).

formula_list(sos).
 all x (e * x = x).
 all x (x * e = x).
 all x (x^ * x = e).
 all x (x * x^ = e).
 all x y z ((x * y) * z = x * (y * z)).
 all x (x = x).

 all x (x * x = e).

 b * a != a * b.
end_of_list.
```

Ejemplos: Matemáticas

- Ejecución: `otter < grupos.in > grupos.out`

Prueba obtenida

```
 2,1 [] e*x=x.
 4,3 [] x*e=x.
 9 [] (x*y)*z=x*y*z.
12 [] x*x=e.
14 [] b*a!=a*b.
17 [para_into,9.1.1.1,12.1.1,demod,2,flip.1] x*x*y=y.
23 [para_into,9.1.1,12.1.1,flip.1] x*y*x*y=e.
33 [para_from,23.1.1,17.1.1.2,demod,4,flip.1] x*y*x=y.
42 [para_from,33.1.1,17.1.1.2] x*y=y*x.
43 [binary,42.1,14.1] $F.
```

Ejemplos: Matemáticas

- Interpretación de la solución

```
17 [para_into,9.1.1.1,12.1.1,demod,2,flip.1] x*x*y=y
```

9 $$(X \times Y) \times Z = X \times (Y \times Z)$$

$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{array}{c}(x \times x) \times y = x \times (x \times y)\\ x \times x = e\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Uparrow$$

12 $$X \times X = e$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}e \times y = x \times (x \times y)\\ e \times y = y\end{array}\right\} \Rightarrow \quad y = x \times (x \times y)$$

$$\Uparrow$$

2 $$e \times X = X$$

Ejemplos: Matemáticas

- Interpretación de la solución

```
23 [para_into,9.1.1,12.1.1,flip.1] x*y*x*y=e
```

9 $$(X \times Y) \times Z = X \times (Y \times Z)$$

$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{array}{c}(x \times y) \times (x \times y) = x \times (y \times (x \times y)) \\ (x \times y) \times (x \times y) = e\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Uparrow$$

12 $$X \times X = e$$

$$\Rightarrow \quad e = x \times (y \times (x \times y))$$

Ejemplos: Matemáticas

- Interpretación de la solución

```
33 [para_from,23.1.1,17.1.1.2,demod,4,flip.1] x*y*x=y
```

17 $$X \times (X \times Y) = Y$$

$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{array}{c} y \times (y \times (x \times (y \times x))) = x \times (y \times x) \\ y \times (x \times (y \times x)) = e \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Uparrow$$

23 $$X \times (Y \times (X \times Y)) = e$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{c} y \times e = x \times (y \times x) \\ y \times e = y \end{array}\right\} \Rightarrow y = x \times (y \times x)$$

$$\Uparrow$$

4 $$X \times e = X$$

Ejemplos: Matemáticas

- Interpretación de la solución

```
42 [para_from,33.1.1,17.1.1.2] x*y=y*x
```

17 $X \times (X \times Y) = Y$

$\Downarrow$

$$\left.\begin{array}{c} x \times (x \times (y \times x)) = y \times x \\ x \times (y \times x) = y \end{array}\right\} \Rightarrow$$

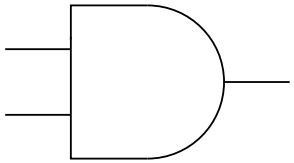
$\Uparrow$

33 $X \times (Y \times X) = Y$

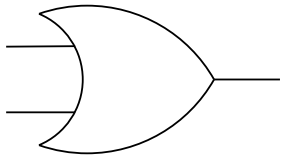
$$\Rightarrow \quad x \times y = y \times x$$

Ejemplos: Diseño de circuitos lógicos

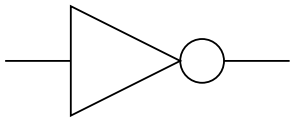
- **Diseño de circuitos lógicos**: Diseñar un circuito lógico que actúe como una componente OR construido exclusivamente con componentes AND y NOT.



i_1	i_2	o_1
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



i_1	i_2	o_1
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



i_1	o_1
0	1
1	0

Ejemplos: Diseño de circuitos lógicos

- Lenguaje del problema
  - **`salida(x1,x2,x3,x4)`**: Se puede construir un circuito lógico cuyo comportamiento se puede describir con la siguiente tabla:

i_1	i_2	o_1
0	0	**`x1`**
0	1	**`x2`**
1	0	**`x3`**
1	1	**`x4`**

Ejemplos: Diseño de circuitos lógicos

- Formalización en OTTER
  - Si se pueden construir los circuitos representados por **salida(x1,x2,x3,x4)** y **salida(y1,y2,y3,y4)**, entonces usando una componente AND se puede construir el circuito representado por **salida(and(x1,y1),and(x2,y2),and(x3,y3),and(x4,y4))**.

```
all x1 x2 x3 x4 y1 y2 y3 y4
 (salida(x1,x2,x3,x4) & salida(y1,y2,y3,y4) ->
  salida(and(x1,y1),and(x2,y2),
         and(x3,y3),and(x4,y4))).
```

  - Comportamiento de la conectiva lógica **and**:

```
all x (and(x,0) = 0).
all x (and(x,1) = x).
```

Ejemplos: Diseño de circuitos lógicos

- Formalización en OTTER
  - Si se puede construir el circuito representados por `salida(x1,x2,x3,x4)`, entonces usando una componente NOT se puede construir el circuito representado por `salida(not(x1),not(x2),not(x3),not(x4))`.

```
all x1 x2 x3 x4
 (salida(x1,x2,x3,x4) ->
  salida(not(x1),not(x2),not(x3),not(x4))).
```

  - Comportamiento de la conectiva lógica `not`:

```
not(0) = 1.
not(1) = 0.
```

Ejemplos: Diseño de circuitos lógicos

- Formalización en OTTER
  - Se pueden construir los circuitos representados por las entradas: **salida(0,0,1,1)** y **salida(0,1,0,1)**.

```
salida(0,0,1,1).
salida(0,1,0,1).
```

  - ¿Se puede construir el circuito representado por **salida(0,1,1,1)**?

```
-salida(0,1,1,1).
```

Ejemplos: Diseño de circuitos lógicos

- Formalización en OTTER

circuitos.in

```
set(auto2).

formula_list(sos).
 all x1 x2 x3 x4 y1 y2 y3 y4
  (salida(x1,x2,x3,x4) & salida(y1,y2,y3,y4) ->
   salida(and(x1,y1),and(x2,y2),
          and(x3,y3),and(x4,y4))).

 all x1 x2 x3 x4
  (salida(x1,x2,x3,x4) ->
   salida(not(x1),not(x2),not(x3),not(x4))).

 salida(0,0,1,1).
 salida(0,1,0,1).
 -salida(0,1,1,1).

 all x (and(x,0) = 0).
 all x (and(x,1) = x).
 not(0) = 1.
 not(1) = 0.
end_of_list.
```

Ejemplos: Diseño de circuitos lógicos

- Ejecución: `otter < circuitos.in > circuitos.out`

Prueba obtenida

```
 1 [] -salida(x,y,z,u) | -salida(v,w,v6,v7) |
      salida(and(x,v),and(y,w),and(z,v6),and(u,v7)).
 2 [] -salida(x,y,z,u) |
      salida(not(x),not(y),not(z),not(u)).
 3 [] salida(0,0,1,1).
 4 [] salida(0,1,0,1).
 5 [] -salida(0,1,1,1).
 7,6 [] and(x,0)=0.
 9,8 [] and(x,1)=x.
11,10 [] not(0)=1.
13,12 [] not(1)=0.
16 [hyper,3,2,demod,11,11,13,13] salida(1,1,0,0).
17 [hyper,4,2,demod,11,13,11,13] salida(1,0,1,0).
22 [hyper,17,1,16,demod,9,7,9,7] salida(1,0,0,0).
27 [hyper,22,2,demod,13,11,11,11] salida(0,1,1,1).
28 [binary,27.1,5.1] $F.
```

Ejemplos: Diseño de circuitos lógicos

- Interpretación de la solución

```
3 [] salida(0,0,1,1)
4 [] salida(0,1,0,1)
```

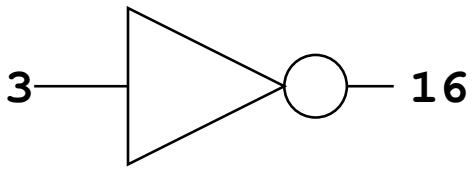
3

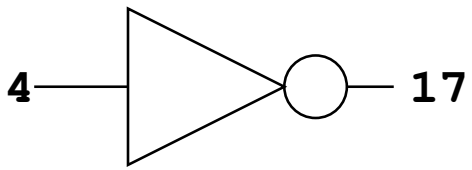
4

Ejemplos: Diseño de circuitos lógicos

- Interpretación de la solución

```
16 [hyper,3,2,demod,11,11,13,13] salida(1,1,0,0)
17 [hyper,4,2,demod,11,13,11,13] salida(1,0,1,0)
```

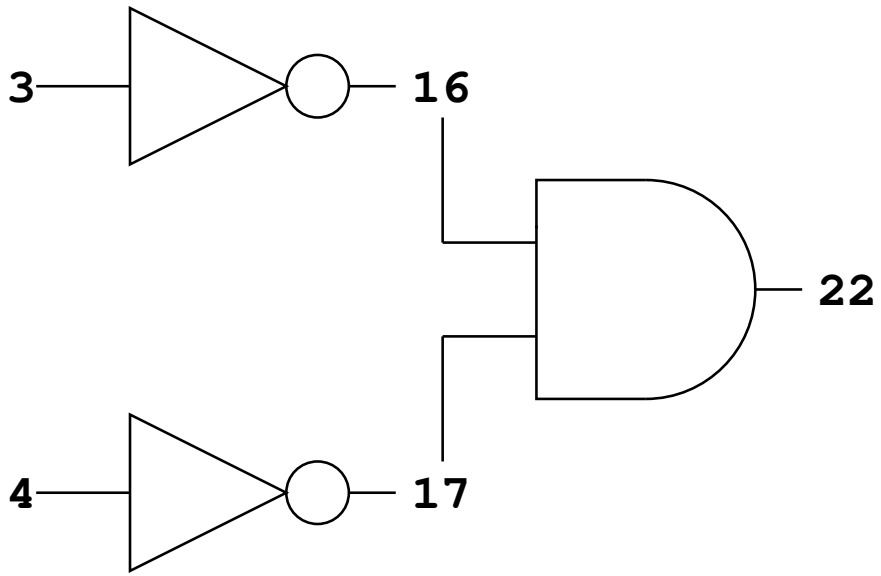




Ejemplos: Diseño de circuitos lógicos

- Interpretación de la solución

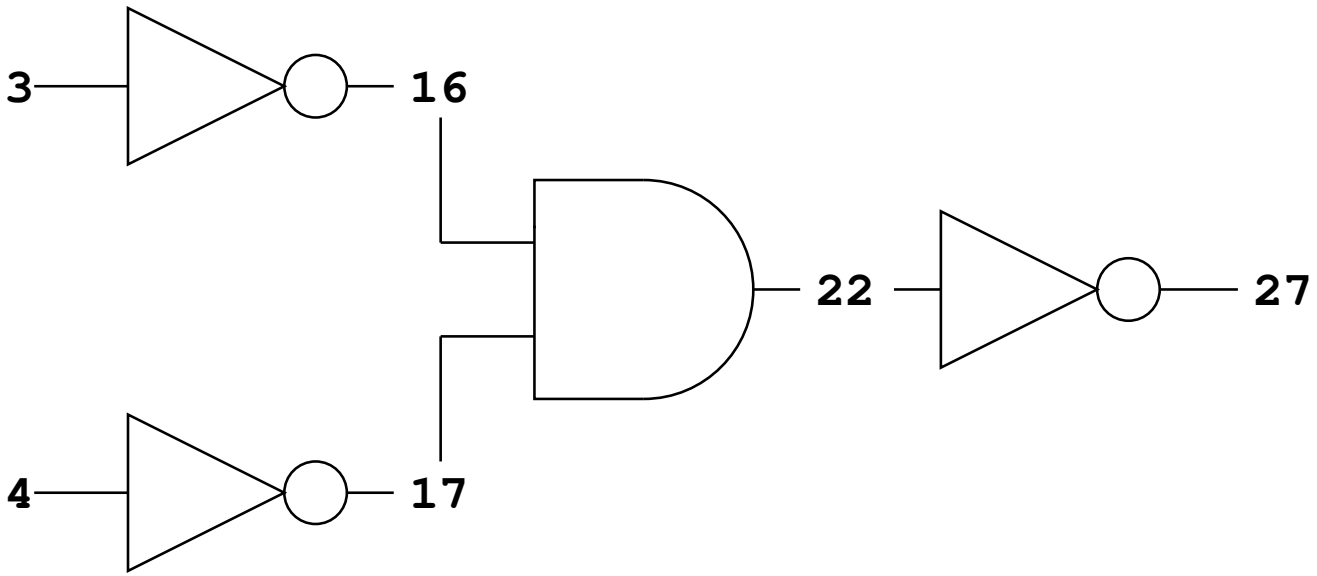
```
22 [hyper,17,1,16,demod,9,7,9,7] salida(1,0,0,0)
```



Ejemplos: Diseño de circuitos lógicos

- Interpretación de la solución

```
27 [hyper,22,2,demod,13,11,11,11] salida(0,1,1,1)
```



Bibliografía

- G. Kolata. *Computer Math Proof Shows Reasoning Power* (The New York Times, 10 de Diciembre de 1996)
  `http://www.nytimes.com/library/cyber/week/1210math.html`
- McCune, W. *Otter 3.3 Reference Manual* (Argonne National Laboratory, 2003)