

Teoría de la Complejidad Computacional

Tema 8: Una nueva metodología para atacar el problema P versus NP

David Orellana Martín

Grupo de Investigación en Computación Natural
Dpto. Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial
Universidad de Sevilla

dorellana@us.es

Máster Universitario en Lógica, Computación e Inteligencia Artificial
Curso 2023-2024



Índice

- * El problema **P versus NP**.
- * Tratabilidad e intratabilidad de problemas abstractos.
- * Eficiencia y presumible eficiencia de modelos de computación.
- * Nueva metodología para atacar el problema **P versus NP**.
- * Fronteras de la tratabilidad en Computación Celular con Membranas.

El problema **P** versus **NP** (I)

- Informalmente, el **problema central** de la Teoría de la Complejidad Computacional, consiste en:

$$P = NP?$$

- ★ **Encontrar** soluciones versus **comprobar la corrección** de las soluciones.
- ★ **Demostración** versus **verificación de su corrección**.

El problema P versus NP (II)

Es creencia generalizada que es más difícil:

- * **resolver** un problema que **comprobar** si una posible solución del mismo es una solución correcta.

Es decir, la comunidad científica está convencida de que $P \neq NP$.



Atacando la resolución del problema **P** versus **NP**

Aproximación clásica (1970):

- **P** $\neq$ **NP**
 - * Encontrar un problema **NP**-completo que no pertenece a la clase **P**.
- **P** = **NP**.
 - * Encontrar un problema **NP**-completo que pertenece a la clase **P**.

En este tema, se proporciona una nueva metodología para atacar el problema **P** versus **NP** y, en particular, se usa el paradigma de Membrane Computing.

Problemas tratables e intratables

Problema **tratable** respecto de una medida de complejidad:

- ★ Existe una MTD que resuelve el problema y usa una cantidad de recursos (respecto de esa medida) que es polinomial en el tamaño de la entrada.

Problema **intratable** respecto de una medida de complejidad:

- ★ Toda MTD que resuelve el problema requiere una cantidad de recursos (respecto de esa medida) que es, al menos, exponencial en el tamaño de la entrada.

Problemas tratables e intratables

- En cualquier modelo de computación y respecto de cualquier medida de complejidad, **existen problemas intratables**.
- **P** es la **clase** de complejidad **de los problemas tratables** respecto de la **medida** de complejidad **tiempo**.
- Si **P** = **NP** entonces los problemas **NP-completos** son **tratables**, respecto de la **medida** de complejidad **tiempo**.
- Si **P** $\neq$ **NP** entonces los problemas **NP-completos** son **intratables**, respecto de la **medida** de complejidad **tiempo**.
- Es creencia generalizada que **P** $\neq$ **NP**. Por ello, a los problemas **NP-completos** se les denomina **presuntamente intratables** (respecto de la **medida** de complejidad **tiempo**).

Eficiencia de un modelo de computación

A partir de ahora, vamos a centrarnos en la **medida** de complejidad **tiempo**.

Modelo de computación eficiente: capacidad para resolver problemas intratables en tiempo polinomial.

De acuerdo con esta definición y respecto de la **medida** de complejidad **tiempo**:

- ★ El modelo de las **MTDs** **no** es **eficiente**.
- ★ Si $P \neq NP$ entonces el modelo de las **MTNDs** es **eficiente** (ya que, en este caso, los problemas **NP**-completos son intratables).

Modelo de computación presumiblemente eficiente: capacidad para resolver problemas NP-completos en tiempo polinomial.

De acuerdo con esta definición y respecto de la **medida** de complejidad **tiempo**:

- ★ El modelo de las **MTNDs** es presumiblemente eficiente.
- ★ Si $P \neq NP$ entonces los modelos presumiblemente eficientes son modelos eficientes.

Extensión de un modelo de computación

Sean M_1 y M_2 dos modelos de computación.

- ★ M_2 es una **extensión** de M_1 (o bien, M_1 es un **submodelo** de M_2) si todo procedimiento mecánico de M_1 **es**, así mismo, un procedimiento mecánico de M_2 .

Si un modelo de computación M_2 es una extensión de un modelo de computación M_1 , entonces:

- Toda solución S de un problema abstracto X en M_1 **es**, así mismo, una solución de X en M_2 .
- Los procedimientos mecánicos de M_2 se obtienen a partir de los de M_1 **añadiendo** una serie de ingredientes sintácticos y/o semánticos.

Fronteras entre no eficiencia y presumible eficiencia

Sean M_1 y M_2 dos modelos de computación tales que:

- ★ M_1 es un modelo modelo **no eficiente**.
- ★ M_2 es un modelo **presumiblemente eficiente**.
- ★ M_2 es una **extensión** de M_1 .

Entonces, una **frontera** entre la **no eficiencia** y la **presumible eficiencia** se obtiene al “pasar” del modelo M_1 al modelo M_2 . Es decir:

- ★ Los ingredientes añadidos a M_1 para obtener M_2 proporcionan una **frontera** entre la **no eficiencia** y la **presumible eficiencia**.

**Non
efficiency**

M_1

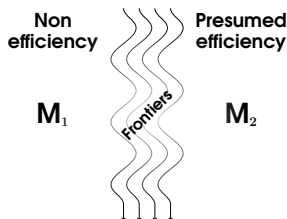
**Presumed
efficiency**

M_2



!!! Cada una de esas fronteras proporciona una nueva forma de atacar el problema P versus NP !!!

Atacando el problema **P** versus **NP**



P = NP

- ★ Hallar una solución eficiente S de un problema **NP**-completo, X , en M_2 tal que:
 - A partir de S , se pueda diseñar una solución eficiente de X en M_1 (los ingredientes añadidos a M_1 para obtener M_2 **no juegan un papel relevante en esa solución S**).

P $\neq$ NP

- ★ Hallar una solución eficiente S de un problema **NP**-completo, X , en M_2 tal que:
 - A partir de S , no se pueda diseñar una solución eficiente de X en M_1 (los ingredientes añadidos a M_1 para obtener M_2 **juegan un papel relevante en esa solución S**).

Uso de la metodología en el paradigma de la computación celular

Sea $\mathcal{R}$ un modelo de computación en el paradigma de la computación celular; es decir, $\mathcal{R}$ es una clase de sistemas de membranas reconocedores.

- ★ $\mathcal{R}$ es no eficiente **sii** $\text{PMC}_{\mathcal{R}} = \text{P}$.
- ★ $\mathcal{R}$ es presumiblemente eficiente **sii** $\text{NP} \cup \text{co-NP} \subseteq \text{PMC}_{\mathcal{R}}$.

Fronteras de la eficiencia en sistemas P que trabajan a modo de células

Recuérdese que:

- ★ $\mathcal{NAM}$ denota el modelo de computación de los sistemas P reconocedores con membranas activas y sin reglas de división.
- ★ $\mathcal{AM}$ denota el modelo de computación de los sistemas P reconocedores con membranas activas y con reglas de división.

Entonces se verifica lo siguiente:

- ★ $\mathbf{PMC}_{\mathcal{NAM}} = \mathbf{P}$ (establecido en ¹).
- ★ El modelo de computación $\mathcal{NAM}$ es **no eficiente**.
- ★ $\mathbf{SAT} \in \mathbf{PMC}_{\mathcal{AM}}$ (establecido en ²) y, por tanto, $\mathbf{NP} \cup \mathbf{co-NP} \subseteq \mathbf{PMC}_{\mathcal{AM}}$.
- ★ El modelo de computación $\mathcal{AM}$ es **presumiblemente eficiente**.

¹ A. E. Porreca. Computational complexity classes for membrane systems. *Master Degree Thesis*, Università di Milano-Bicocca, Italy, 2008.

² M.J. Pérez-Jiménez, A. Romero, F. Sancho. Complexity classes in models of cellular computing with membranes. *Natural Computing*, 2, 3 (2003), 265-285.

Fronteras de la eficiencia en sistemas P que trabajan a modo de células

Así pues, “pasar” del modelo de computación $\mathcal{N}AM$ al modelo AM equivale a “pasar” de la **no eficiencia** a la **presumible eficiencia**. Por tanto:

- ★ El ingrediente añadido al modelo $\mathcal{N}AM$ para obtener el modelo AM (la regla de división) proporciona una **frontera** entre la **no eficiencia** y la **presumible eficiencia**.

En consecuencia, en el marco de los sistemas P reconocedores con membranas activas y bajo el supuesto de que $P \neq NP$:

- ★ La **regla de división** proporciona una **frontera de la eficiencia** (o de la **tratabilidad** de problemas).
 - Específicamente, permitir o no las reglas de división en el modelo de computación de los sistemas P reconocedores con membranas activas, equivale a “pasar” de la eficiencia a la no eficiencia.

Consideremos el modelo de computación $\mathcal{AM}^0$ de los sistemas P reconocedores con membranas activas y **sin polarizaciones**.

En estos sistemas, las reglas son del siguiente tipo:

- | | |
|--|-----------------------|
| (a) $[a \rightarrow u]_i$ | evolución |
| (b) $a []_i \rightarrow [b]_i \ (i \neq 1)$ | comunicación-in |
| (c) $[a]_i \rightarrow b []_i$ | comunicación-out |
| (d) $[a]_i \rightarrow b \ (i \neq 1 \text{ e } i \neq i_{out})$ | disolución |
| (e) $[a]_i \rightarrow [b]_i [c]_i \ (i \neq 1, i \neq i_{out} \text{ e } i \text{ elemental})$ | división elemental |
| (f) $[[]_j []_k]_i \rightarrow [[]_j]_i [[]_k]_i \ (i \neq 1, i \neq i_{out} \text{ e } i \text{ no elemental})$ | división no elemental |

1 es la etiqueta de la membrana piel, e i_{out} es la etiqueta de la zona de salida.

Fronteras de la eficiencia en sistemas P que trabajan a modo de células

Las notaciones $\mathcal{AM}^0(\alpha, \beta)$, con $\alpha \in \{-d, +d\}$ y $\beta \in \{-ne, +ne\}$ significan lo siguiente:

- ★ $\alpha = -d$: se prohibe el uso de reglas de disolución.
- ★ $\alpha = +d$: se permite el uso de reglas de disolución.
- ★ $\beta = -ne$: se prohibe el uso de reglas de división para membranas no elementales.
- ★ $\beta = +ne$: se permite el uso de reglas de división para membranas elementales y no elementales.

Recuérdese que $\text{SAT} \in \text{PMC}_{\mathcal{AM}(-d)}$.

Algunos resultados importantes:

- * $\text{PMC}_{\mathcal{AM}^0(-d, +ne)} = \mathbf{P}^3$ (técnica del **grafo de dependencia**).
- * $\text{Subset} - \text{Sum} \in \text{PMC}_{\mathcal{AM}^0(+d, +ne)}^1$.
- * ¿Se pueden resolver problemas **NP**-completos mediante familias de $\mathcal{AM}^0(+d, -ne)$, en tiempo polinomial?
- * Conjetura de Păun (2005): $\text{PMC}_{\mathcal{AM}^0(+d, -ne)} = \mathbf{P}$.

³M.A. Gutiérrez, M.J. Pérez-Jiménez, A. Riscos, F.J. Romero. On the power of dissolution in P systems with active membranes. **Lecture Notes in Computer Science**, 3850 (2006), 224–240.

Fronteras de la eficiencia en sistemas P que trabajan a modo de células

Nuevas fronteras entre la no eficiencia y la presumible eficiencia:

- * Pasar de $\mathcal{AM}^0(-\mathbf{d})$ a $\mathcal{AM}(-\mathbf{d})$: la polarización.
- * Pasar de $\mathcal{AM}^0(-\mathbf{d}, +\mathbf{ne})$ a $\mathcal{AM}^0(+\mathbf{d}, +\mathbf{ne})$: las reglas de disolución.

Fronteras de la eficiencia en sistemas P que trabajan a modo de tejidos

Para cada $k \geq 1$,

- ★ $\mathcal{TC}(k)$: modelo de computación de los sistemas P reconocedores de tejidos con reglas de comunicación que tienen **longitud, a lo sumo, k** .
- ★ $\mathcal{TDC}(k)$: modelo de computación de los sistemas P reconocedores de tejidos con reglas de división celular y cuyas reglas de comunicación tienen **longitud, a lo sumo, k** .

Se verifica lo siguiente:

- ★ $P = \text{PMC}_{\mathcal{TC}(k)} = \text{PMC}_{\mathcal{TDC}(1)}$ (resultado establecido en ⁴)
- ★ Los modelos de computación $\mathcal{TC}(k)$ y $\mathcal{TDC}(1)$ son **no eficientes**,
- ★ $\text{HAM} - \text{CYCLE} \in \text{PMC}_{\mathcal{TDC}(2)}$ (resultado establecido en ⁵)
- ★ El modelo de computación $\mathcal{TDC}(2)$ es **presumiblemente eficiente**.

⁴R. Gutiérrez-Escudero, M.J. Pérez-Jiménez, M. Rius-Font. Characterizing tractability by tissue-like P systems. *Lecture Notes in Computer Science*, 5957 (2010), 289-300.

⁵A.E. Porreca, N. Murphy, M.J. Pérez-Jiménez. An optimal frontier of the efficiency of tissue P systems with cell division. In M. García-Quismondo, L.F. Macías-Ramos, Gh. Paun, I. Pérez Hurtado, L. Valencia-Cabrera (eds.) *Proceedings of the Tenth Brainstorming Week on Membrane Computing*, Volume II, Seville, Spain, January 30-February 3, 2012, Report RGNC 01/2012, Fénix Editora, 2012, pp. 141-166.

Fronteras de la eficiencia en sistemas P que trabajan a modo de tejidos

“Pasar” del modelo de computación $TC(2)$ al modelo $TDC(2)$ equivale a “pasar” de la **no eficiencia** a la **presumible eficiencia**. Por tanto:

- ★ El ingrediente añadido al modelo $TC(2)$ para obtener $TDC(2)$ (permitir reglas de división) proporciona una **frontera** entre la **no eficiencia** y la **presumible eficiencia**.

En consecuencia, en el marco de los sistemas P de tejidos con reglas de comunicación de longitud, a lo sumo, 2, y bajo el supuesto de que $P \neq NP$:

- ★ Las **reglas de división** proporcionan una **frontera de la tratabilidad** de problemas.
 - Específicamente, permitir o no reglas de división en el modelo de computación $TC(2)$ equivale a “pasar” de la eficiencia a la no eficiencia.

Fronteras de la eficiencia en sistemas P que trabajan a modo de tejidos

“Pasar” del modelo de computación $TDC(1)$ al modelo $TDC(2)$ equivale a “pasar” de la **no eficiencia** a la **presumible eficiencia**. Por tanto:

- ★ El ingrediente añadido al modelo $TDC(1)$ para obtener $TDC(2)$ (permitir reglas de comunicación de longitud 2) proporciona una **frontera** entre la **no eficiencia** y la **presumible eficiencia**.

En consecuencia, en el marco de los sistemas P de tejidos con reglas de división celular y reglas de comunicación, y bajo el supuesto de que $P \neq NP$:

- ★ La **longitud de las reglas de comunicación** proporciona una **frontera de la eficiencia** (o de la **tratabilidad** de problemas).
 - Específicamente, permitir o no reglas de comunicación de longitud 2 en el modelo de computación $TDC(1)$ equivale a “pasar” de la eficiencia a la no eficiencia.