Teoría de la Complejidad Computacional

Tema 8: Una nueva metodología para atacar el problema P versus NP

David Orellana Martín

Grupo de Investigación en Computación Natural
Dpto. Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial
Universidad de Sevilla

dorellana@us.es

Máster Universitario en Lógica, Computación e Inteligencia Artificial
Curso 2025-2026

Índice

* El problema **P versus NP**.
* Tratabilidad e intratabilidad de problemas abstractos.
* Eficiencia y presumible eficiencia de modelos de computación.
* Nueva metodología para atacar el problema **P versus NP**.
* Fronteras de la tratabilidad en Computación Celular con Membranas.

El problema P versus NP (I)

- Informalmente, el **problema central** de la Teoría de la Complejidad Computacional, consiste en:

  - ⋆ **Encontrar** soluciones versus **comprobar la corrección** de las soluciones.
  - ⋆ **Demostración** versus **verificación de su corrección**.

El problema P versus NP (II)

Es creencia generalizada que es más difícil:

* **resolver** un problema que **comprobar** si una posible solucion del mismo es una solucion correcta.

Es decir, la comunidad científica está convencida de que **P** $\neq$ **NP**.

Atacando la resolución del problema P versus NP

Aproximación clásica (1970):

- **P** $\neq$ **NP**
  - ∗ Encontrar <u>**un**</u> problema **NP**-completo que <u>**no pertenece**</u> a la clase **P**.
- **P** $=$ **NP**.
  - ∗ Encontrar <u>**un**</u> problema **NP**-completo que <u>**pertenece**</u> a la clase **P**.

En este tema, se proporciona una nueva metodología para atacar el problema **P versus NP** y, en particular, se usa el paradigma de Membrane Computing.

Problemas tratables e intratables

Problema tratable respecto de una medida de complejidad:

⋆ Existe una MTD que resuelve el problema y usa una cantidad de recursos (respecto de esa medida) que es polinomial en el tamaño de la entrada.

Problema intratable respecto de una medida de complejidad:

⋆ Toda MTD que resuelve el problema requiere una cantidad de recursos (respecto de esa medida) que es, al menos, exponencial en el tamaño de la entrada.

Problemas tratables e intratables

– En cualquier modelo de computación y respecto de cualquier medida de complejidad, **existen problemas intratables**.

– **P** es la **clase** de complejidad **de los problemas tratables** respecto de la **medida** de complejidad **tiempo**.

– Si **P** $=$ **NP** entonces los problemas **NP**-completos son **tratables**, respecto de la **medida** de complejidad **tiempo**.

– Si **P** $\neq$ **NP** entonces los problemas **NP**-completos son **intratables**, respecto de la **medida** de complejidad **tiempo**.

– Es creencia generalizada que **P** $\neq$ **NP**. Por ello, a los problemas **NP**-completos se les denomina **presuntamente intratables** (respecto de la **medida** de complejidad **tiempo**).

Eficiencia de un modelo de computación

A partir de ahora, vamos a centrarnos en la **medida** de complejidad **tiempo**.

Modelo de computación eficiente: capacidad para resolver problemas intratables en tiempo polinomial.

De acuerdo con esta definición y respecto de la **medida** de complejidad **tiempo**:

- ⋆ El modelo de las **MTD**s **no** es **eficiente**.
- ⋆ Si **P** $\neq$ **NP** entonces el modelo de las **MTND**s es **eficiente** (ya que, en este caso, los problemas **NP**-completos son intratables).

Modelo de computación presumiblemente eficiente: capacidad para resolver problemas **NP**-completos en tiempo polinomial.

De acuerdo con esta definición y respecto de la **medida** de complejidad **tiempo**:

- ⋆ El modelo de las **MTND**s es presumiblemente eficiente.
- ⋆ Si **P** $\neq$ **NP** entonces los modelos presumiblemente eficientes son modelos eficientes.

Extensión de un modelo de computación

Sean M_1 y M_2 dos modelos de computación.

- $\star$ M_2 es una **extensión** de M_1 (o bien, M_1 es un **submodelo** de M_2) si todo procedimiento mecánico de M_1 **es**, así mismo, un procedimiento mecánico de M_2.

Si un modelo de computación M_2 es una extensión de un modelo de computación M_1, entonces:

- Toda solución S de un problema abstracto X en M_1 **es**, así mismo, una solución de X en M_2.

- Los procedimientos mecánicos de M_2 se obtienen a partir de los de M_1 **añadiendo** una serie de ingredientes sintácticos y/o semánticos.

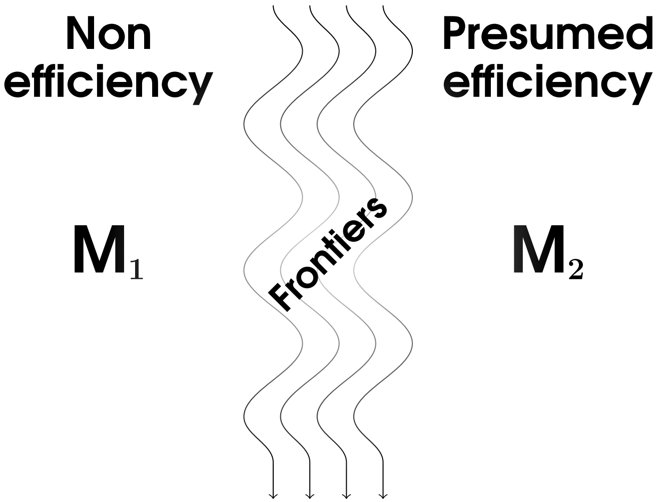
Fronteras entre no eficiencia y presumible eficiencia

Sean M_1 y M_2 dos modelos de computación tales que:

- ⋆ M_1 es un modelo modelo **no eficiente**.
- ⋆ M_2 es un modelo **presumiblemente eficiente**.
- ⋆ M_2 es una **extensión** de M_1.

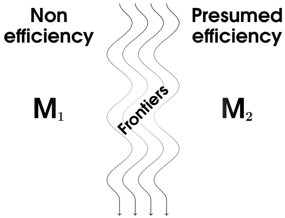
Entonces, una **frontera** entre la **no eficiencia** y la **presumible eficiencia** se obtiene al "pasar" del modelo M_1 al modelo M_2. Es decir:

- ⋆ Los ingredientes añadidos a M_1 para obtener M_2 proporcionan una **frontera** entre la **no eficiencia** y la **presumible eficiencia**.



!!! Cada una de esas fronteras proporciona una nueva forma de atacar el problema P versus NP !!!

Atacando el problema P versus NP



$\boxed{\mathbf{P} = \mathbf{NP}}$

- ⋆ Hallar una solucion eficiente S de un problema **NP**-completo, X, en M_2 tal que:
    - A partir de S, **se pueda diseñar** una solución eficiente de X en M_1 (los ingredientes añadidos a M_1 para obtener M_2 **no juegan un papel relevante en esa solución** S).

$\boxed{\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}}$

- ⋆ Hallar una solucion eficiente S de un problema **NP**-completo, X, en M_2 tal que:
    - A partir de S, **no se pueda** diseñar una solución eficiente de X en M_1 (los ingredientes añadidos a M_1 para obtener M_2 **juegan un papel relevante en esa solución** S).

Uso de la metodología en el paradigma de la computación celular

Sea $\mathcal{R}$ un modelo de computación en el paradigma de la computación celular; es decir, $\mathcal{R}$ es una clase de sistemas de membranas reconocedores.

- $\star$ $\mathcal{R}$ es no eficiente **sii** $\mathbf{PMC}_{\mathcal{R}} = \mathbf{P}$.
- $\star$ $\mathcal{R}$ es presumiblemente eficiente **sii** $\mathbf{NP} \cup \mathbf{co\text{-}NP} \subseteq \mathbf{PMC}_{\mathcal{R}}$.

Fronteras de la eficiencia en sistemas P que trabajan a modo de células

Recuérdese que:

- ⋆ $\mathcal{NAM}$ denota el modelo de computación de los sistemas P reconocedores con membranas activas y **sin reglas de división**.
- ⋆ $\mathcal{AM}$ denota el modelo de computación de los sistemas P reconocedores con membranas activas y **con reglas de división**.

Entonces se verifica lo siguiente:

- ⋆ $\mathbf{PMC}_{\mathcal{NAM}} = \mathbf{P}$ (establecido en [1]).
- ⋆ El modelo de computación $\mathcal{NAM}$ es **no eficiente**.
- ⋆ $\mathtt{SAT} \in \mathbf{PMC}_{\mathcal{AM}}$ (establecido en [2]) y, por tanto, $\mathbf{NP} \cup \mathbf{co\text{-}NP} \subseteq \mathbf{PMC}_{\mathcal{AM}}$.
- ⋆ El modelo de computación $\mathcal{AM}$ es **presumiblemente eficiente**.

---

[1] A. E. Porreca. Computational complexity classes for membrane systems. *Master Degree Thesis*, Università di Milano-Bicocca, Italy, 2008.

[2] M.J. Pérez-Jiménez, A. Romero, F. Sancho. Complexity classes in models of cellular computing with membranes. *Natural Computing*, **2**, 3 (2003), 265-285.

Fronteras de la eficiencia en sistemas P que trabajan a modo de células

Así pues, "pasar" del modelo de computación $\mathcal{NAM}$ al modelo $\mathcal{AM}$ equivale a "pasar" de la **no eficiencia** a la **presumible eficiencia**. Por tanto:

- ⋆ El ingrediente añadido al modelo $\mathcal{NAM}$ para obtener el modelo $\mathcal{AM}$ (la regla de división) proporciona una **frontera** entre la **no eficiencia** y la **presumible eficiencia**.

En consecuencia, en el marco de los sistemas P reconocedores con membranas activas y bajo el supuesto de que **P** $\neq$ **NP**:

- ⋆ La **regla de división** proporciona una **frontera de la eficiencia** (o de la **tratabilidad** de problemas).
  - Específicamente, permitir o no las reglas de división en el modelo de computación de los sistemas P reconocedores con membranas activas, equivale a "pasar" de la eficiencia a la no eficiencia.

Consideremos el modelo de computación $\mathcal{AM}^0$ de los sistemas P reconocedores con membranas activas y **sin polarizaciones**.

En estos sistemas, las reglas son del siguiente tipo:

- **(a)** $[\, a \to u\,]_i$ — **evolución**
- **(b)** $a\,[\;\,]_i \to [\, b\,]_i$ $(i \neq 1)$ — **comunicación-in**
- **(c)** $[\, a\,]_i \to b\,[\;\,]_i$ — **comunicación-out**
- **(d)** $[\, a\,]_i \to b$ $(i \neq 1$ e $i \neq i_{out})$ — **disolución**
- **(e)** $[\, a\,]_i \to [\, b\,]_i\,[\, c\,]_i$ $(i \neq 1,\ i \neq i_{out}$ e i elemental$)$ — **división elemental**
- **(f)** $[\,[\;]_j\,[\;]_k\,]_i \to [\,[\;]_j\,]_i\,[\,[\;]_k\,]_i$ $(i \neq 1,\ i \neq i_{out}$ e i no elemental$)$ — **división no elemental**

1 es la etiqueta de la mebrana piel, e i_{out} es la etiqueta de la zona de salida.

Las notaciones $\mathcal{AM}^0(\alpha, \beta)$, con $\alpha \in \{-d, +d\}$ y $\beta \in \{-ne, +ne\}$ significan lo siguiente:

- ⋆ $\alpha = -d$: se prohibe el uso de reglas de disolución.
- ⋆ $\alpha = +d$: se permite el uso de reglas de disolución.
- ⋆ $\beta = -ne$: se prohibe el uso de reglas de división para membranas no elementales.
- ⋆ $\beta = +ne$: se permite el uso de reglas de división para membranas elementales y no elementales.

Recuérdese que SAT $\in \mathbf{PMC}_{\mathcal{AM}(-\mathbf{d})}$.

Algunos resultados importantes:

* $\mathbf{PMC}_{\mathcal{AM}^{\mathbf{0}}(-\mathbf{d},+\mathbf{ne})} = \mathbf{P}$ [3] (técnica del **grafo de dependencia**).

* $\mathtt{Subset-Sum} \in \mathbf{PMC}_{\mathcal{AM}^{\mathbf{0}}(+\mathbf{d},+\mathbf{ne})}$[1].

* ¿Se pueden resolver problemas **NP**-completos mediante familias de $\mathcal{AM}^{\mathbf{0}}(+\mathbf{d},-\mathbf{ne})$, en tiempo polinomial?

* Conjetura de Păun (2005): $\mathbf{PMC}_{\mathcal{AM}^{\mathbf{0}}(+\mathbf{d},-\mathbf{ne})} = \mathbf{P}$.

---

[3] M.A. Gutiérrez, M.J. Pérez-Jiménez, A. Riscos, F.J. Romero. On the power of dissolution in P systems with active membranes. **Lecture Notes in Computer Science**, **3850** (2006), 224-240.

Nuevas fronteras entre la no eficiencia y la presumible eficiencia:

* Pasar de $\mathcal{AM}^{\mathbf{0}}(-\mathbf{d})$ a $\mathcal{AM}(-\mathbf{d})$: **la polarización**.
* Pasar de $\mathcal{AM}^{\mathbf{0}}(-\mathbf{d}, +\mathbf{ne})$ a $\mathcal{AM}^{\mathbf{0}}(+\mathbf{d}, +\mathbf{ne})$: **las reglas de disolución**.

Fronteras de la eficiencia en sistemas P que trabajan a modo de tejidos

Para cada $k \geq 1$,

- ⋆ $\mathcal{TC}(\mathbf{k})$: modelo de computación de los sistemas P reconocedores de tejidos con reglas de comunicación que tienen **longitud, a lo sumo,** k.
- ⋆ $\mathcal{TDC}(\mathbf{k})$: modelo de computación de los sistemas P reconocedores de tejidos con reglas de división celular y cuyas reglas de comunicación tienen **longitud, a lo sumo,** k.

Se verifica lo siguiente:

- ⋆ $\mathbf{P} = \mathbf{PMC}_{\mathcal{TC}(\mathbf{k})} = \mathbf{PMC}_{\mathcal{TDC}(\mathbf{1})}$ (resultado establecido en [4])
- ⋆ Los modelos de computación $\mathcal{TC}(k)$ y $\mathcal{TDC}(1)$ son **no eficientes**,
- ⋆ $\mathtt{HAM-CYCLE} \in \mathbf{PMC}_{\mathcal{TDC}(\mathbf{2})}$ (resultado establecido en [5])
- ⋆ El modelo de computación $\mathcal{TDC}(2)$ es **presumiblemente eficiente**.

---

[4] R. Gutiérrez-Escudero, M.J. Pérez-Jiménez, M. Rius-Font. Characterizing tractability by tissue-like P systems. *Lecture Notes in Computer Science*, 5957 (2010), 289-300.

[5] A.E. Porreca, N. Murphy, M.J. Pérez-Jiménez. An optimal frontier of the efficiency of tissue P systems with cell division. In M. García-Quismondo, L.F. Macías-Ramos, Gh. Paun, I. Pérez Hurtado, L. Valencia-Cabrera (eds.) *Proceedings of the Tenth Brainstorming Week on Membrane Computing*, Volume II, Seville, Spain, January 30-February 3, 2012, Report RGNC 01/2012, Fénix Editora, 2012, pp. 141-166.

Fronteras de la eficiencia en sistemas P que trabajan a modo de tejidos

"Pasar" del modelo de computación $\mathcal{TC}(2)$ al modelo $\mathcal{TDC}(2)$ equivale a "pasar" de la **no eficiencia** a la **presumible eficiencia**. Por tanto:

- ⋆ El ingrediente añadido al modelo $\mathcal{TC}(2)$ para obtener $\mathcal{TDC}(2)$ (permitir reglas de división) proporciona una **frontera** entre la **no eficiencia** y la **presumible eficiencia**.

En consecuencia, en el marco de los sistemas P de tejidos con reglas de comunicación de longitud, a lo sumo, 2, y bajo el supuesto de que **P** $\neq$ **NP**:

- ⋆ Las **reglas de división** proporcionan una **frontera de la tratabilidad** de problemas.
  - Específicamente, permitir o no reglas de división en el modelo de computación $\mathcal{TC}(2)$ equivale a "pasar" de la eficiencia a la no eficiencia.

Fronteras de la eficiencia en sistemas P que trabajan a modo de tejidos

"Pasar" del modelo de computación $\mathcal{TDC}(1)$ al modelo $\mathcal{TDC}(2)$ equivale a "pasar" de la **no eficiencia** a la **presumible eficiencia**. Por tanto:

- ⋆ El ingrediente añadido al modelo $\mathcal{TDC}(1)$ para obtener $\mathcal{TDC}(2)$ (permitir reglas de comunicación de longitud 2) proporciona una **frontera** entre la **no eficiencia** y la **presumible eficiencia**.

En consecuencia, en el marco de los sistemas P de tejidos con reglas de división celular y reglas de comunicación, y bajo el supuesto de que $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$:

- ⋆ La **longitud de las reglas de comunicación** proporciona una **frontera de la eficiencia** (o de la **tratabilidad** de problemas).
  - Específicamente, permitir o no reglas de comunicación de longitud 2 en el modelo de computación $\mathcal{TDC}(1)$ equivale a "pasar" de la eficiencia a la no eficiencia.