

El problema **EXACT-COVER** es el siguiente:

Dado un conjunto finito A y una familia $\mathcal{F}$ de subconjuntos de A , determinar si existe una subfamilia $\mathcal{F}'$ de $\mathcal{F}$ verificando la siguiente propiedad:

Para cada $x \in A$ existe un único conjunto $A_x \in \mathcal{F}'$ tal que $x \in A_x$

En el contexto anterior, se dice que $\mathcal{F}'$ es un **recubrimiento exacto** de $(A, \mathcal{F})$. Probar que existe una reducibilidad en tiempo polinomial del problema **3-COL** en el problema **EXACT-COVER**, concluyendo que el problema **EXACT-COVER** es **NP-completo**.

Indicaciones:

Considérese la aplicación $F : E_{\mathbf{3-COL}} \rightarrow E_{\mathbf{EXACT-COVER}}$ definida como sigue: sea $G = (V, E)$ un grafo no dirigido,

- Se considera el siguiente conjunto A :
 - Cada nodo u del grafo proporciona los elementos u, p_u^1, p_u^2, p_u^3 .
 - Cada arista $\{u, w\}$ del grafo proporciona los elementos $q_{uw}^1, q_{uw}^2, q_{uw}^3, q_{wu}^1, q_{wu}^2, q_{wu}^3$.
- Se considera la siguiente familia $\mathcal{F}$ de subconjuntos de A :

$$\mathcal{F} = \bigcup_{u \in V} \{\{u, p_u^1\}, \{u, p_u^2\}, \{u, p_u^3\}, A_u^1, A_u^2, A_u^3\} \cup \bigcup_{\{u, w\} \in E} \{\{q_{uw}^i, q_{wu}^j\} : 1 \leq i < j \leq 3\}$$

en donde, para cada $u \in V$ y cada j ($1 \leq j \leq 3$)

$$A_u^j = \{q_{uw}^j : \{u, w\} \in E\} \cup \{p_u^j\}$$

Probar que un grafo no dirigido G es coloreable con tres colores si y sólo si $(A, \mathcal{F})$ posee un recubrimiento exacto.

- Si f es una coloración válida de G con tres colores, constrúyase la familia:

$$\mathcal{F}' = \bigcup_{u \in V} \{\{u, p_u^{f(u)}\}\} \cup \bigcup_{u \in V} \{A_u^j : j \neq f(u)\} \cup \bigcup_{\{u, w\} \in E} \{\{q_{uw}^{f(u)}, q_{wu}^{f(w)}\}\}$$

- Si $\mathcal{F}'$ es un recubrimiento exacto de $(A, \mathcal{F})$, entonces:
 - Obsérvese que para cada $x \in V$ existe un único $c_x \in \{1, 2, 3\}$ tal que $\{x, p_x^{c_x}\} \in \mathcal{F}'$.
 - Considérese la coloración f definida como sigue: $f(x) = c_x$ y pruébese que dicha coloración de G es válida.
-