El problema **SP** (del *subgrafo bipartito*) es el siguiente:

> *Dado un grafo no dirigido $G = (V, E)$ y un número natural $k \leq |V|$, determinar si existe un subgrafo bipartito que se obtiene a partir de G eliminando, a lo sumo, k vértices*

Probar que existe una reducibilidad en tiempo polinomial del problema **CLIQUE** en el problema **SP**, concluyendo que el problema **SP** es **NP**–completo.

Indicaciones:
Recuérdese que un grafo no dirigido $G = (V, E)$ es bipartito si existen $V_1, V_2 \subseteq V$ tales que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ y $\{u, v\} \in E \Rightarrow u \in V_1 \wedge v \in V_2$ (en esas condiciones, se dice que *los conjuntos V_1, V_2 verifican la condición de bipartito para G*).

Considérese la aplicación $F : E_{\mathbf{CLIQUE}} \Rightarrow E_{\mathbf{SP}}$ definida como sigue: $F(G, k) = (G', k')$. En donde:

- Si $G = (V, E)$ con $|V| = n$, entonces se considera un conjunto $U = \{u_1, \ldots, u_n\}$ tal que $U \cap V = \emptyset$. A partir de aquí se define el grafo no dirigido $G' = (V', E')$ así:
  - $V' = U \cup V$.
  - $E' = \{\{u, v\} \mid u \in V', v \in V', \{u, v\} \notin E, |\{u, v\} \cap U| \leq 1\}$
- $k' = n - k$.

Hay que demostrar que el grafo G posee un clique de tamaño k si y sólo si el grafo G' tiene un subgrafo acíclico obtenido a partir de G' eliminando, a lo sumo, k vértices. Para ello:

- Supongamos que el grafo $G = (V, E)$ posee un clique V_1 de tamaño k. Entonces se considera el siguiente subgrafo $G'' = (V'', E'')$ de G':
  - $V'' = V_1 \cup U$.
  - $\{u, v\} \in E'' \Leftrightarrow u, v \in V'' \wedge \{u, v\} \in E'$

  Pruébese que G'' es un subgrafo bipartito de G' obtenido de éste eliminando exactamente $n - k$ vértices de G'.

- Supongamos ahora que $G_1 = (V_1, E_1)$ es un subgrafo bipartito de G' obtenido de éste eliminando, a lo sumo, $n - k$ vértices de G'. Sean V_2, V_3 subconjuntos de V_1 que satisfacen la condición de bipartito (para G_1). Entonces:
  - Pruébese que uno de esos conjuntos (V_2 o V_3) ha de estar contenido en V y el otro ha de estar contenido en U.
  - Pruébese que el conjunto (V_2 o V_3) que esté contenido en V, es un clique de G y tiene tamaño mayor o igual que k.
  - Dedúzcase de lo anterior que el grafo G posee un clique de tamaño k.