

El problema SUBSET-SUM

Una **función peso sobre un conjunto finito no vacío** A es una aplicación w de $\mathcal{P}(A)$ en $\mathbf{N}$ tal que para cada $B \subseteq A$ se tiene que $w(B) = \sum_{x \in B} w(\{x\})$.

Para abreviar, notaremos $w(x)$ en lugar de $w(\{x\})$.

* *Dado un conjunto finito no vacío, A , una función peso, w , sobre A , y $k \in \mathbf{N}$, determinar si existe $B \subseteq A$ tal que $w(B) = k$.*

Proposición 1: SUBSET-SUM $\in$ NP.

Teorema 2: El problema SUBSET-SUM es NP-completo.

Demostración: Veamos que $\mathbf{VC} \leq^P \mathbf{SUBSET-SUM}$.

Sea $(G = (V, E), k) \in E_{\mathbf{VC}}$, con $V = \{0, \dots, n-1\}$ y $E = \{e_0, \dots, e_{p-1}\}$.

Sea $B = (b_{ij})$ la **matriz de incidencia** de G .

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } e_j \text{ es incidente con el nodo } i \\ 0 & \text{e.c.o.c} \end{cases}$$

Sea $A = \{x_0, \dots, x_{n-1}\} \cup \{y_0, \dots, y_{p-1}\}$, en donde

$$x_i = (1, \underbrace{b_{i(p-1)}, b_{i(p-2)}, \dots, b_{i0}}_{(p-1-j)}) \quad (0 \leq i \leq n-1)$$

$$y_j = (0, 0, 0, \dots, 0, \underbrace{1}_{(p-1-j)}, 0, \dots, 0) \quad (0 \leq j \leq p-1)$$

x_0	=	1	$b_{0(p-1)}$	$b_{0(p-2)}$	$b_{0(p-3)}$	...	b_{02}	b_{01}	b_{00}
x_1	=	1	$b_{1(p-1)}$	$b_{1(p-2)}$	$b_{1(p-3)}$	...	b_{12}	b_{11}	b_{10}
x_2	=	1	$b_{2(p-1)}$	$b_{2(p-2)}$	$b_{2(p-3)}$	...	b_{22}	b_{21}	b_{20}
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
x_{n-1}	=	1	$b_{(n-1)(p-1)}$	$b_{(n-1)(p-2)}$	$b_{(n-1)(p-3)}$	...	$b_{(n-1)2}$	$b_{(n-1)1}$	$b_{(n-1)0}$
y_0	=	0	0	0	0	...	0	0	1
y_1	=	0	0	0	0	...	0	1	0
y_2	=	0	0	0	0	...	1	0	0
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
y_{p-3}	=	0	0	0	1	...	0	0	0
y_{p-2}	=	0	0	1	0	...	0	0	0
y_{p-1}	=	0	1	0	0	...	0	0	0
		4^p	4^{p-1}	4^{p-2}	4^{p-3}	...	4^2	4^1	4^0

Sea $w : A \rightarrow \mathbf{N}$ definida así:

- * $w(z)$ es el número cuyo desarrollo en base 4 está representado por la $(p+1)$ -tupla, z .

De la definición anterior resulta que

- * $w(x_i) = 4^p + \sum_{j=0}^{p-1} b_{ij} \cdot 4^j.$

- * $w(y_j) = 4^j.$

Sea $k' = k \cdot 4^p + \sum_{j=0}^{p-1} 2 \cdot 4^j \equiv k222 \dots 222_{(4)}.$

Consideremos $F : E_{\text{VC}} \rightarrow E_{\text{SUBSET-SUM}}$ definida así: $F(G, k) = (A, w, k')$.

- * F es total computable en tiempo polinomial.
- * **Aserto:** G tiene un recubrimiento de vértices de tamaño k sii existe $A' \subseteq A$ tal que $w(A') = k'$.

Prueba del aserto:

- * Sea $V' = \{i_1, \dots, i_k\}$ un recubrimiento de vértices de G de tamaño k . Sea

$$A' = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_k}\} \cup \{y_j : e_j \text{ es incidente con un } \underline{\text{único}} \text{ nodo de } V'\}$$

Se tiene que $w(A') = k'$.

- * Recíprocamente, sea $A' \subseteq A$ tal que $w(A') = k'$.

Sea $A' = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_m}\} \cup \{y_{j_1}, \dots, y_{j_q}\}$. Se tiene que

- ★ $V' = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_m}\}$ es un recubrimiento de vértices de G .
- ★ $m = k$.



El problema **PARTICION**

- * *Dado un conjunto, A y una función peso, w , sobre A , determinar si existe una partición $\{B, C\}$ de A tal que $w(B) = w(C)$.*

Proposición 1: **PARTICION** $\in$ **NP**.

Teorema 2: El problema **PARTICION** es **NP-completo**.

Demostración: Veamos que **SUBSET-SUM** $\leq^P$ **PARTICION**.

Consideremos la aplicación $F : E_{\text{SUBSET-SUM}} \rightarrow E_{\text{PARTICION}}$ definida así:

- * Sea $(A, w, k) \in E_{\text{SUBSET-SUM}}$. Sean a, b dos elementos que no son de A .
Sea $A' = A \cup \{a, b\}$. Sea $w' : A' \rightarrow \mathbf{N}$ definida así:

$$w'(x) = \begin{cases} w(x) & \text{si } x \in A \\ k + 1 & \text{si } x = a \\ w(A) - k + 1 & \text{si } x = b \end{cases}$$

- * Se define $F(A, w, k) = (A', w')$

Para cada $(A, w, k) \in E_{\text{SUBSET-SUM}}$ se verifica que

$$(A, w, k) \in L_{\text{SUBSET-SUM}} \iff (A', w') \in L_{\text{PARTICION}}$$

