Teoría de la Complejidad Computacional

Tema 1: Introducción

David Orellana Martín

Grupo de Investigación en Computación Natural
Dpto. Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial
Universidad de Sevilla

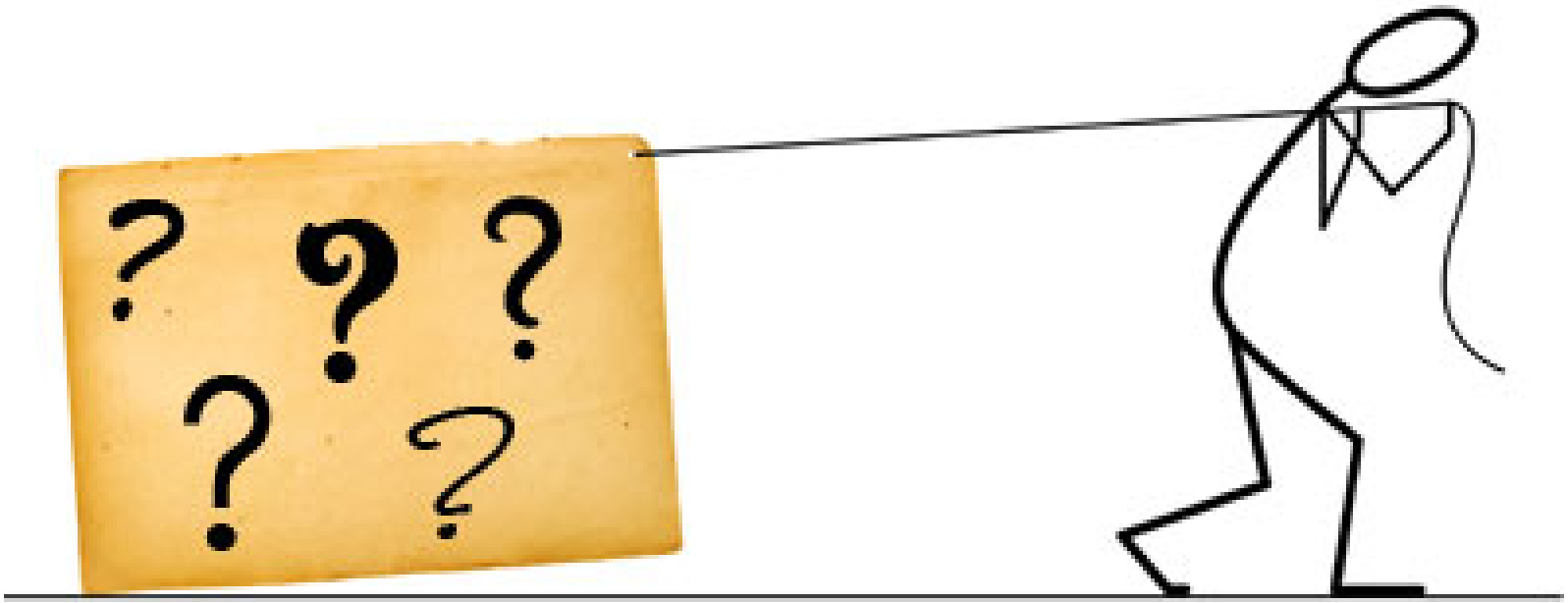
dorellana@us.es

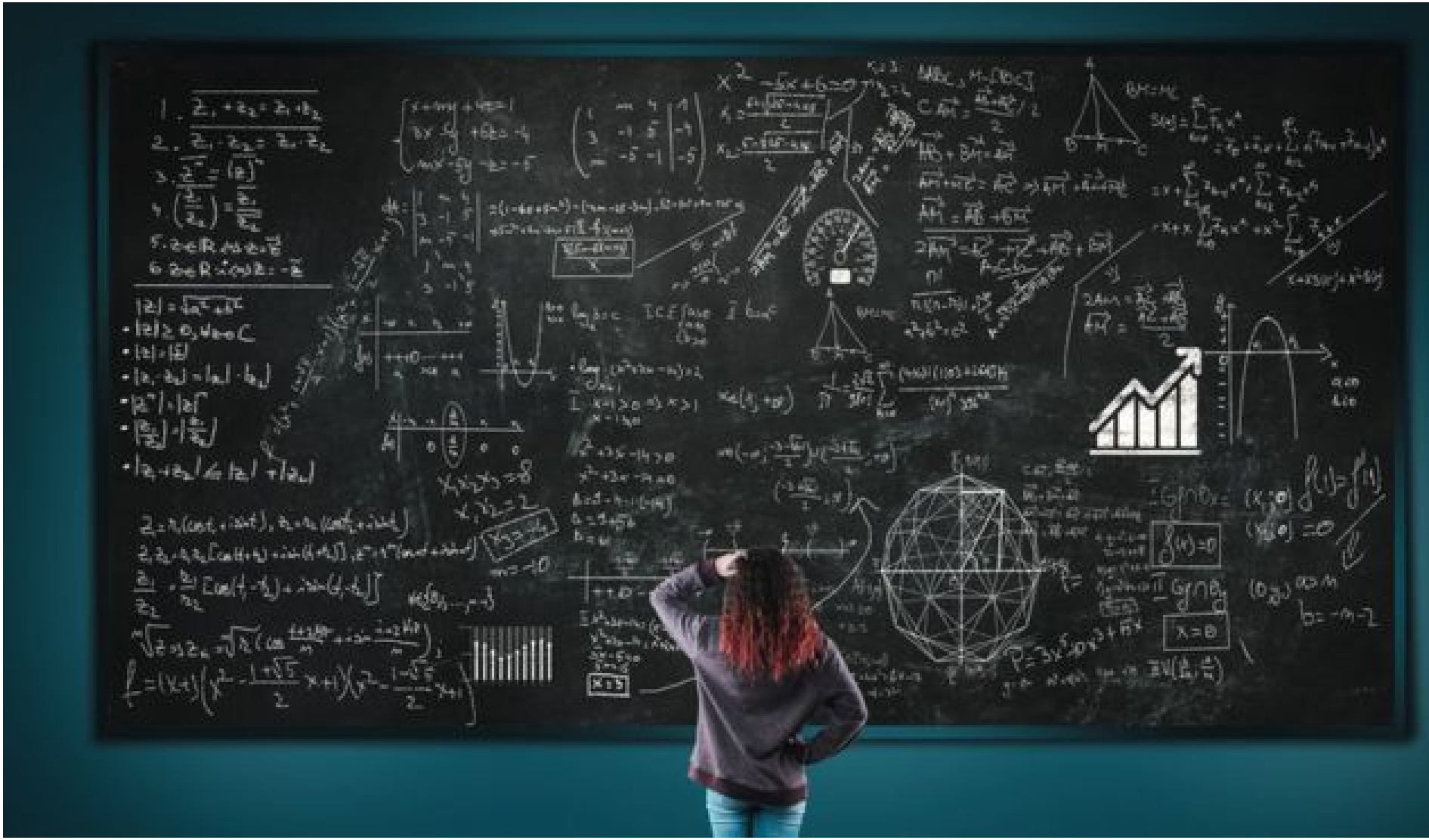
Máster Universitario en Matemáticas
Curso 2023-2024

Índice

- Problemas abstractos versus problemas concretos.
- Computabilidad versus complejidad computacional.
- Las clases de complejidad **P** y **NP**.
- Problemas tratables, intratables y presuntamente intratables.
- El problema **P** versus **NP**.

Problemas





Problemas, problemas, problemas ...

Una eterna aspiración del hombre ...

⋆ **Mejorar la calidad de Vida**.

Para ello, necesita resolver **problemas**.

- A ser posible usando "**procedimientos mecánicos**" ...
  ("**Solución mecánica**" de un problema)

Problemas abstractos vs problemas concretos

(1) Determinar si el número 3974527814 es primo.

(2) Calcular el producto de dos números naturales.

(3) Hallar el máximo común divisor de 58794 y 123456.

(4) Determinar si la suma de los ángulos de un triángulo es $170^{\underline{o}}$.

(5) Para cada número natural n hallar un número primo y mayor que n.

(6) Hallar la suma de los números 782349 y 952435567.

(7) Determinar si un número natural n es primo.

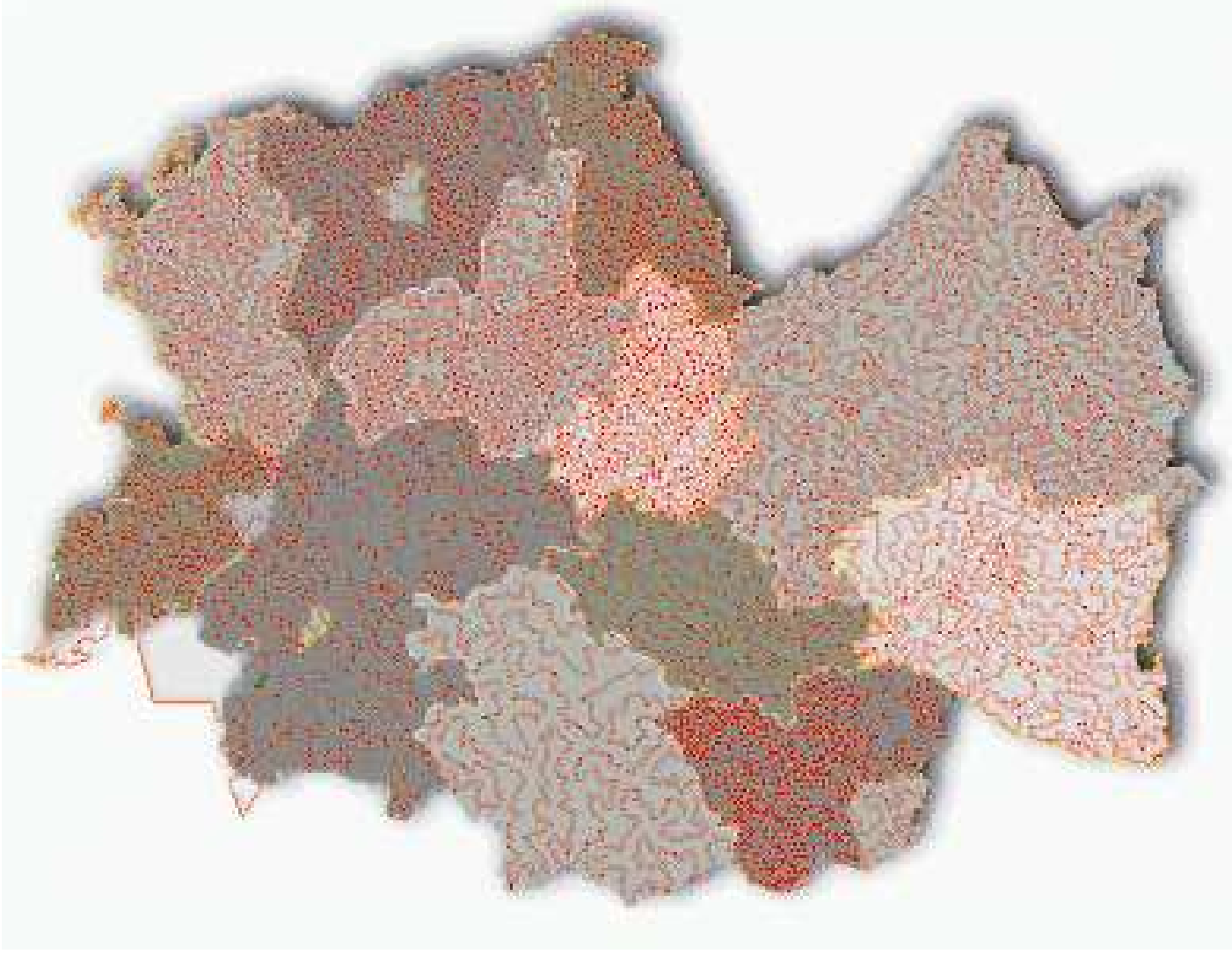
(8) Hace un par de horas, una empresa de reparto ha recibido 25 paquetes de un conocido hipermercado, para su entrega a unos clientes, esta misma tarde. Sabiendo que los paquetes tienen cabida en un camión, ¿qué ruta debe seleccionar el conductor para maximizar las ganancias?

Un problema concreto

- Dadas 42 ciudades de las que se conocen los tiempos t_{ij} para ir de una a otra, hallar un circuito que recorra todas las ciudades en el menor tiempo posible.

Otro problema concreto

- Dadas 3150 ciudades de las que se conocen los tiempos t'_{ij} para ir de una a otra, hallar un circuito que recorra todas las ciudades en el menor tiempo posible.



Un problema abstracto

Dadas n ciudades y unos valores t_{ij} que representan los tiempos para ir de la ciudad i a la ciudad j, hallar un circuito que permita recorrer todas las ciudades en el menor tiempo posible.

Problema del **viajante de comercio** (**TSP**: **T**ravelling **S**alesman **P**roblem).

Problemas concretos vs Problemas abstractos

Problema abstracto: conjunto de **problemas concretos** (**instancias**).

- **Tamaño** de un problema concreto.

Cómo **resolver**, en la "práctica", un **problema de la vida real**.

- ⋆ Un problema de la vida real suele ser un problema **concreto**.
- ⋆ Se **modeliza** o representa a través de un problema **abstracto**.
- ⋆ Se diseña una **solución mecánica** del problema abstracto.
- ⋆ Se **implementa** (describe) esa solución mediante un programa (en un lenguaje).
- ⋆ Se **ejecuta** ese programa sobre una "máquina" introduciendo los datos específicos del problema concreto.

Soluciones mecánicas de problemas abstractos

Procedimiento mecánico/Algoritmo:

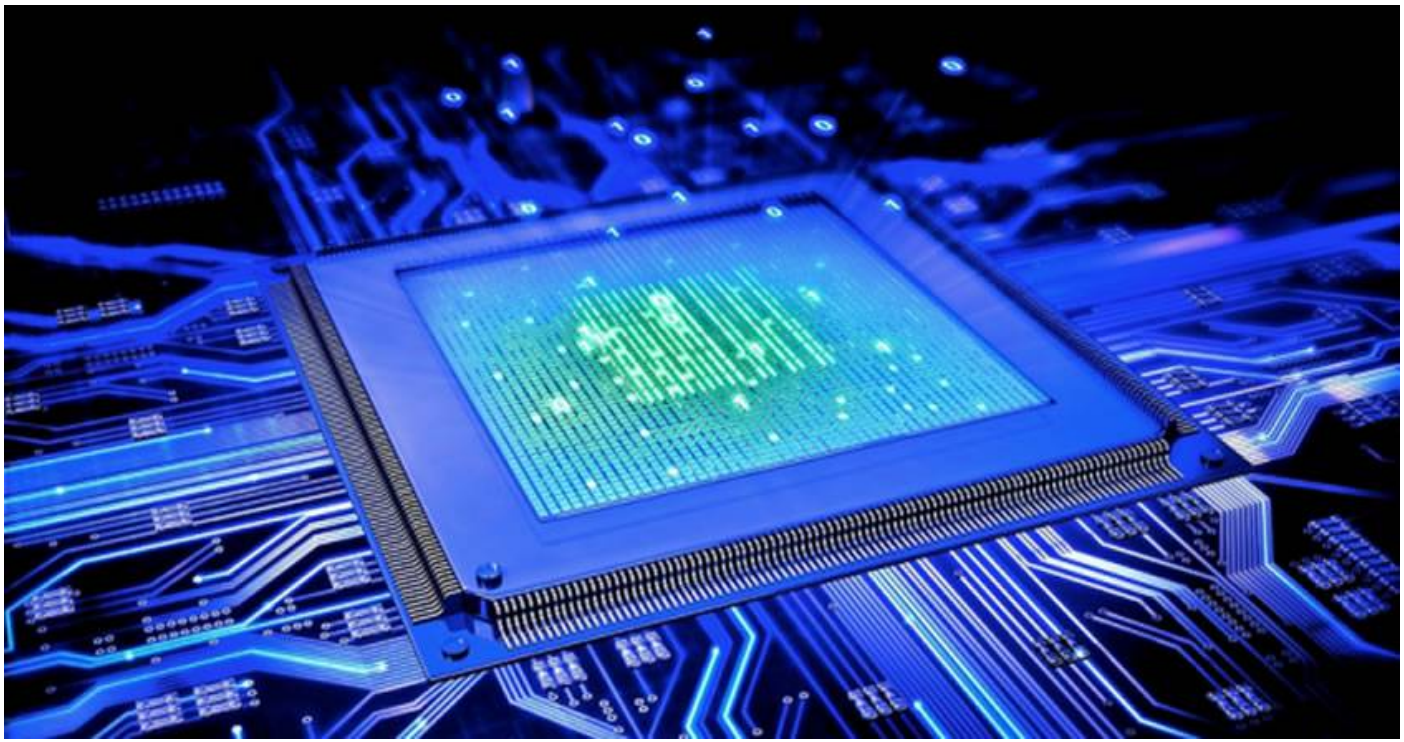
- ⋆ Método **especial** de resolución de problemas.
- ⋆ **Primer algoritmo no trivial**: máximo común divisor de dos números enteros (Euclides entre 400 y 300 a. C.).

Abú Jáfar Mohammed ibn **al–Khowarizmi**:

- ⋆ Procedimientos mecánicos para el Álgebra (año 825 d.C.).

Existencia de problemas **resolubles mecánicamente**.

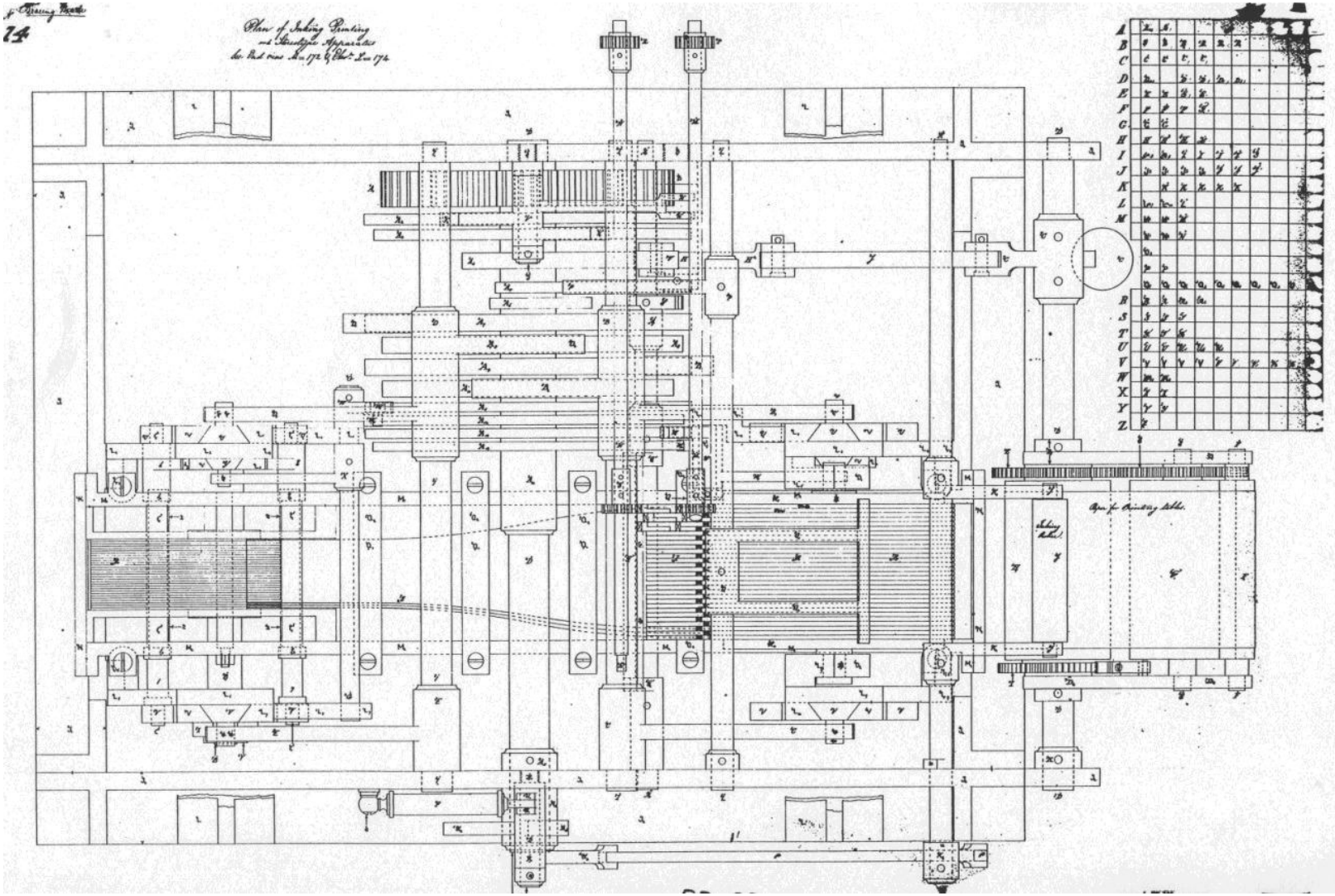
Máquinas, máquinas, máquinas...



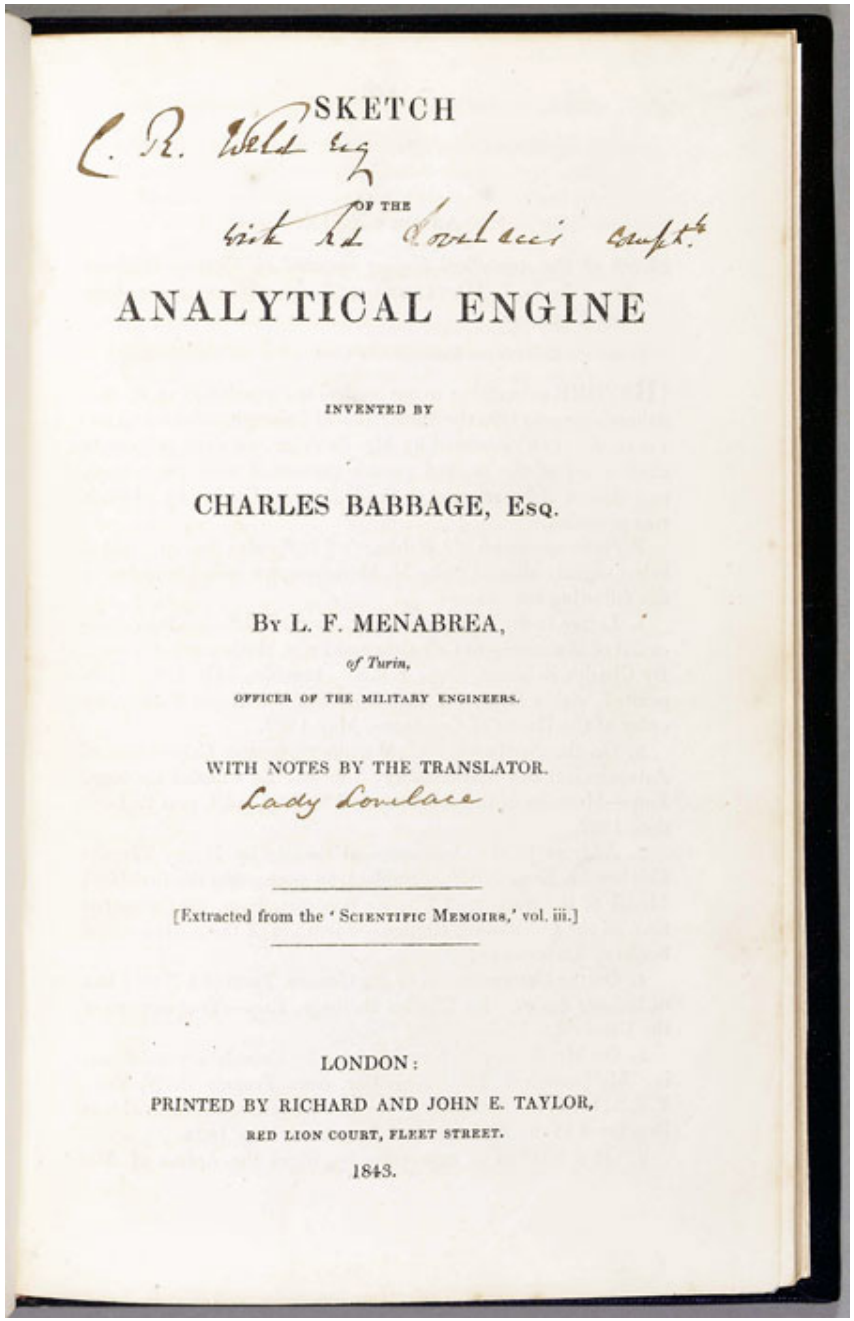
* **Asistentes** para el hombre: tareas tediosas... y otras **tareas inteligentes**.
* Máquinas de **propósito específico** (ábaco, tablas de Néper, máquina de Pascal, máquina de Leibniz, el telar de Jacquard, máquina de diferencias, ...).

Máquinas de propósito general

El sueño de la **máquina analítica**: Charles Babbage (1843-1849).



Máquinas de propósito general



SKETCH

OF THE

ANALYTICAL ENGINE

INVENTED BY

CHARLES BABBAGE, Esq.

By L. F. MENABREA,

of Turin,

OFFICER OF THE MILITARY ENGINEERS.

WITH NOTES BY THE TRANSLATOR.

[Extracted from the 'Scientific Memoirs,' vol. iii.]

LONDON:

PRINTED BY RICHARD AND JOHN E. TAYLOR,

RED LION COURT, FLEET STREET.

1843.

Problemas abstractos

* Problemas de **búsqueda** (**search problems**).
  * Dado un grafo no dirigido y un número natural k, hallar un **clique** de tamaño k (si no existe un tal clique, responder **No**).

    NOTA: Un **clique** de un grafo no dirigido $G = (V, E)$ es un conjunto de vértices $V' \subseteq V$ tal que dos nodos distintos cualesquiera de V' siempre están conectados por una arista de G.

* Problemas de **optimización** (**optimization problems**).
  * Dado un grafo no dirigido, hallar un **clique** que tenga **tamaño máximo**.

    NOTA: El **tamaño** de un clique V' es el número de nodos de V'.

* Problemas de **decisión** (**decision problems**).
  * Dado un grafo no dirigido y un número natural k, determinar si existe un **clique** de tamaño k.

* Problemas de **recuento** (**counting problems**).
  * Dado un grafo no dirigido y un número natural k, determinar el número de **cliques** de tamaño k que existen en dicho grafo.

Lenguajes formales

- **Alfabeto**: conjunto no vacío (**símbolos**).
- **Cadena** o **palabra** sobre un alfabeto Γ: **sucesión finita** de símbolos de Γ.
- **Longitud de una cadena** u: número de símbolos que contiene ($|u|$).
- **Concatenación** de cadenas sobre un alfabeto Γ: "composición" de cadenas.
- La **cadena vacía** consta de 0 símbolos y se suele notar por λ.
- Γ^* : conjunto de todas las cadenas sobre Γ.
- Γ^+ : $\Gamma^* - \{\lambda\}$.
- Γ^n= conjunto de cadenas sobre Γ de longitud n.
- **Lenguaje formal** sobre un alfabeto Γ: un subconjunto de Γ^*.

Problemas de búsqueda

Un **problema de búsqueda**, X, es una terna ordenada (Σ_X, I_X, s_X) donde:

* Σ_X es un alfabeto.
* I_X es un lenguaje sobre Σ_X (cuyos elementos se denominan **instancias**).
* s_X es una función cuyo domino es I_X tal que para cada instancia $a \in I_X$, $s_X(a)$ es un conjunto cuyos elementos se denominan **soluciones del problema** (obviamente, el conjunto $s_X(a)$ puede ser vacío).

RESOLVER un problema de búsqueda: para cada $a \in I_X$, si $s_X(a) \neq \emptyset$ entonces hallar **un** elemento de $s_X(a)$; en caso contrario, responder **No**.

Problemas de optimización

Un **problema de optimización**, X, es una 4-tupla $(\Sigma_X, I_X, s_X, f_X)$ donde:

* $(\Sigma_X, I_X, s_X,)$ es un problema de búsqueda.
* Para cada instancia $a \in I_X$ el conjunto $s_X(a)$ es no vacío (sus elementos se denominan **soluciones candidatas del problema**).
* f_X es una función (**objetivo**) que asigna a cada instancia $a \in I_X$ y cada solución candidata asociada $c_a \in s_X(a)$, un número racional positivo $f_X(a, c_a)$.

f_X proporciona un criterio para determinar qué es una **mejor** solución.

* Una **solución óptima** para $a \in I_X$ es una solución $c \in s_X(a)$ tal que:
  - O bien, $\forall c' \in s_X(a)$ se tiene $f_X(a, c) \leq f_X(a, c')$ (c es una **solución minimal**);
  - O bien $\forall c' \in s_X(a)$ se tiene $f_X(a, c) \geq f_X(a, c')$ (c es una **solución maximal**).

RESOLVER un problema de optimización: para cada $a \in I_X$, hallar una solución óptima para a, en caso de que exista; de lo contrario, responder **No**.

Problemas de decisión

Un **problema de decisión**, X, es un problema de búsqueda (Σ_X, I_X, s_X) tal que:

* Para cada $a \in I_X$ se tiene: o bien $s_X(a) = \{0\}$, o bien $s_X(a) = \{1\}$.

Sea $a \in I_X$ tal que $s_X(a) = \{0\}$: **la respuesta del problema a esa instancia es negativa**

Sea $a \in I_X$ tal que $s_X(a) = \{1\}$: **la respuesta del problema a esa instancia es afirmativa**

Consideraciones interesantes: Todo problema de decisión $X = (\Sigma_X, I_X, s_X)$

* Se puede considerar como un problema de optimización $(\Sigma_X, I_X, s_X, f_X)$ tal que: para cada $a \in I_X$ se tiene que $f_X(a, \theta_X(a)) = 1$.
* Tiene asociado un predicado, θ_X, sobre I_X: $\theta_X(a) = 1 \iff s_X(a) = \{1\}$.
* Tiene asociado un lenguaje $L_X = \{a \in I_X : \ \theta_X(a) = 1\}$.

Además, todo lenguaje L sobre un alfabeto Σ tiene asociado un problema de decisión X_L tal que: $I_{X_L} = \Sigma^*$ y $\forall a \in I_{X_L}$ ($\theta_{X_L}(a) = 1$ si y sólo si $a \in L$).

RESOLVER un problema de decisión: para cada $a \in I_X$, si $s_X(a) = \{1\}$ entonces responder **Sí**; caso contrario, responder **No**.

Problemas de recuento

Un **problema de recuento**, X, es una 4-tupla $(\Sigma_X, I_X, s_X, card_X)$ donde:

* (Σ_X, I_X, s_X) es un problema de búsqueda.
* $card_X$ es una función que asigna a cada instancia $a \in I_X$, el cardinal del conjunto $s_X(a)$ (número de soluciones asociadas a esa instancia).

RESOLVER un problema de recuento: para cada instancia $a \in I_X$, hallar el número de soluciones asociadas a esa instancia.

Problemas de decisión versus problemas de optimización

Todo problema de optimización se puede "**transformar**" en un problema de decisión "**equivalente**".

¿Qué **peaje** se ha de pagar para "transformar" un problema de optimización en un problema de decisión "equivalente"?

- ⋆ Poco coste computacional.

Ejemplo: El problema **MINIMUM VERTEX COVER**:

- ⋆ Versión de **optimización:** Dado un grafo no dirigido G, hallar el tamaño mínimo de un **recubrimiento de vértices** de G.

  (Un **recubrimiento de vértices** de un grafo no dirigido $G = (V, E)$ es un conjunto de vértices $V' \subseteq V$ tal que cada arista de G contiene, al menos, un vértice de V')

- ⋆ Versión de **decisión:** Dado un grafo no dirigido G y un número natural k, determinar si G posee un r.v. de tamaño *menor o igual* que k.

Supongamos que $\mathcal{A}$ es un algoritmo que resuelve la versión de decisión del problema **MINIMUM VERTEX COVER**.

Entonces se considera el siguiente algoritmo $\mathcal{B}$:

```
Entrada: Un grafo no dirigido G = (V, E); sea V = {x_1, ..., x_n}
  Para k = 1 hasta k = n hacer
    Si la ejecución de A con entrada (G, k) devuelve Sí entonces
      devolver k
```

El algoritmo B resuelve la versión de optimización del problema **MINIMUM VERTEX COVER**.

El coste en tiempo de $\mathcal{B}$ es menor o igual al coste en tiempo de $\mathcal{A}$ multiplicado por n.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

A finales del siglo XVII Leibniz formula la necesidad de:

- Disponer de un lenguaje universal (**characteristica universalis**).
- Mecanizar cualquier tipo de razonamiento (**calculus ratiocinator**).

Los **lenguajes formales** materializan la primera aspiración de Leibniz.

Primer intento de desarrollar una **lógica simbólica**.

El anhelo de mecanizar/automatizar toda forma de razonamiento ...

David Hilbert (1862-1943)

En el Congreso Internacional de Matemáticos (París, 1900), D. Hilbert formula una lista de 23 problemas.

- ⋆ **Problema décimo**: determinar si existe un **procedimiento mecánico** tal que, dada una ecuación diofántica arbitraria con coeficientes enteros, **decida** si existe alguna solución formada por números enteros.

Hilbert propone un "**programa**" para zanjar la problemática relativa a la formalización de las Matemáticas (principio de la década de los 20 del pasado siglo):

- ∗ ¿Existe un conjunto finito de axiomas (consistente) del que se pueda deducir **cualquier** aserto matemático?

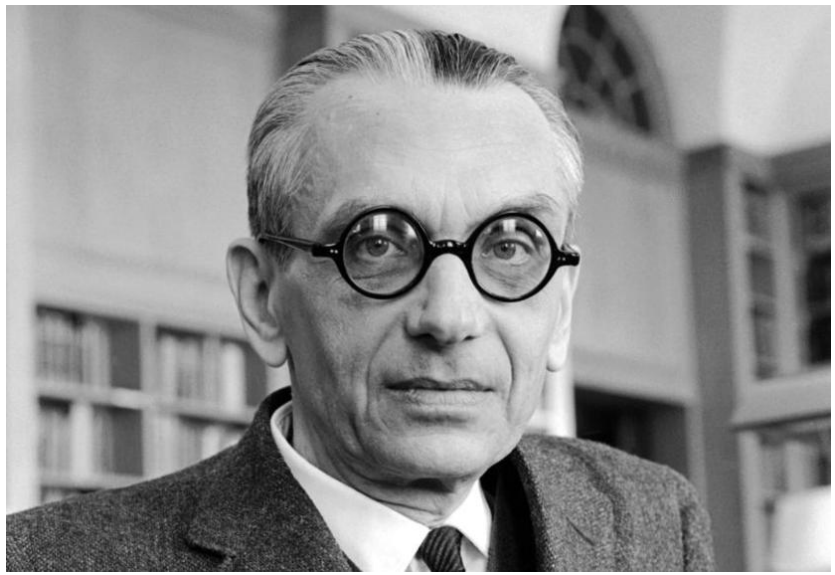
Congreso Internacional de Matemáticos, Bolonia 1928

En el Congreso Internacional de Matemáticos (Bolonia, 1928), D. Hilbert formula tres cuestiones acerca de las Matemáticas:

- ¿Son **completas**?
- ¿Son **consistentes**?
- ¿Son **decidibles**? (**Entscheidungsproblem**).

Desde el punto de vista matemático, el primer tercio del siglo XX estuvo bastante condicionado por el **problema décimo** y el **Entscheidungsproblem**.

Kurt Gödel (1906-1978)



- Tesis doctoral: 1929 (11 páginas: primer resultado de **incompletitud**).
- Königsberg (hoy Kaliningrado): ciudad rusa que adquirió fama gracias al famoso poblema sobre sus "puentes" (resuelto por L. Euler en 1735).
- En Königsberg (sept. 1930), K. Gödel hizo público, por primera vez, un resultado de incompletitud. Testigo de excepción: **John von Neumann**.
- Al día siguiente, en la misma ciudad, Hilbert pronunció otra conferencia, en la que mostró su optimismo acerca de una posible respuesta afirmativa a su famoso **Entscheidungsproblem**.
- En 1931, K. Gödel publicó el resto de sus resultados de **incompletitud**.

Consecuencia de los teoremas de incompletitud de Gödel:

* Todo conjunto finito de axiomas del que se deduzca la aritmética de los números naturales, verifica lo siguiente:
  - Si es consistente entonces no es completo.
  - A partir de dichos axiomas no se puede demostrar su consistencia.

Respuestas negativas a las dos primeras cuestiones de Hilbert.

- No es posible encontrar una axiomatización completa de las Matemáticas.
- Dentro del marco de las Matemáticas, no es posible demostrar la propia consistencia de las Matemáticas.

¿Y qué sucedió con el tercer problema (**Entscheidungsproblem**)?

Ni K. Gödel ni J. von Neumann lo abordarían al estar centrados en otras cuestiones:

- K. Gödel, en el análisis de los conceptos y métodos no finitistas.
- J. von Neumann, en aspectos relacionados con los fundamentos o cimientos de las Matemáticas.

Paradigmas de computación

Hacia finales del siglo XIX:

- Lista de problemas importantes de los que se desconocen **soluciones mecánicas**.

Cuestión 1: Dado un problema abstracto, determinar si existe un procedimiento mecánico que lo resuelve.

- Respuestas positivas *versus* respuestas negativas: **asimetría**.

¿En qué consiste un modelo de computación?

- **Formalizar** el concepto de procedimiento mecánico.

Primeros modelos de computación

Formalización del concepto de procedimiento mecánico.

- ⋆ **Funciones recursivas**: **K. Gödel**, 1931–1934.
- ⋆ **λ–cálculo**: **A. Church** y **S. Kleene**, 1931-1936.
- ⋆ **Máquinas de Turing**: **A. Turing**, 1936.

Modelo de computación: *sintaxis* y *semántica*.

- ⋆ **Procedimiento mecánico**, **funciones computables**, **máquinas**.

Modelos de computación orientados a:

- **Programas** (Modelo `GOTO`, modelo `WHILE`, etc.)
- **Funciones** (Funciones recursivas, λ-calculables, etc.)
- **Máquinas** (Máquinas de Turing, de Post, URM, etc.)

Problema **decidible** en un modelo: problema resoluble por algún procedimiento mecánico del mismo.

En todos los modelos antes citados, existen problemas **decidibles**

¿Existen problemas indecidibles en un modelo de computación?

Potencia de un modelo de computación.

- Existencia de problemas **no** resolubles mecánicamente (**indecidibles**).
  - ⋆ Indecidibilidad de la lógica de primer orden (Church, abril de 1936).
    - **NO** existe un procedimiento mecánico tal que, dada una fórmula de la lógica de primer orden, decida si es o no un teorema de ese sistema lógico.
    - Respuesta negativa al **Entscheidungsproblem**.
  - ⋆ Indecidibilidad de la lógica de primer orden (Turing, mayo de 1936).
  - ⋆ Problema de la parada (Turing, mayo de 1936).
  - ⋆ Equivalencia de los modelos de computación (Turing, agosto de 1936).

La **tesis de Church–Turing** (Church, 1935 y Turing, 1936).

Modelos universales.

Teoría de la Computabilidad

Objetivo: dado un modelo de computación, clasificar los problemas abstractos según su resolubilidad mecánica en el mismo (**decidibles**/**indecidibles**).

Protocolo de resolución mecánica de un problema abstracto:

- **Diseño**: describir un procedimiento mecánico que resuelve el problema.
- **Verificación formal**: demostrar que el procedimiento mecánico descrito resuelve cada instancia del problema.
- **Análisis**: calcular los recursos computacionales necesarios para obtener la solución de cada instancia (en **función** de su **tamaño**).

Necesidad de verificar procedimientos mecánicos

El apagón de New York (1965).

Necesidad de verificar procedimientos mecánicos

El programa AMADEUS para facturación en aeropuertos (2017).

Verificación formal de procedimientos mecánicos

Sea X un problema abstracto tal que para cada $b \in I_X$ existe una única solución asociada.

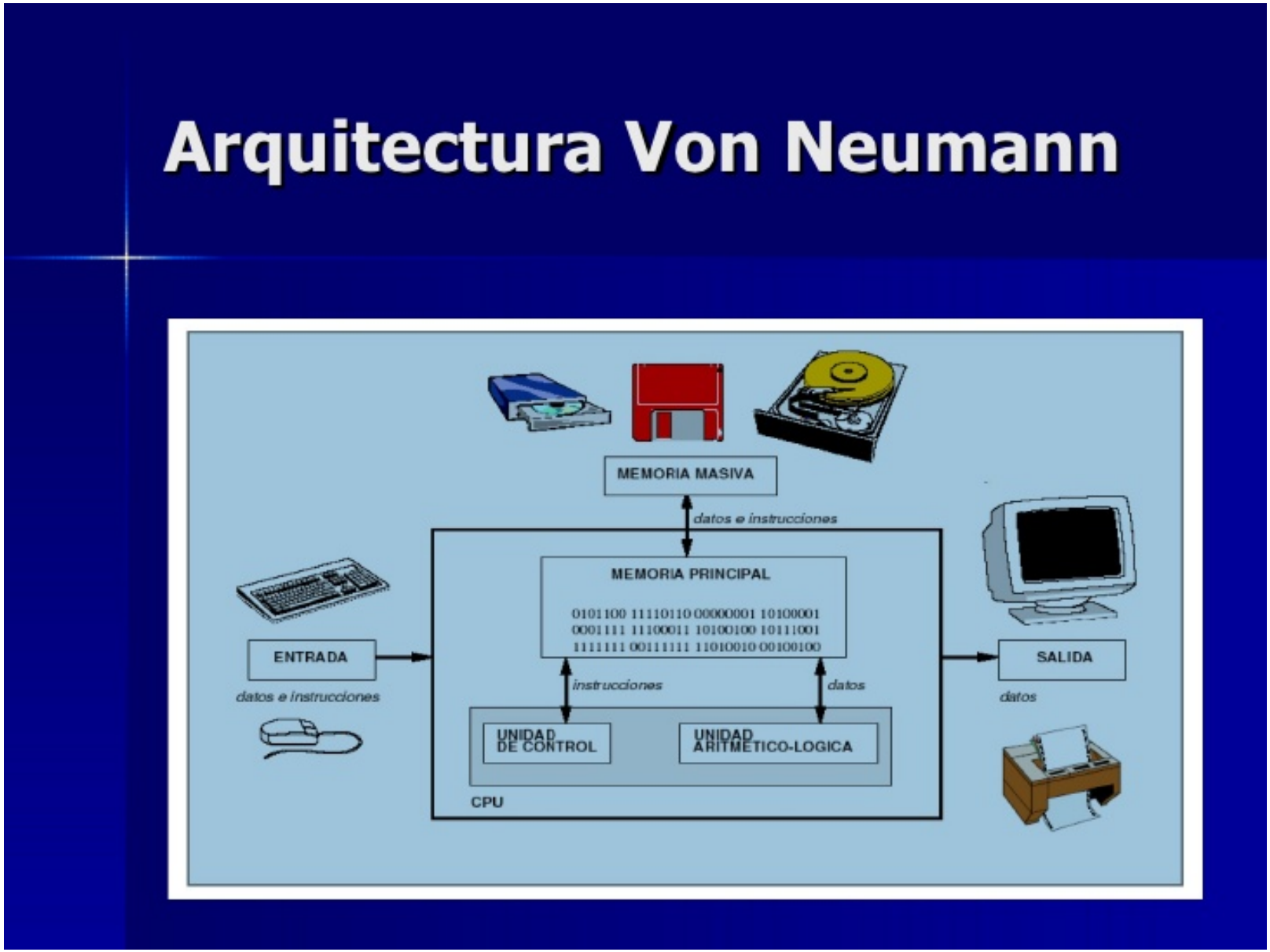
Sea $\mathcal{A}$ un procedimiento mecánico diseñado para resolver el problema X.

$\mathcal{A}$ está caracterizado por una función $F_{\mathcal{A}}$ cuyo dominio (entradas del procedimiento) es el conjunto de instancias, I_X, del problema.

Para verificar formalmente dicho procedimiento mecánico distinguiremos dos casos:

- $\star$ I_X es un conjunto **finito**: basta comprobar que para cada $b \in I_X$, el valor $F_{\mathcal{A}}(b)$ coincide con $f_X(b)$.
- $\star$ I_X es un conjunto **infinito**: se realizan dos pasos.
  - **Corrección parcial:** Si $b \in I_X$ y el procedimiento mecánico $\mathcal{A}$ **para** sobre b, entonces $F_{\mathcal{A}}(b) = f_X(b)$.
  - **Test de parada:** El procedimiento mecánico **para** sobre cualquier $b \in I_X$.

Máquinas reales de propósito general



J. von Neumann, J. P. Eckert y J. W. Mauchly (1945)

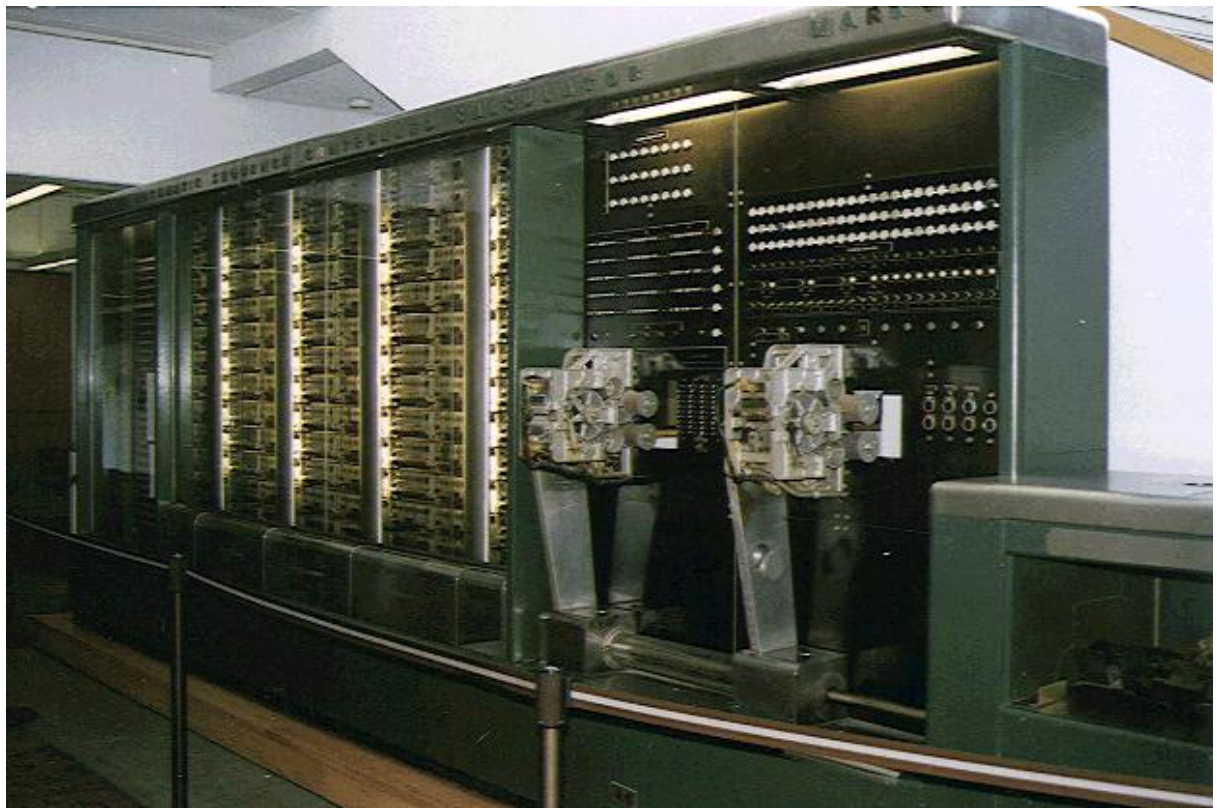
Máquinas reales de propósito general

1940's: Aparición de los primeros ordenadores (máquinas de propósito general).

* Implementación práctica de la arquitectura de J. von Neumann.

Primer **ordenador electromecánico**: **Mark I**, H. Aiken, 1944.

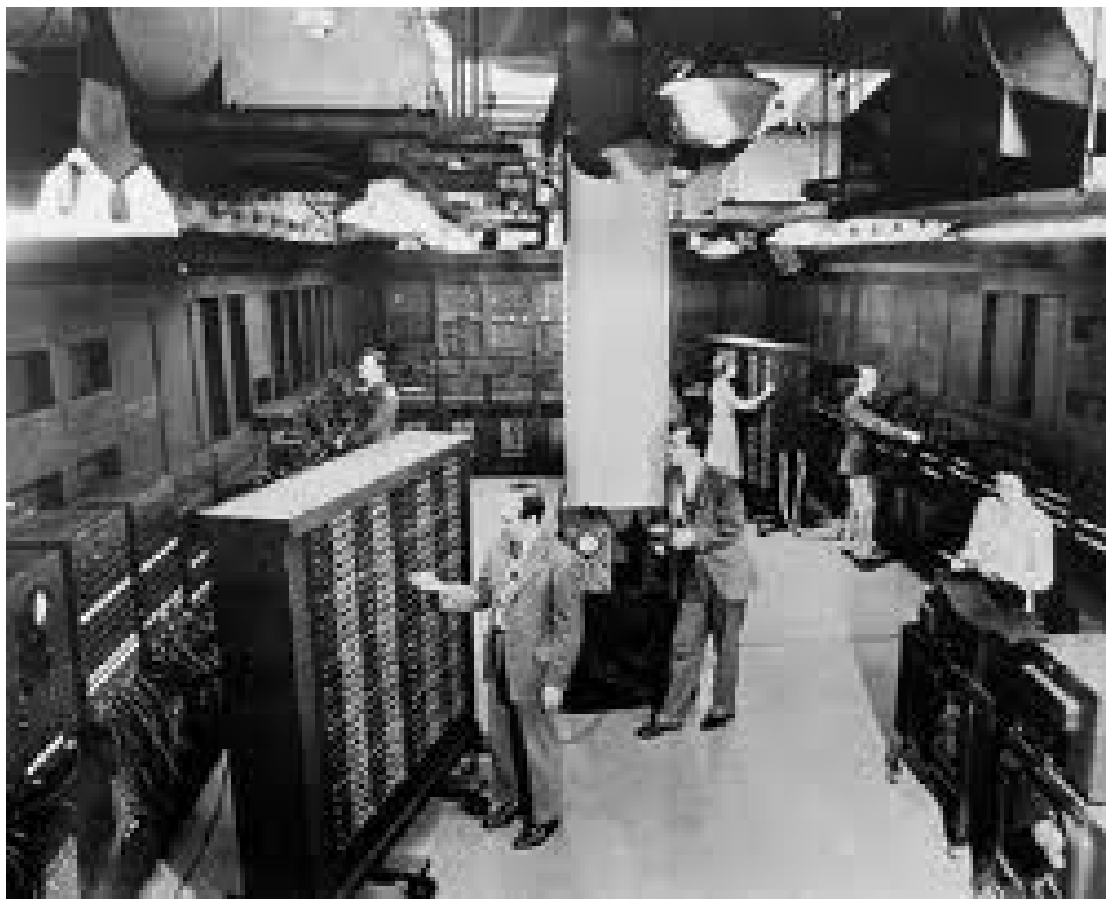
(760.000 ruedas + 800 kms. de cable + 5.000 Kgs. de peso + Superficie de más de 17 m^2)



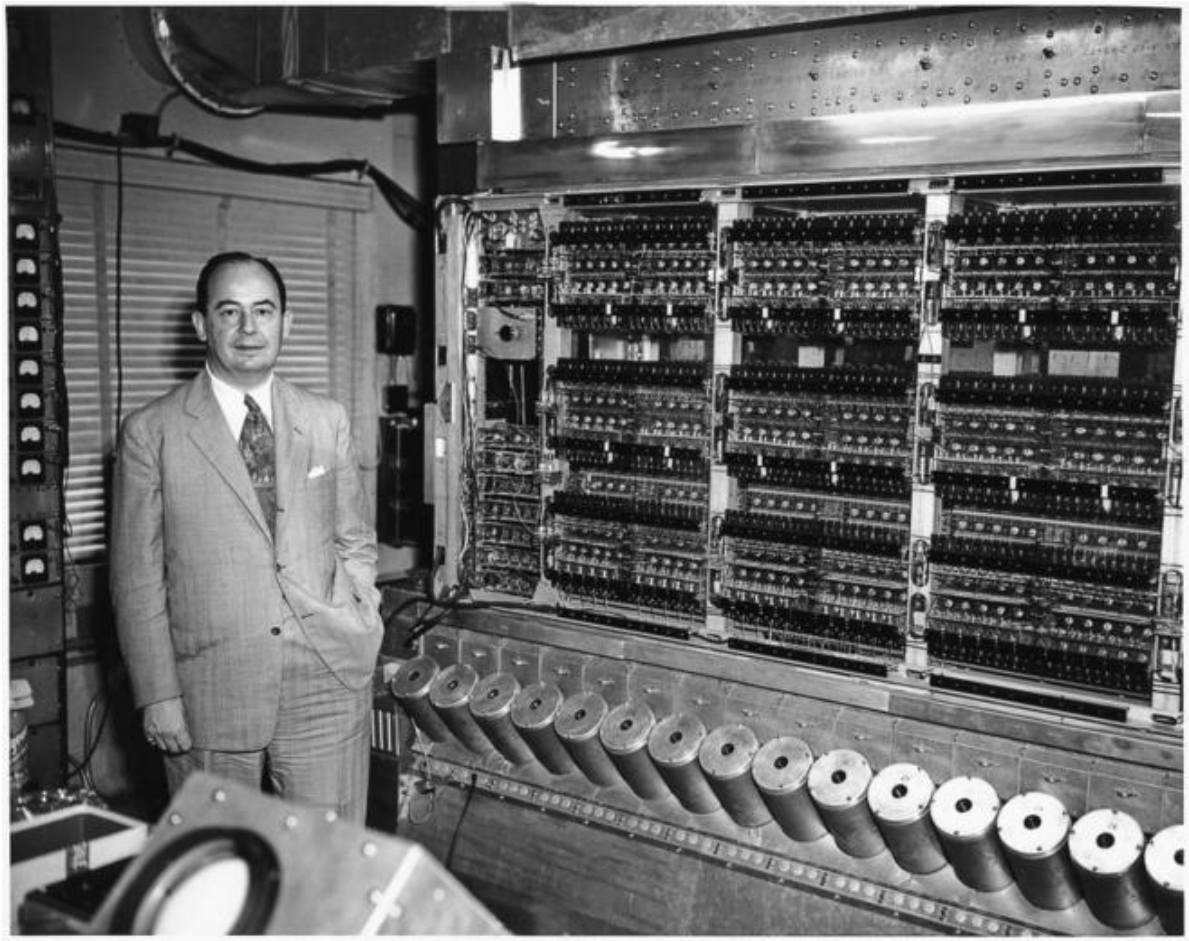
Máquinas reales de propósito general

Primer **ordenador electrónico**: **Eniac**, J.W. Mauchcly y J.P. Eckert, 1945.

(17.468 válvulas + 6.000 interruptores manuales + 27.000 Kgs. de peso + Superficie de más de 160 m^2)



Máquinas reales de propósito general



John von Neumann y el ordenador MANIAC (1952)

(Basada en su arquitectura: simular las condiciones para detonar una bomba de hidrógeno)

Teoría de la Complejidad Computacional

Complejidad computacional "inherente" a un problema abstracto resoluble mecánicamente en un modelo universal.

- ⋆ Menor cantidad de **recursos computacionales** necesarios para resolver mecánicamente del problema.

Búsqueda de **procedimientos mecánicos óptimos** (**algoritmos óptimos**) que resuelven problemas abstractos.

¿Qué problemas resuelven las **máquinas reales** de manera **eficiente**?

Resolubilidad mecánica práctica de problemas abstractos.

Cuestión 2: Dado un problema abstracto, hallar un procedimiento mecánico que lo resuelva con la menor cantidad posible de recursos computacionales.

¿Cómo buscar procedimientos mecánicos óptimos?

Protocolo de búsqueda de un procedimiento mecánico óptimo que resuelve un cierto problema abstracto.

- Hallar una **cota inferior** de los recursos necesarios para ejecutar **cualquier** procedimiento mecánico que resuelva el problema.
- Hallar un procedimiento mecánico que resuelva el problema y que use una cantidad de recursos del orden exacto de esa cota.

Complejidad computacional inherente a un problema.

⋆ A veces, es imposible encontrar procedimientos mecánicos óptimos de ciertos problemas abstractos (**teorema de aceleración de Blum**).

Clases de complejidad

Necesidad de analizar la complejidad de problemas de manera "global":

- **Clases de complejidad**.

Ingredientes necesarios para definir una clase de complejidad:

- ⋆ Un **modelo** de computación (con un **modo** de calcular).
- ⋆ Una **medida** de **complejidad**.
- ⋆ Una **función** (o familia de funciones) total computable que proporcione una **cota superior** de los **recursos computacionales**.

Computaciones deterministas y no deterministas

Computaciones en una **máquina de Turing**.

* Configuración de una MT: una descripción instantánea.
* Computación de una MT: una sucesión (finita o infinita) de configuraciones.

Máquina de Turing determinista:

* En la ejecución de una MTD con **un** dato de entrada, toda configuración que **no** sea de **parada** tiene **una única configuración siguiente**.
* Al ejecutar una MTD con **un** dato de entrada, existe **una única computación**.

Máquina de Turing no determinista:

* En la ejecución de una MTND con **un** dato de entrada, toda configuración que **no** sea de **parada** puede tener **más de una configuración siguiente**.
* Al ejecutar una MTND con **un** dato de entrada, pueden existir **diferentes computaciones**.

Se suele decir que las MTNDs **NO son "fiables"**.

Toda MTD se puede considerar como un caso particular de una MTND.

Resolubilidad de problemas de decisión por MTDs

La clave: concepto de **ACEPTACIÓN** de una instancia del problema por una MTD.

Una **MTD**, M, **acepta** un dato de entrada **a** si **la computación** de M con entrada **a** es de parada y devuelve **Sí**.

Una **MTD**, M, **rechaza** un dato de entrada **a** si **la computación** de M con entrada **a** es de parada y devuelve **No**.

Una **MTD**, M, **resuelve un problema de decisión** $X = (\Sigma_X, I_X, s_X)$ si para cada instancia $a \in I_X$ se tiene:

- $s_X(a) = \{1\}$ **sii** M **acepta** la instancia **a**.
- $s_X(a) = \{0\}$ **sii** M **rechaza** la instancia **a**.

Resolubilidad de problemas de decisión por MTNDs

La clave: concepto de **ACEPTACIÓN** de una instancia del problema por una MTND.

Una **MTND**, M, **acepta** un dato de entrada **a sii EXISTE, AL MENOS, una computación** de M con entrada **a** que es de parada y devuelve **Sí**.

Un par de reflexiones:

- ⋆ ¿Qué significaría que una MTND **no acepta** un dato de entrada **a**?
- ⋆ ¿Se podría establecer "mecánicamente" que una MTND **no acepta** un dato **a**?

Una **MTND**, M, **resuelve un problema de decisión** $X = (\Sigma_X, I_X, s_X)$ si para cada instancia $a \in I_X$ se tiene:

- $s_X(a) = \{1\}$ **sii** M **acepta a**.

Tratabilidad de problemas abstractos

Procedimiento mecánico eficiente: la cantidad de recursos necesarios para su ejecución está acotada por un **polinomio** (en el tamaño del dato de entrada).

- ¿Por qué se consideran los polinomios para establecer la frontera?
  - ⋆ Es un conjunto de funciones estables por suma y producto.
  - ⋆ Tienen un crecimiento "**moderado**".

Problema **tratable**: resoluble por una **máquina de Turing determinista** que trabaja en tiempo polinomial.

Teoría de la Complejidad Computacional: clasificar los problemas abstractos según sean o no resolubles eficientemente (problemas **tratables** e **intratables**).

Problemas abstractos ...

- Problema **tratable**:
  - ⋆ Existe **ALGÚN** procedimiento mecánico que resuelve el problema y proporciona (**en tiempo razonable**) soluciones para entradas de **tamaño grande**.
- Problema **intratable**:
  - ⋆ **NINGÚN** procedimiento mecánico que resuelve el problema proporciona (**en tiempo razonable**) soluciones para entradas de **tamaño grande**.
- Problema **presuntamente intratable**:
  - ⋆ **NINGÚN** procedimiento mecánico **CONOCIDO** que resuelve el problema proporciona (**en tiempo razonable**) soluciones para entradas de **tamaño grande**.

Problemas tratables

Son los **más simples**, desde el punto de vista de la complejidad computacional.

* **Resolubilidad mecánica en términos prácticos**: **tratabilidad**.

Polinomial = **Razonable** **Exponencial** = **No razonable**

	10	50	100	300	1000
5n	50	250	500	1.500	5.000
$\mathbf{n^2}$	100	2.500	10.000	90.000	10^6
$\mathbf{n^3}$	1.000	125.000	10^6	$27 \cdot 10^6$	10^9
$\mathbf{2^n}$	1.024	16 dígitos	31 dígitos	91 dígitos	302 dígitos
n!	7 dígitos	65 dígitos	161 dígitos	623 dígitos	inimaginable
$\mathbf{n^n}$	10 dígitos	85 dígitos	201 dígitos	744 dígitos	inimaginable

Nota 1: El número de microsegundos desde el BIG BANG tiene 24 dígitos.

Nota 2: El número de protones en el universo consta de 71 dígitos.

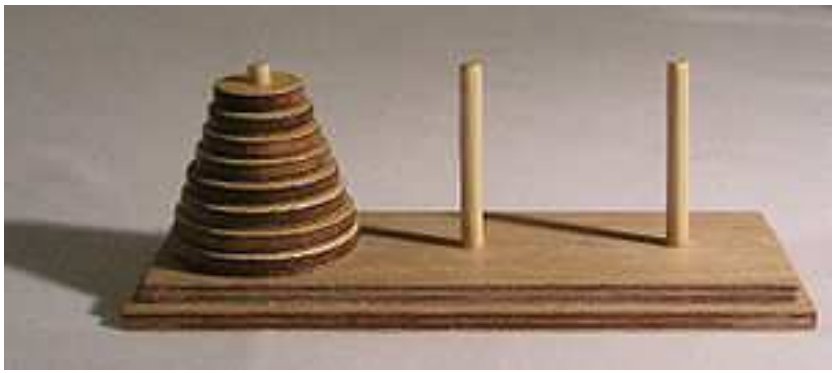
Un problema tratable: la multiplicación rusa

52	**27**	
26	54	
$\star$ 13	108	**108**
6	216	
$\star$ 3	432	**432**
$\star$ 1	864	**864**
52 $\times$ **27**	$=$	**1404**

¿Cuál es el coste en tiempo del algoritmo de la multiplicación rusa?

Un problema intratable: las Torres de Hanoi

La leyenda ... (Edouard Lucas d'Amiens, 1883)

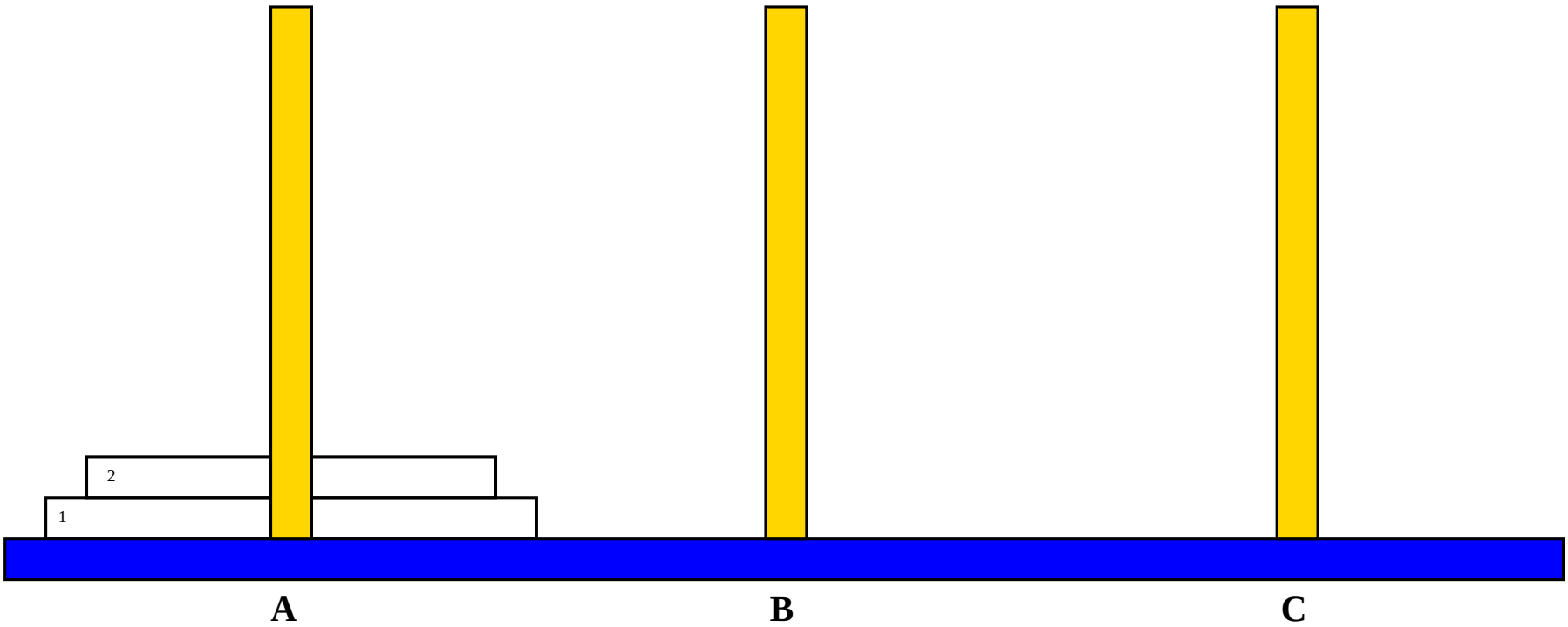


Un **movimiento**: trasladar un disco de una varilla a otra.

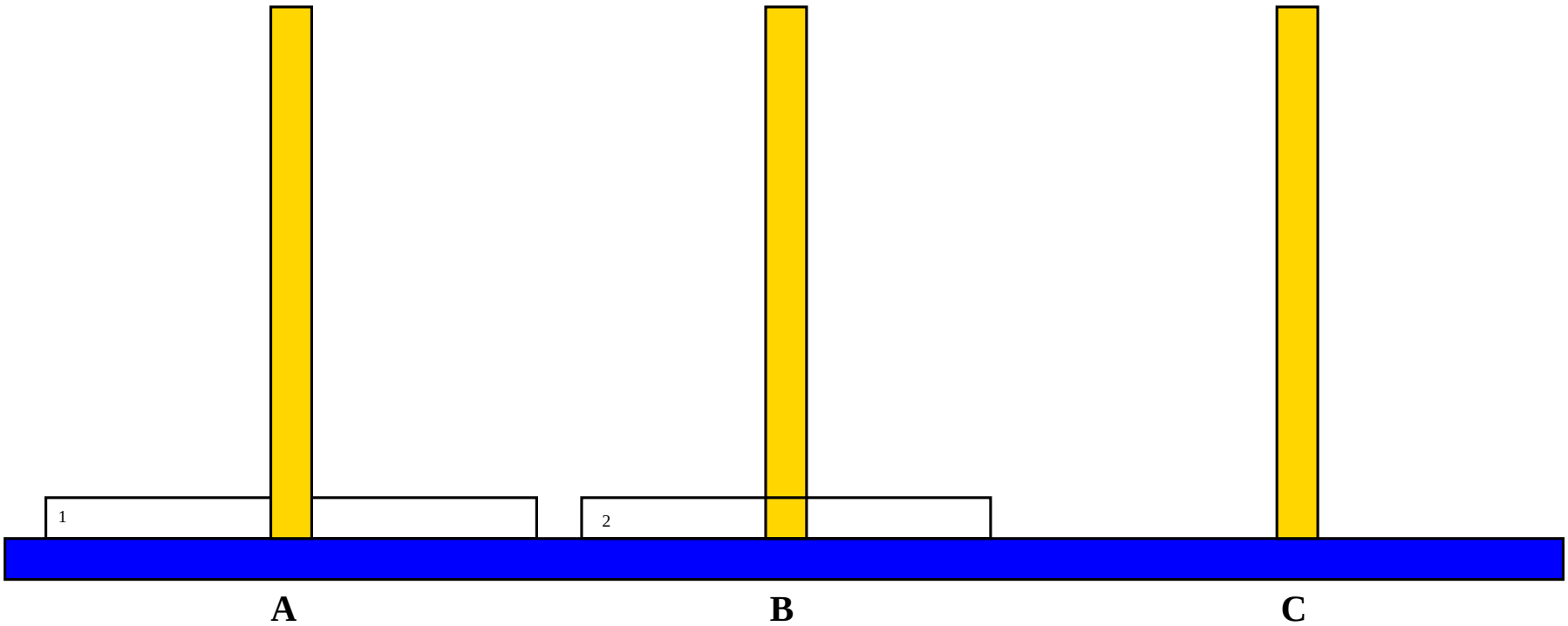
Movimiento válido: un disco **no se puede colocar** encima de otro de menor radio.

* Problema **concreto**: **64** discos.
* Problema **abstracto**: **n** discos.

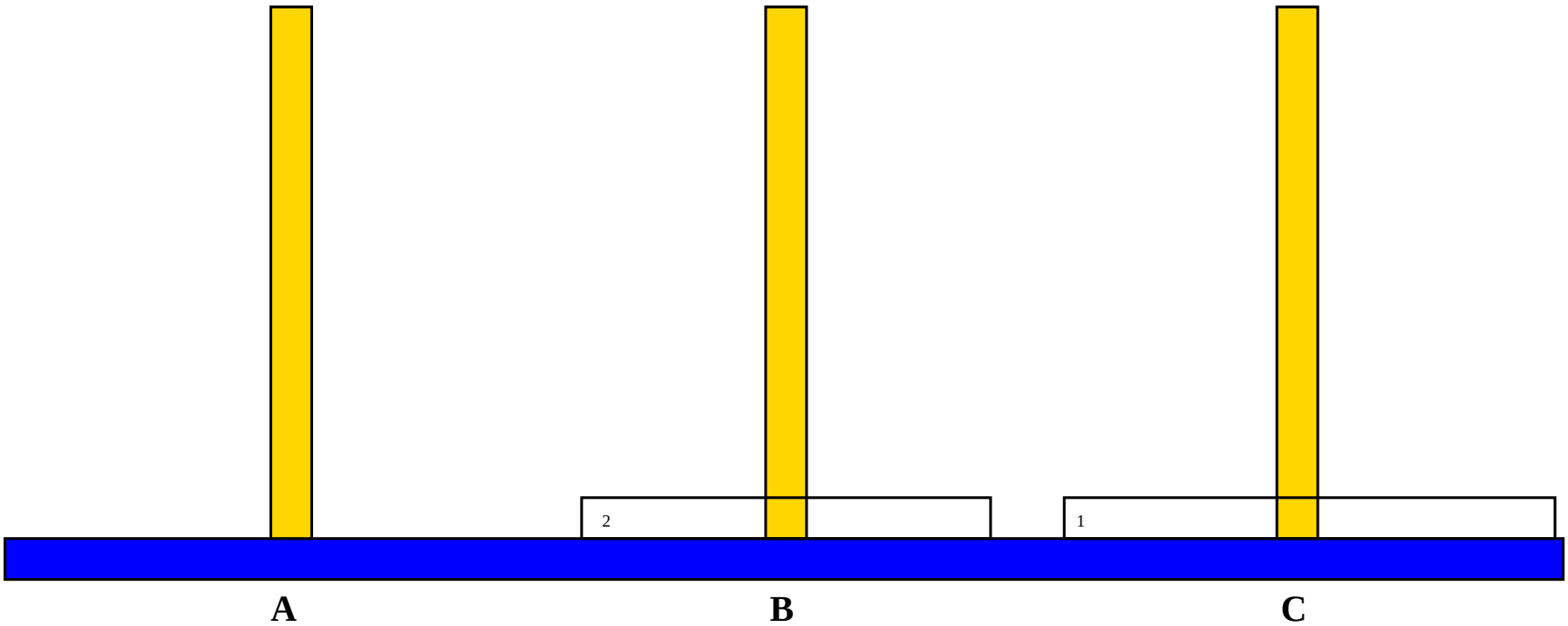
El problema de las Torres de Hanoi: 2 discos



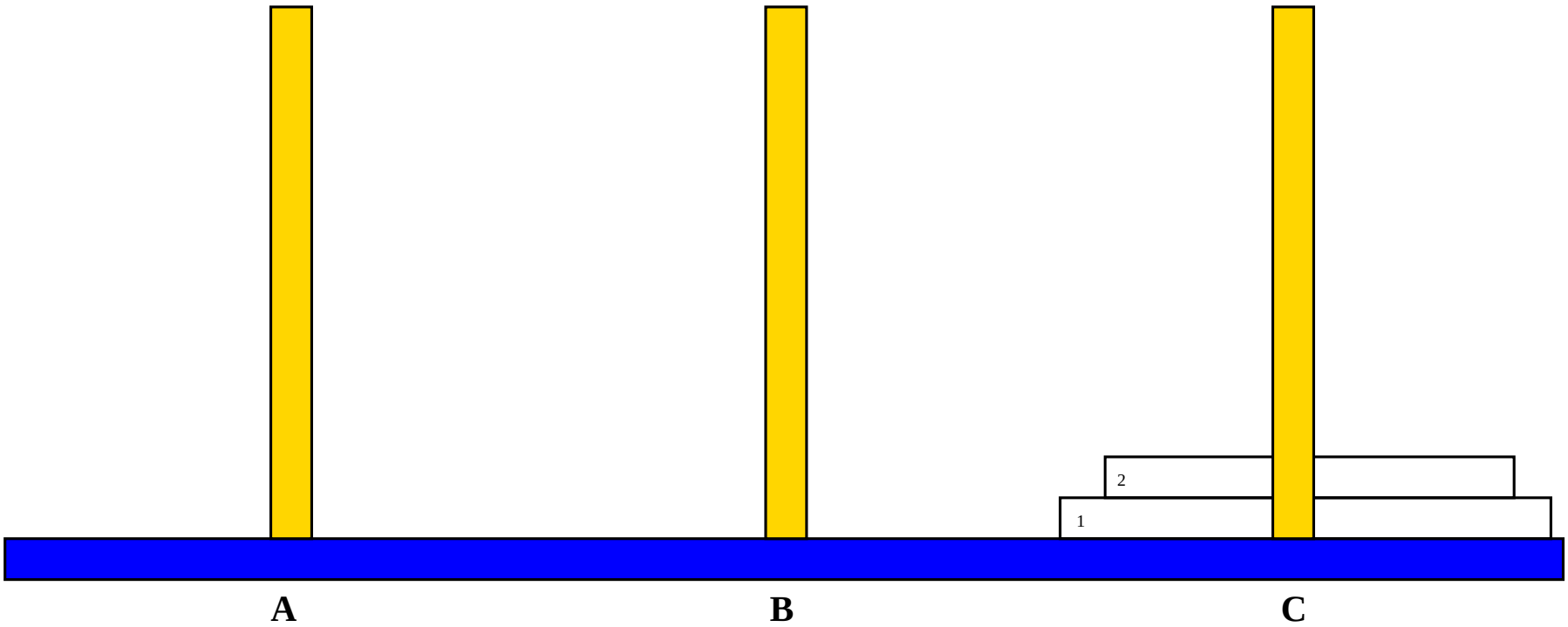
El problema de las Torres de Hanoi: 2 discos



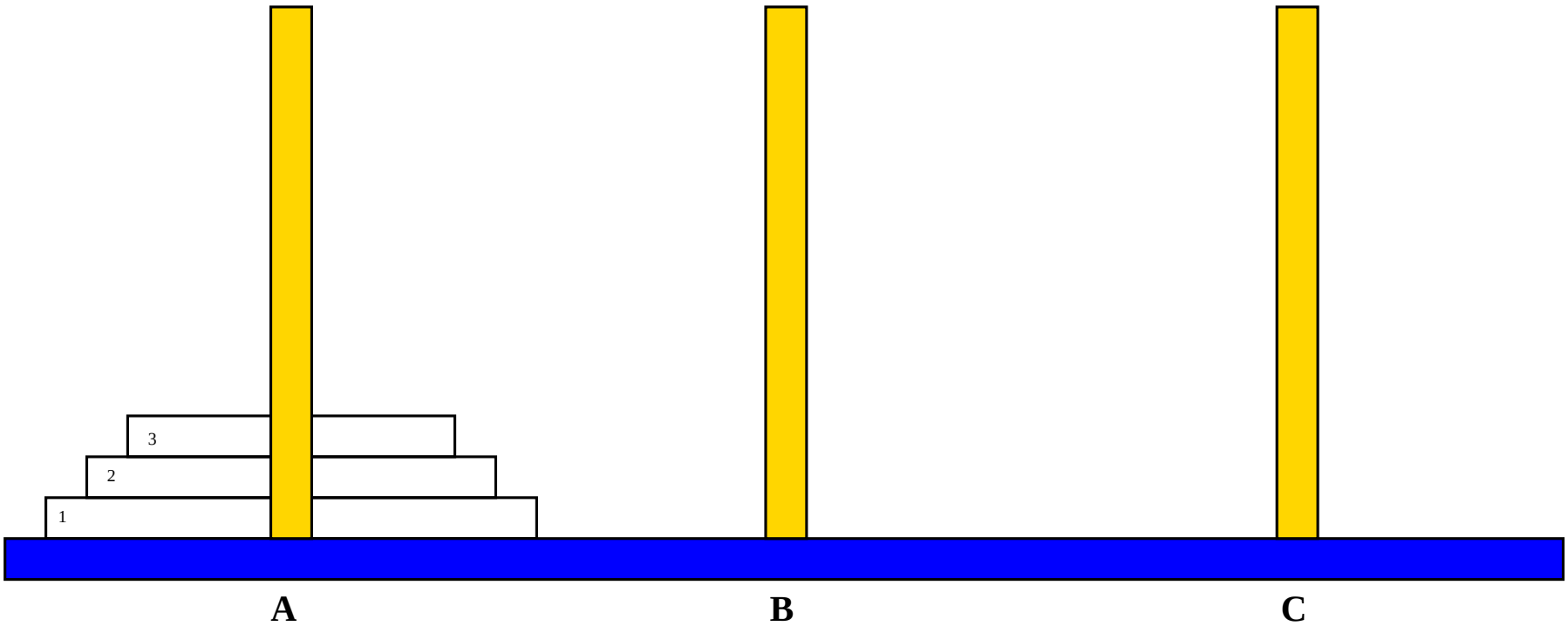
El problema de las Torres de Hanoi: 2 discos



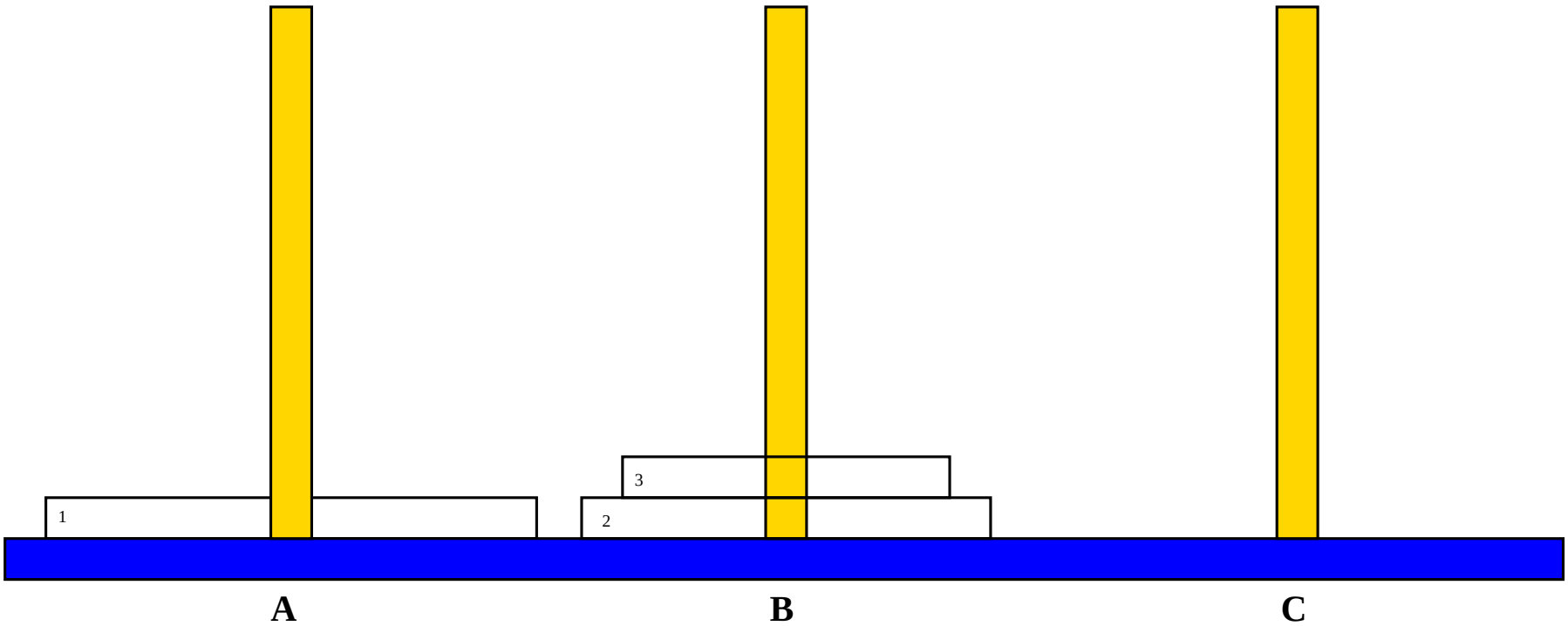
El problema de las Torres de Hanoi: 2 discos



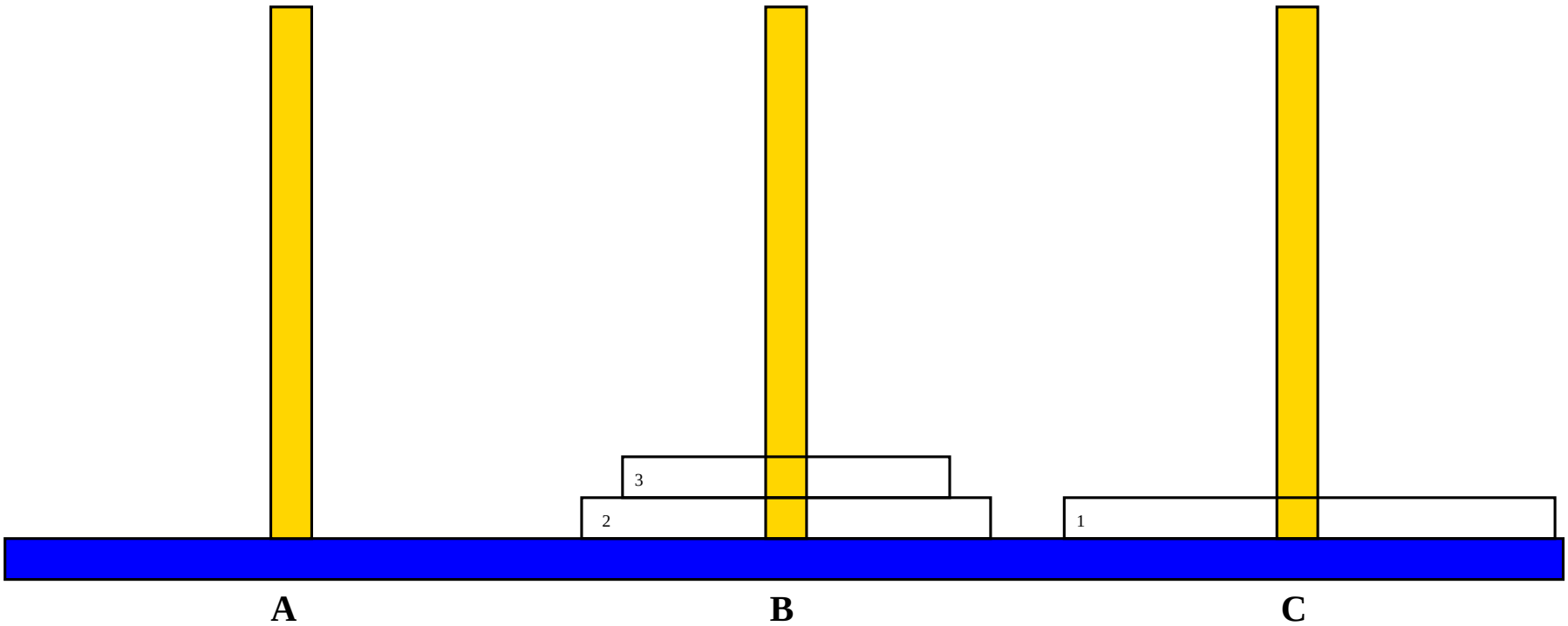
El problema de las Torres de Hanoi: 3 discos



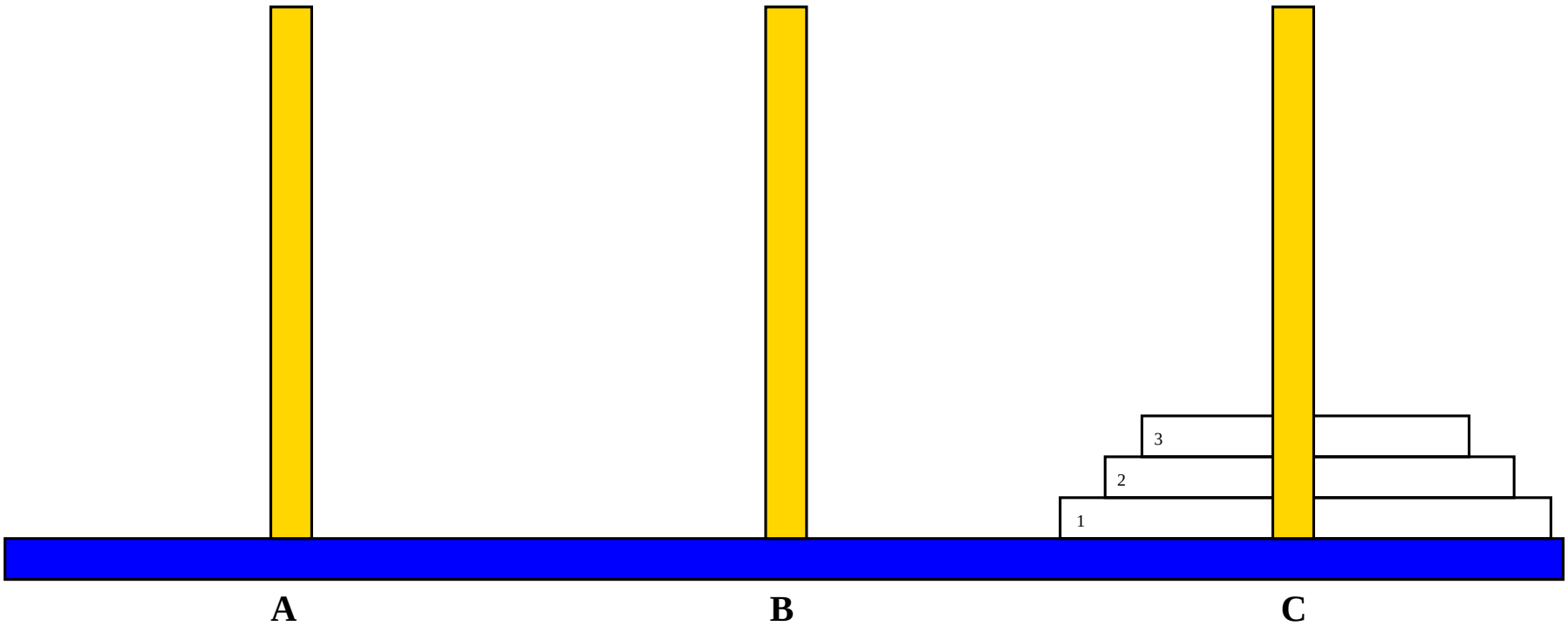
El problema de las Torres de Hanoi: 3 discos



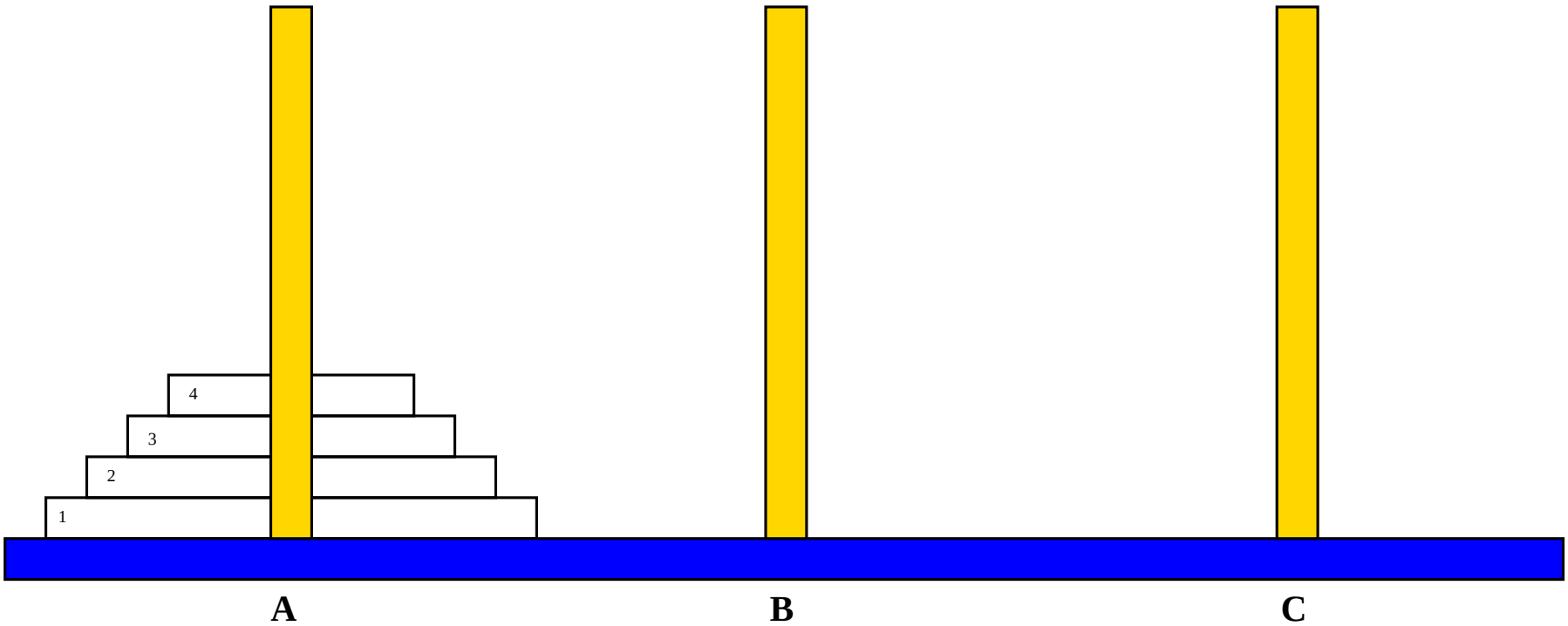
El problema de las Torres de Hanoi: 3 discos



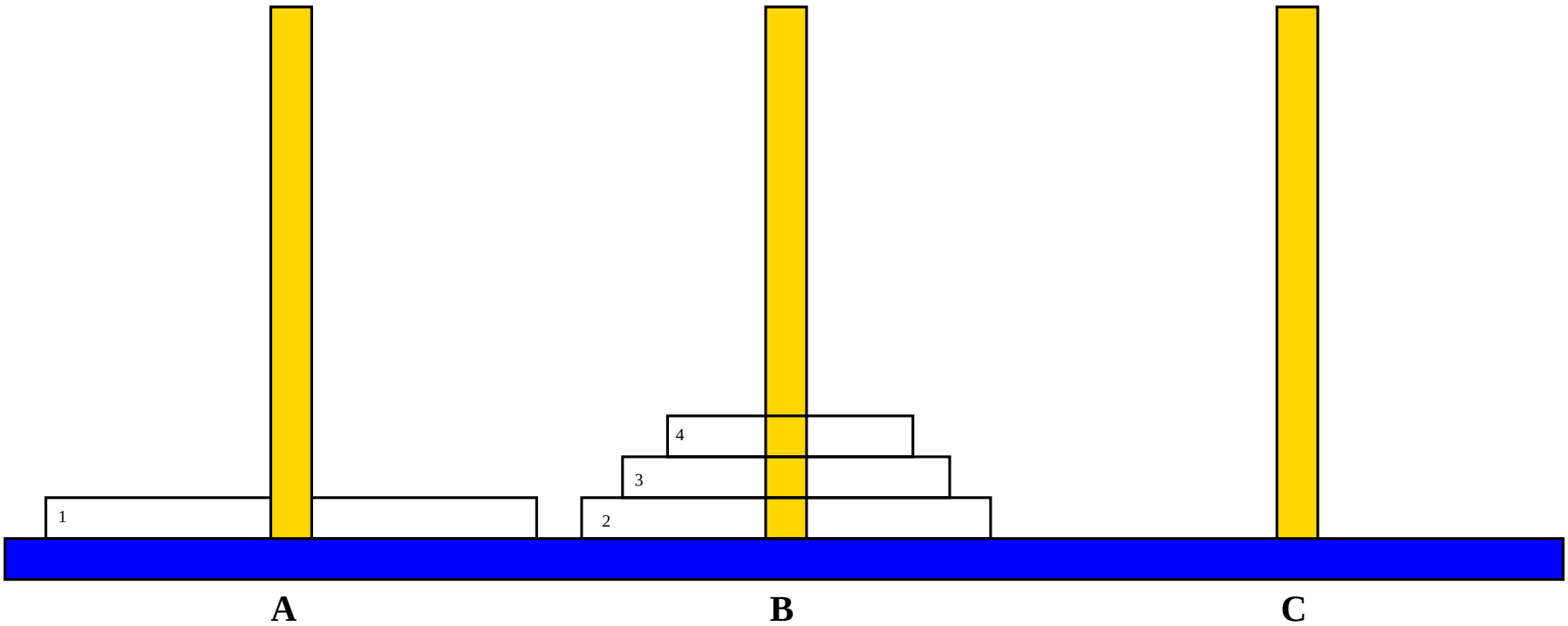
El problema de las Torres de Hanoi: 3 discos



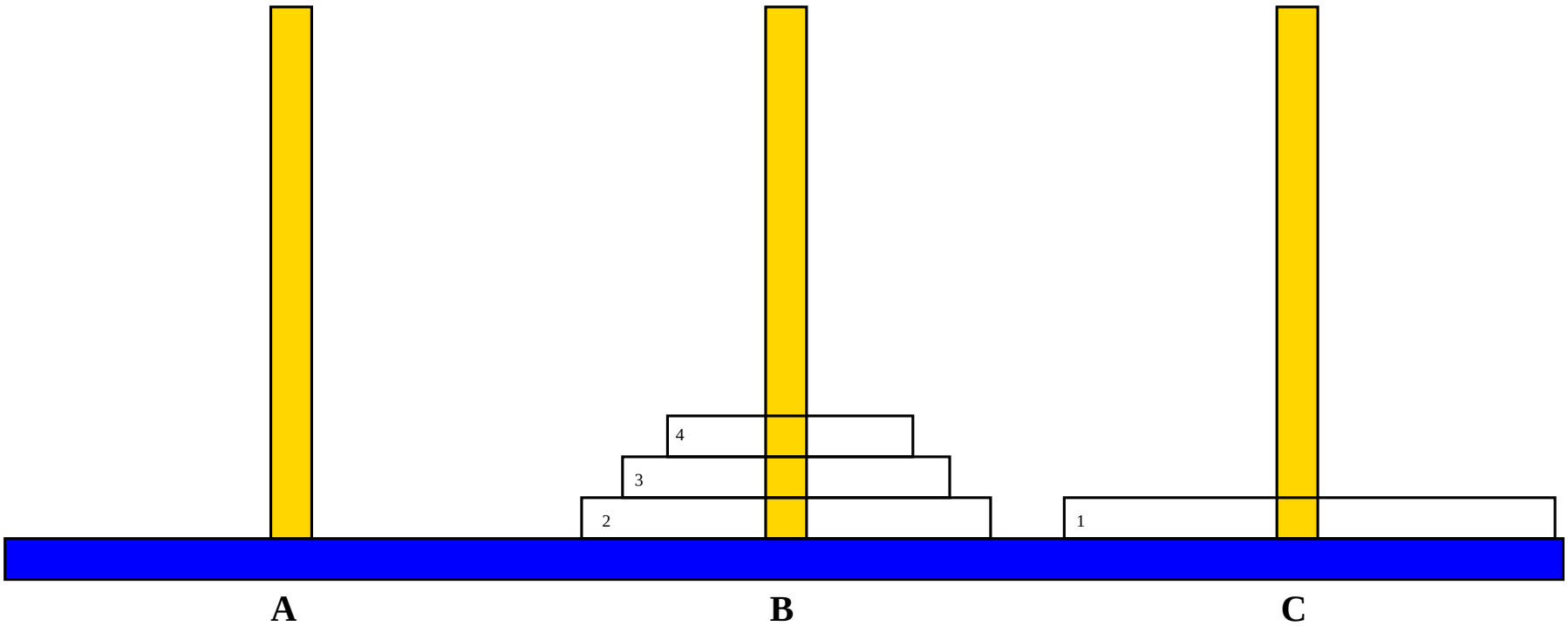
El problema de las Torres de Hanoi: 4 discos



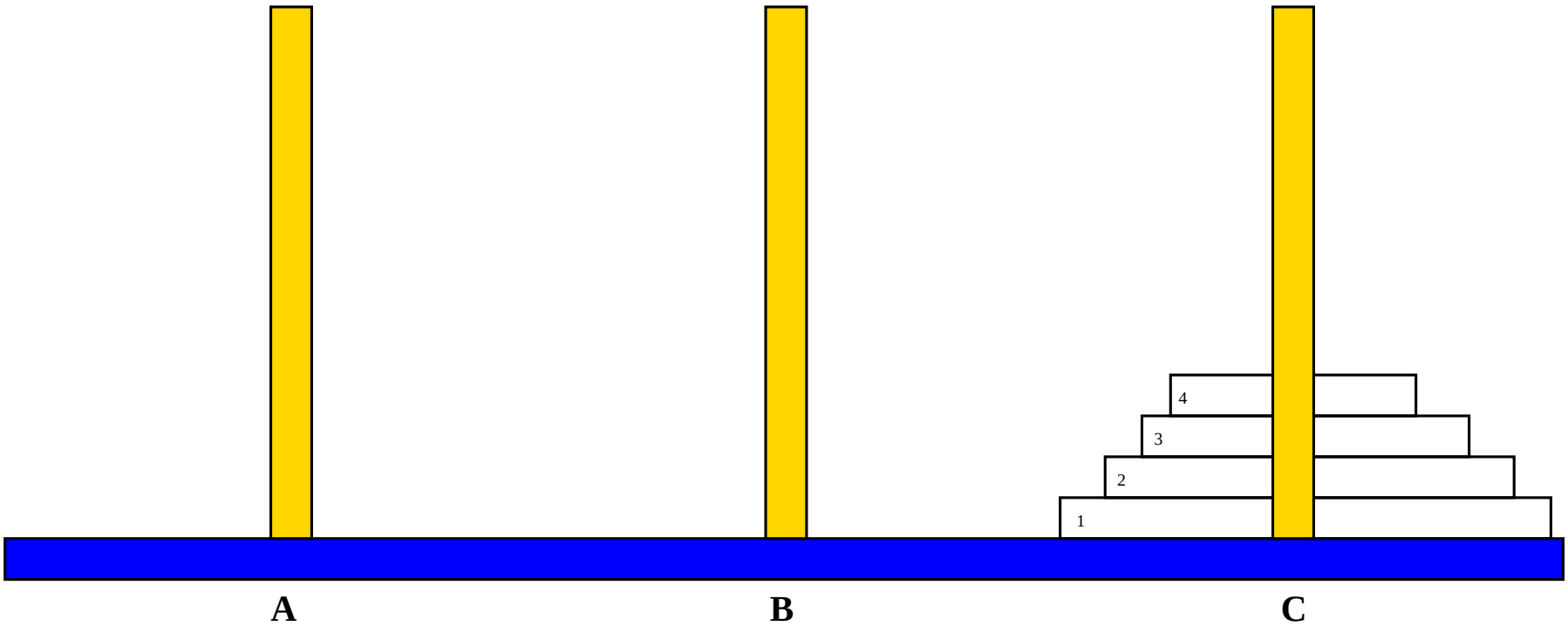
El problema de las Torres de Hanoi: 4 discos



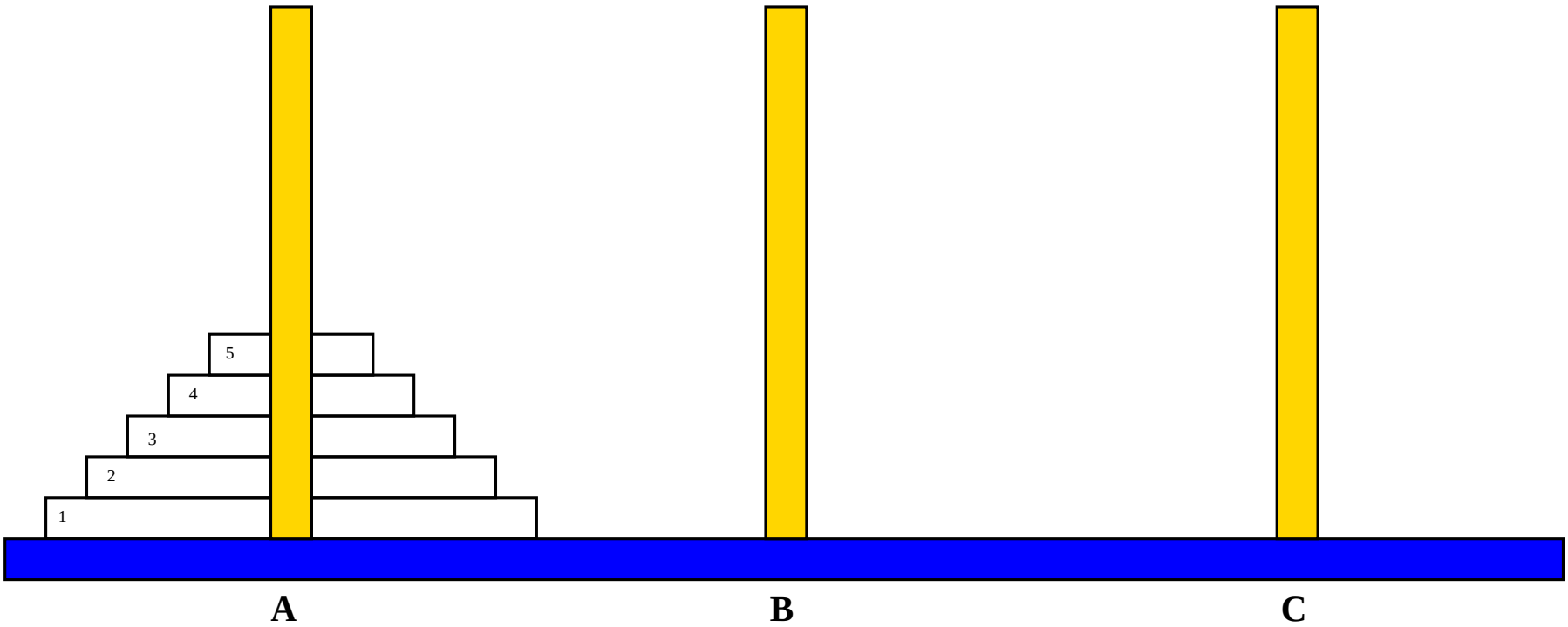
El problema de las Torres de Hanoi: 4 discos



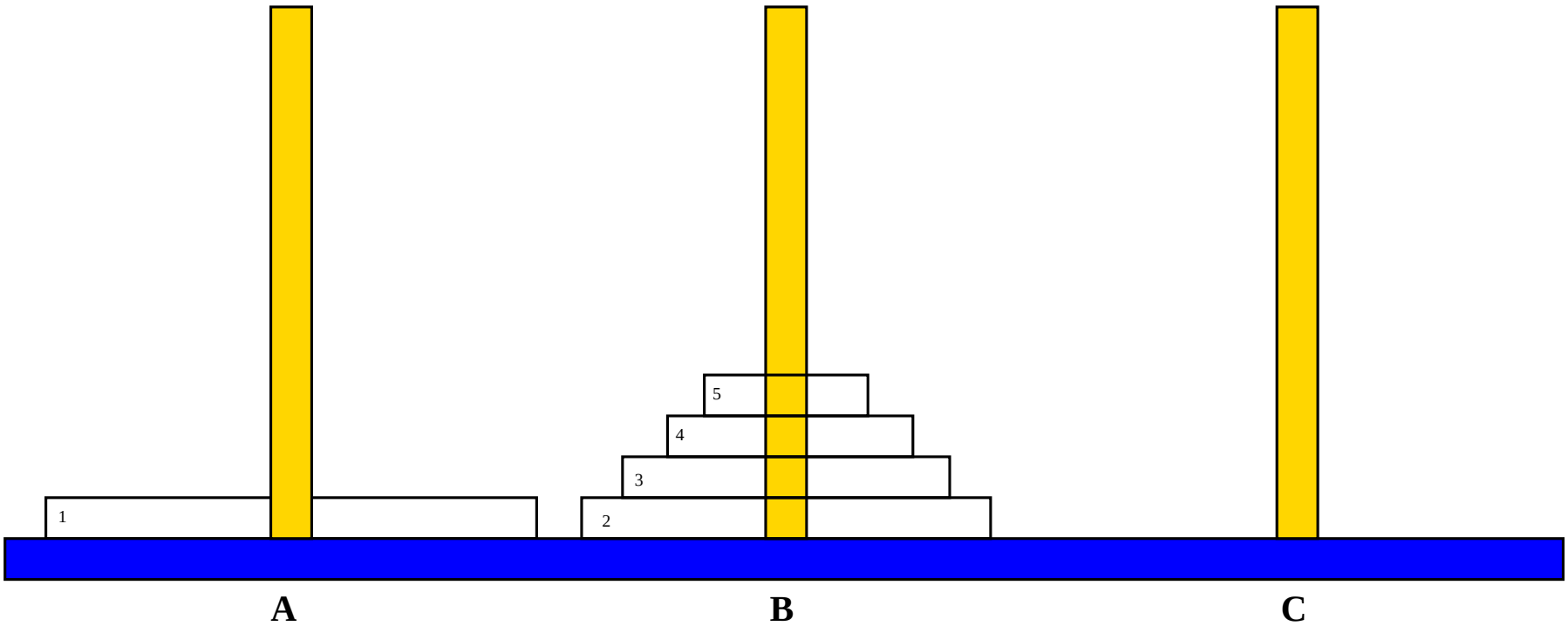
El problema de las Torres de Hanoi: 4 discos



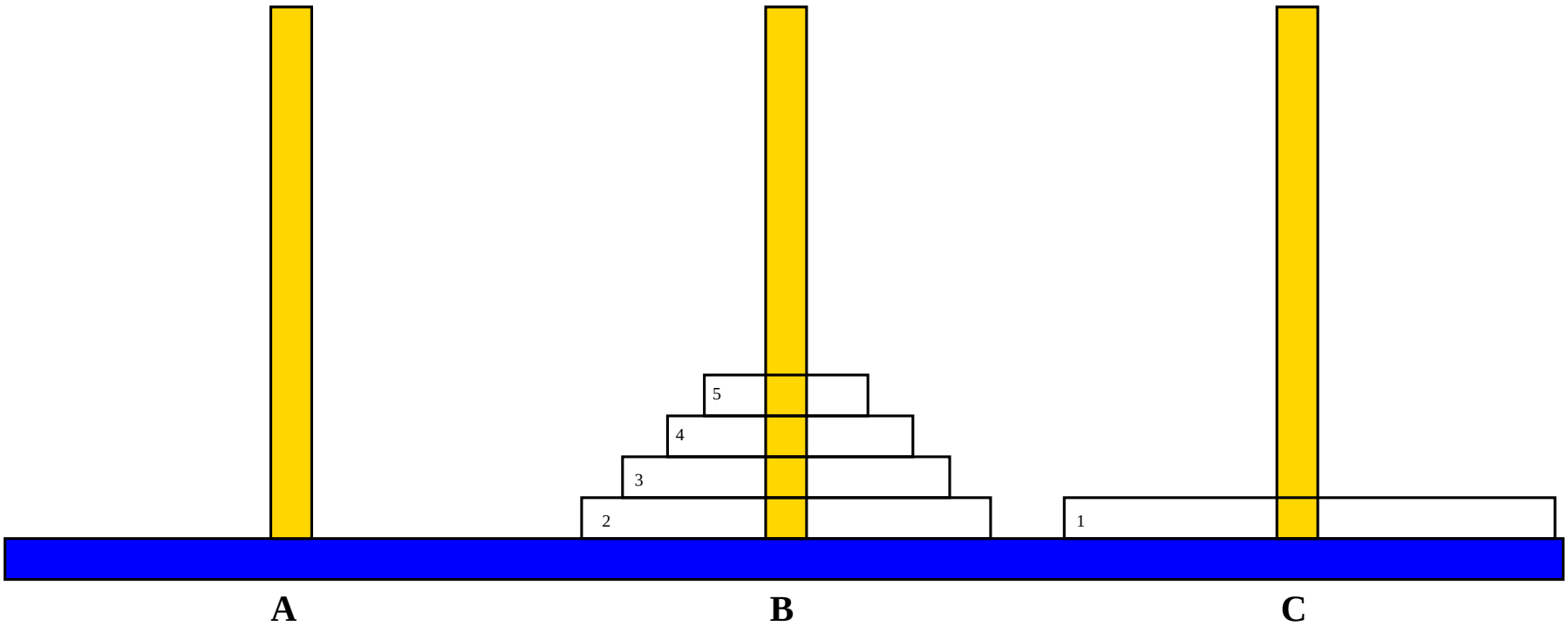
El problema de las Torres de Hanoi: 5 discos



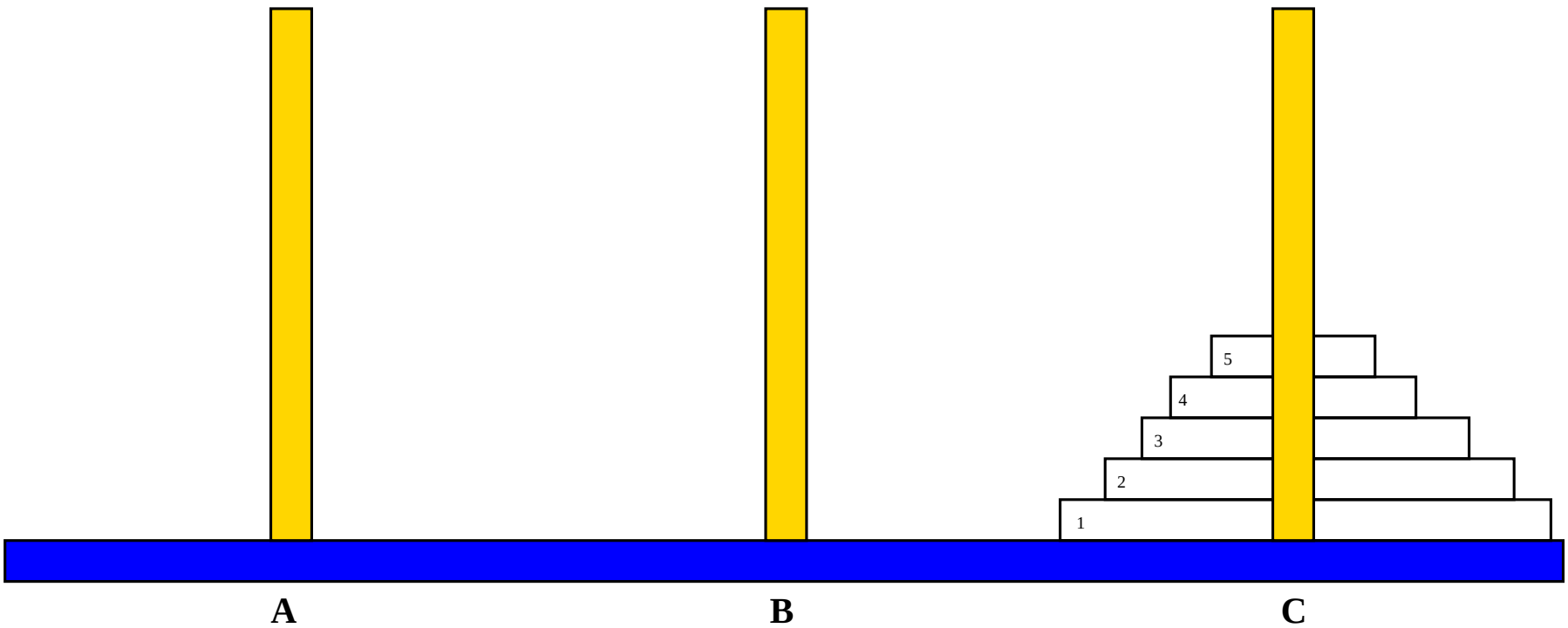
El problema de las Torres de Hanoi: 5 discos



El problema de las Torres de Hanoi: 5 discos



El problema de las Torres de Hanoi: 5 discos



El problema de las Torres de Hanoi

* **Diseño** (recursivo)

```
procedimiento Hanoi (n, 1, 3), con n > 0
        si n > 0 entonces
                Hanoi (n-1, 1, 2)
                mover disco de 1 a 3
                Hanoi (n-1, 2, 3)
```

* **Verificación** (inducción).

* **Análisis** (inducción):

$f(n)$ = número de movimientos para resolver el problema de Hanoi correspondiente a n discos.

$$\begin{cases} f(0) & = & 0 \\ f(n+1) & = & 2 \cdot f(n) + 1 \end{cases}$$

Se prueba que $f(n) = 2^n - 1$.

El problema de las Torres de Hanoi

Para resolver el problema con n discos

* Número de movimientos a realizar : $2^n - 1$.

Supongamos que:

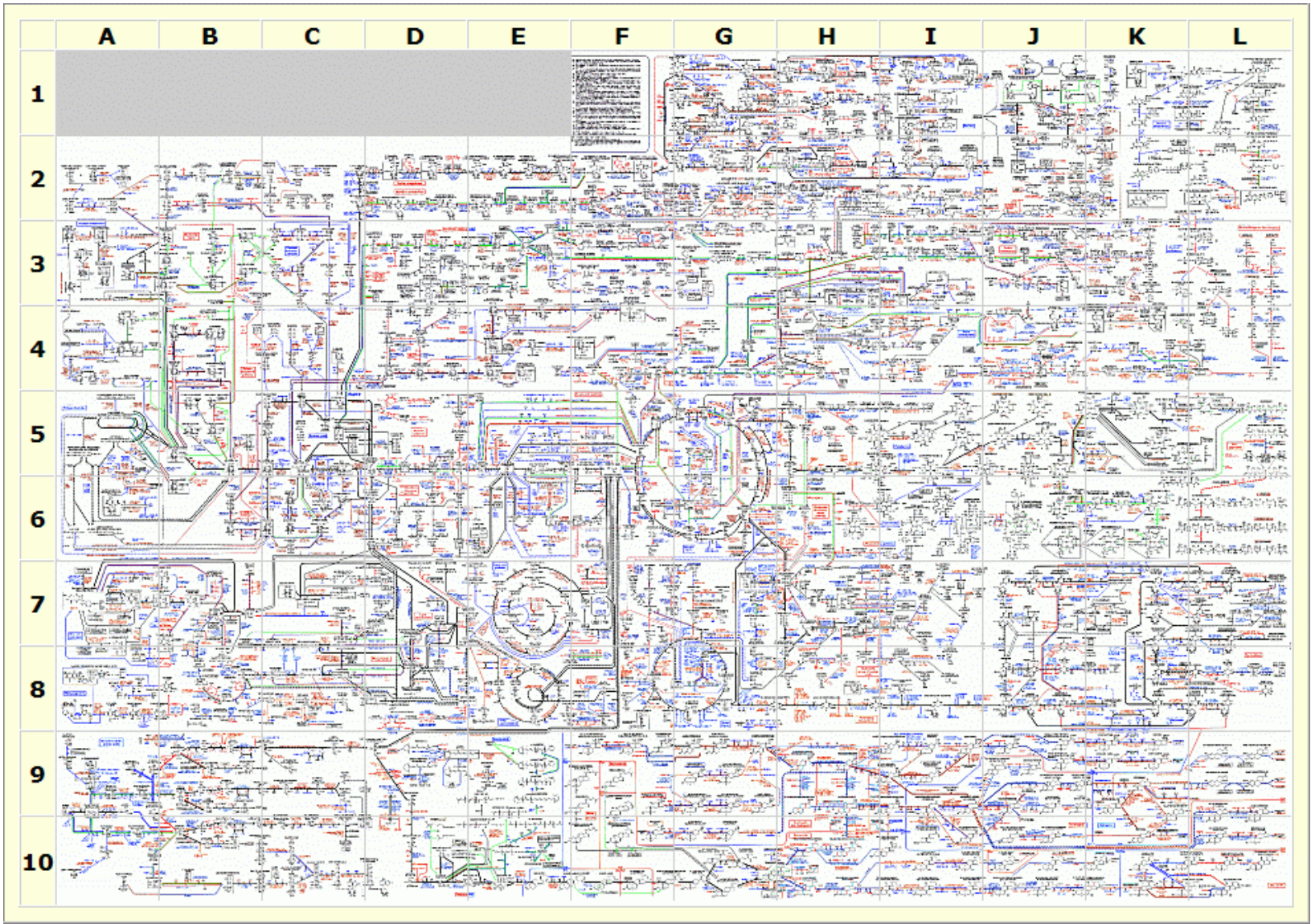
* Tenemos **64 discos**.
* Se tarda **un segundo** en mover un disco de una varilla a otra.
* Los monjes **trabajan las 24 horas** del día.

¿Cuánto tiempo se necesitará para resolver el problema "divino"?

* Aproximadamente ... **¡500 millones de años!**

Problemas presuntamente intratables

Problema del que se desconoce si es tratable o no, si bien la comunidad científica "está convencida" de que es intratable.



El problema del campeonato de liga de fútbol

Tras la jornada 25 del campeonato de liga de fútbol de primera división, un aficionado desea saber si su equipo tiene posibilidades matemáticas de quedar campeón.

* Sistema antiguo de puntuación $(2, 1, 0)$: **tratable**
* Sistema nuevo de puntuación $(3, 1, 0)$: **presuntamente intratable**

Las clases P y NP

P: clase de todos los problemas de decisión que son resolubles por **MTDs** que trabajan en tiempo polinomial (**problemas tratables**).

NP: clase de todos los problemas de decisión que son resolubles por **MTNDs** que trabajan en tiempo polinomial (**tratabilidad en modo no determinista**).

Puesto que toda MTD es una MTND, se tiene que **P** $\subseteq$ **NP**.

¿Es estricta la inclusión **P**$\subseteq$**NP**?

El problema P versus NP

DETERMINAR SI LAS CLASES P y NP SON IGUALES

Informalmente:

* **Encontrar** soluciones versus **comprobar** si una posible solución es correcta.

Se cree que es más difícil **resolver** un problema que **chequear** la corrección de una presunta solución (es decir, se cree que **P** $\neq$ **NP**).

(Clay Mathematics Institute: The Millenium Prize Problems)

La conjetura P $\neq$ NP

Si se verificara que **P** $\subsetneq$ **NP**, los candidatos idóneos para su demostración serían los **problemas más difíciles** de la clase **NP**.

Criptografía moderna (**public–key cryptography**: **DSE** y **RSA**).

* ¿Descifrar textos codificados en el sistema **Data Encryption Standard**?

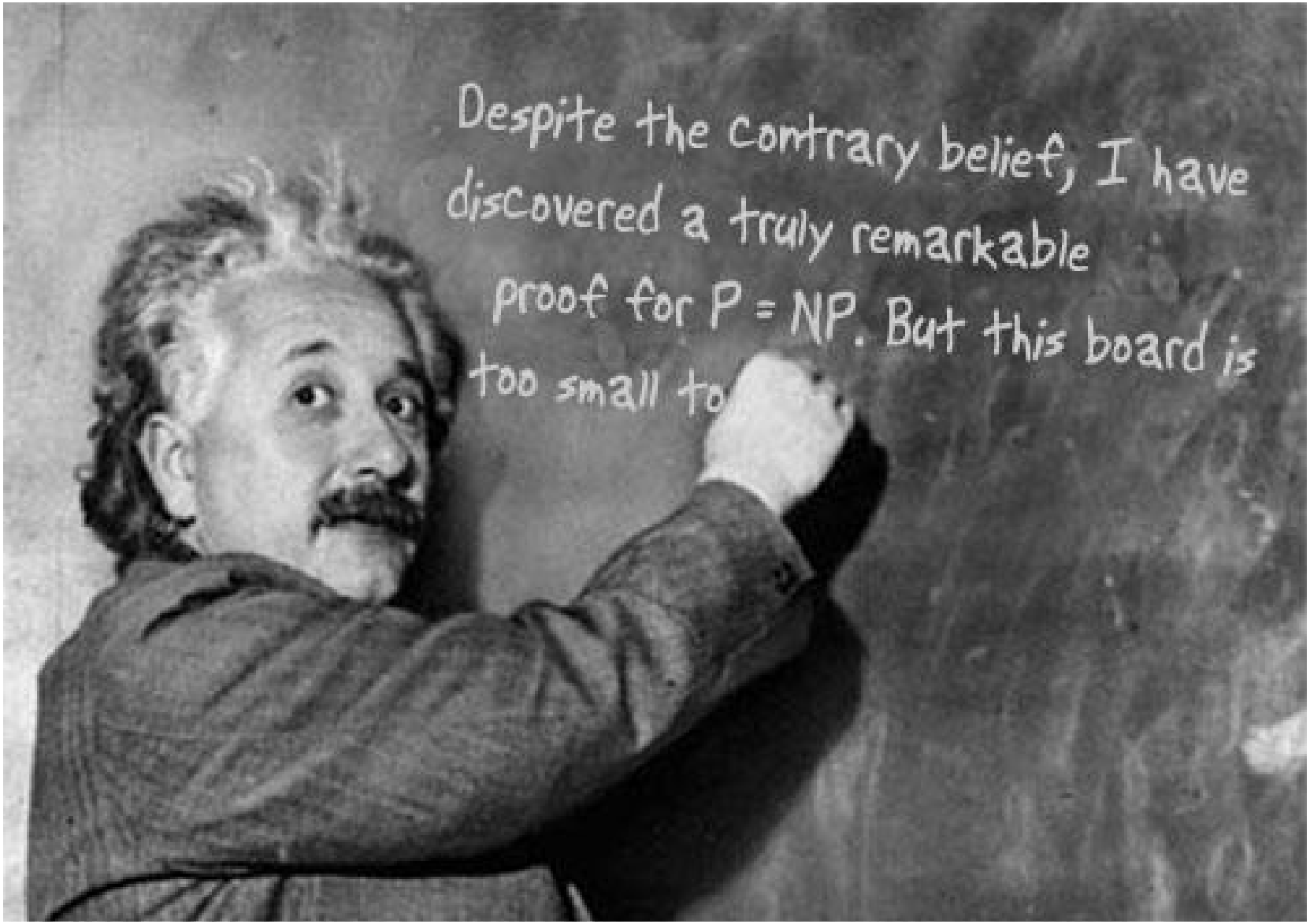
Ataque convencional sobre un texto **DES** mediante búsqueda exhaustiva:

* Un ordenador capaz de realizar un millón de operaciones por segundo, tardaría unos **mil años**.

* Puede ser descifrado por un **ordenador molecular** (de propósito general) en unos cuatro meses (D. Boneh, Ch. Dunworth y R.J. Lipton, 1996).

- ¿Qué sucedería si se probara que **P** $\neq$ **NP**?
  - ⋆ Reforzamiento de la **seguridad** de los actuales **sistemas de encriptación**.
  - ⋆ Existencia de problemas de complejidad **intermedia** (R. Ladner, 1975).

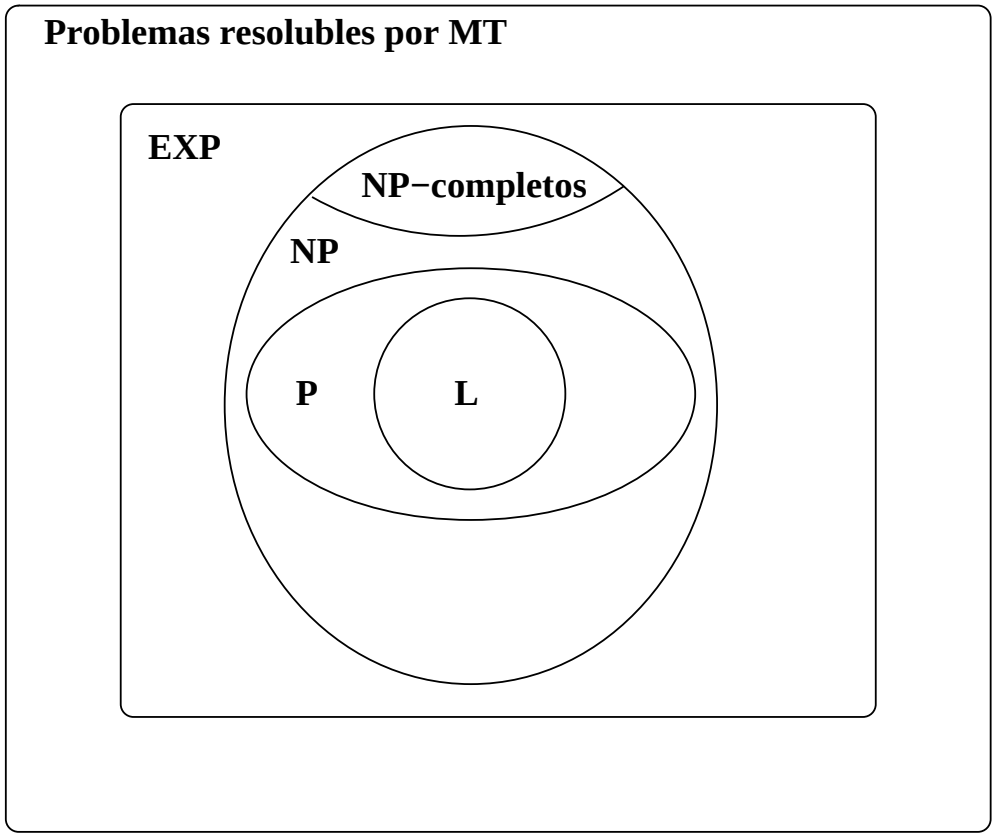
- ¿Qué sucedería si se probara que **P** $=$ **NP**?
  - ⋆ Consecuencias funestas para los sistemas de encriptación actuales.
  - ⋆ Obtención de **pruebas mecánicas de teoremas** matemáticos de interés.
  - ⋆ Posibilidad de construir un **decodificador universal** (**!!!**).


Despite the contrary belief, I have
discovered a truly remarkable
proof for P = NP. But this board is
too small to

Problemas NP–completos

Son los **problemas más difíciles** de la clase **NP**.

Candidatos idóneos para atacar el problema **P versus NP** (son **presuntamente intratables**).



Primer problema **NP**-completo (S.A. Cook, 1971):

* El problema **SAT** de la satisfactibilidad de la lógica proposicional.

Necesidad de mejorar **cuantitativamente** la resolución mecánica de problemas **NP**–completos.

¿Cómo enfrentarnos a un problema que es presuntamente intratable?

* Preguntarnos en qué aspecto del problema radica la razón de la dificultad.
* Intentar buscar una **solución aproximada** más simple.
* Tener presente que para algunos problemas, los algoritmos usan muchos recursos sólo en el caso peor.
* Considerar otros **modelos alternativos (no convencionales)**, una vez conocidas las limitaciones de las máquinas electrónicas.

Por ejemplo, los inspirados... en la ¡Naturaleza!