Formalización en Lógica de Primer Orden

Problema 2.1 Formaliza los siguientes razonamientos de la forma más sencilla y clara posible.

1. Todas las plantas tienen flores. Los helechos no tienen flores. Por tanto, los helechos no son plantas.

   Solución: Usaremos la signatura $\Sigma = \{P^{(1)}, F^{(1)}, H^{(1)}\}$:

   $P(x)$: x es una planta

   $F(x)$: x tiene flores

   $H(x)$: x es un helecho

   Obteniendo la formalización:
   $$\begin{array}{l} \forall x(P(x) \to F(x)) \\ \forall x(H(x) \to \neg F(x)) \\ \hline \forall x(H(x) \to \neg P(x)) \end{array}$$

2. Los ingleses hablan inglés. Los españoles no son ingleses. Algunos españoles hablan inglés. Por tanto, algunos que hablan inglés no son ingleses.

   Solución: Usaremos la signatura $\Sigma = \{I^{(1)}, E^{(1)}, S^{(1)}\}$:

   $I(x)$: x es inglés

   $E(x)$: x habla inglés

   $S(x)$: x es español

   Obteniendo la formalización:
   $$\begin{array}{l} \forall x(I(x) \to E(x)) \\ \forall x(S(x) \to \neg I(x)) \\ \exists x(S(x) \wedge E(x)) \\ \hline \exists x(E(x) \wedge \neg I(x)) \end{array}$$

3. Las aves que vuelan son ligeras y tienen alas grandes. El Pato Donald es un ave. Las alas del Pato Donald son pequeñas. Algunas aves son pesadas y tienen las alas grandes. Por tanto, algunas aves no vuelan.

   Solución: Usaremos la signatura $\Sigma = \{A^{(1)}, V^{(1)}, L^{(1)}, G^{(1)}, a\}$:

   $A(x)$: x es un ave $V(x)$: x vuela

   $L(x)$: x es ligera $G(x)$: x tiene alas grandes

   a : Pato Donald

   Obteniendo la formalización:
   $$\begin{array}{l} \forall x(A(x) \wedge V(x) \to L(x) \wedge G(x)) \\ A(a) \\ \neg G(a) \\ \exists x(A(x) \wedge \neg L(x) \wedge G(x)) \\ \hline \exists x(A(x) \wedge \neg V(x)) \end{array}$$

4. Pedro es miope. Cuando alguien es miope, o su padre o su madre resulta serlo también. Todo el mundo ama a su padre y su madre. Por tanto, algún miope es amado por alguien.

5. Algunos hipopótamos son amigos de los pájaros. Cualquier hipopótamo explota a algún pájaro. Cualquiera que explota a un amigo es un impresentable. Por tanto, algunos impresentables son hipopótamos.

   Solución: Usaremos la signatura $\Sigma = \{H^{(1)}, P^{(1)}, I^{(1)}, E^{(2)}, F^{(2)}\}$:

   $H(x)$: x es un hipopótamo $E(x,y)$: x explota a y

   $P(x)$: x es un pájaro $F(x,y)$: x es amigo de y

   $I(x)$: x es impresentable

   Y la formalización es:
   $$\begin{array}{l} \exists x(H(x) \wedge \forall y(P(x) \to F(x,y))) \\ \forall x(H(x) \to \exists y(P(y) \wedge E(x,y))) \\ \forall x(\exists y(F(x,y) \wedge E(x,y)) \to I(x)) \\ \hline \exists x(I(x) \wedge H(x)) \end{array}$$

6. Todos los perros persiguen algún gato. Hay gatos que persiguen algún perro. Un gato bien educado jamás persigue perros. A los perseguidores de gatos no les gustan los gatos mal educados. Por tanto, algunos gatos no gustan a ningún perro.

   Solución: Usaremos la signatura $\Sigma = \{G^{(1)}, D^{(1)}, E^{(1)}, P^{(2)}, L^{(2)}\}$:

   $G(x)$: x es un gato $P(x,y)$: x persigue a y

   $D(x)$: x es un perro $L(x,y)$: a x le gusta y

   $E(x)$: x es bien educado

   Y la formalización es:
   $$\begin{array}{l} \forall x(D(x) \to \exists y(G(y) \wedge P(x,y))) \\ \exists x \exists y(G(x) \wedge D(y) \wedge P(x,y)) \\ \forall x(G(x) \wedge E(x) \to \forall y(D(y) \to \neg P(x,y))) \\ \forall x(\exists y(P(x,y) \wedge G(y)) \to \forall z(G(z) \wedge \neg E(z) \to \neg L(x,z))) \\ \hline \exists x(G(x) \wedge \forall y(D(y) \to \neg L(x,y))) \end{array}$$

Problema 2.2 Formaliza las siguiente sentencias:

1. Todo número racional es un número real.
2. Algunos números reales son racionales.
3. No todo número real es un número racional.
4. Entre dos números reales siempre hay un racional.

Solución: Usaremos los predicados (es decir, la signatura $\Sigma = \{R^{(1)}, Q^{(1)}, M^{(2)}\}$):

$R(x)$: x es un número real

$Q(x)$: x es un número racional

$M(x,y)$: x es estrictamente menor que y

1. $\forall x(Q(x) \to R(x))$
2. $\exists x(R(x) \wedge Q(x))$
3. $\neg\forall x(R(x) \to Q(x))$
4. $\forall x\forall y(R(x) \wedge R(y) \wedge M(x,y) \to \exists z(Q(z) \wedge M(x,z) \wedge M(z,y)))$

Problema 2.3 Formaliza la siguiente argumentación (obra de Lewis Carroll):

P1	Todos los colibríes tienen vivos colores
P2	Ningún pájaro de gran tamaño se alimenta de miel
P3	Los pájaros que no se alimentan de miel tienen colores apagados
Q	Ningún colibrí es grande

Solución: Utilizaremos el lenguaje formado por los siguientes símbolos de predicado:

$C(x)$: x es un colibrí	$V(x)$: x tiene vivos colores
$G(x)$: x es de gran tamaño	$M(x)$: x se alimenta de miel

Y la formalización es:

$$\begin{array}{ll} \text{P1} & \forall x(C(x) \to V(x)) \\ \text{P2} & \neg\exists x(G(x) \wedge M(x)) \\ \text{P3} & \forall x(\neg M(x) \to \neg V(x)) \\ \hline \text{Q} & \neg\exists x(C(x) \wedge G(x)) \end{array}$$

Problema 2.4 Formaliza la siguiente argumentación (obra de Lewis Carroll):

P1	Todos los animales que no cocean son tranquilos
P2	Los asnos no tienen cuernos
P3	Cualquier búfalo puede lanzarlo a uno contra una puerta
P4	Ningún animal que cocea es fácil de engullir
P5	Ningún animal sin cuernos puede lanzarlo a uno contra una puerta
P6	Todos los animales son nerviosos excepto los búfalos
Q	Los asnos no son fáciles de engullir

Solución: Utilizaremos el lenguaje formado por los siguientes símbolos de predicado:

$C(x)$: x cocea	$T(x)$: x es tranquilo
$A(x)$: x es un asno	$M(x)$: x tiene cuernos
$B(x)$: x es un búfalo	$L(x)$: x puede lanzarlo a uno contra una puerta
$E(x)$: x es fácil de engullir	

Y la formalización es:

$$\begin{array}{ll} \text{P1} & \forall x(\neg C(x) \to T(x)) \\ \text{P2} & \forall x(A(x) \to \neg M(x)) \\ \text{P3} & \forall x(B(x) \to L(x)) \\ \text{P4} & \neg \exists x(C(x) \wedge E(x)) \\ \text{P5} & \neg \exists x(\neg M(x) \wedge L(x)) \\ \text{P6} & \forall x(\neg B(x) \to \neg T(x)) \\ \hline \text{Q} & \forall x(A(x) \to \neg E(x)) \end{array}$$

Problema 2.5 Formaliza la siguiente argumentación:

P1	Laura quiere a Javier
P2	Laura se dedica a la Informática
P3	Ningún médico se dedica a la Informática
P4	Sólo los médicos quieren a los enfermos
Q	Javier no está enfermo

Solución: Usaremos la signatura $\Sigma = \{I^{(1)}, M^{(1)}, E^{(1)}, Q^{(2)}, a, b\}$:

$I(x)$: x se dedica a la Informática	$Q(x,y)$: x quiere a y
$M(x)$: x es médico	a : Laura
$E(x)$: x está enfermo	b : Javier

Y la formalización es:

$$\begin{array}{ll} \text{P1} & Q(a,b) \\ \text{P2} & I(a) \\ \text{P3} & \neg \exists x(M(x) \wedge I(x)) \\ \text{P4} & \forall x \forall y(E(x) \wedge Q(y,x) \to M(y)) \\ \hline \text{Q} & \neg E(b) \end{array}$$

Problema 2.6 Usando la signatura que consideres adecuada formaliza:

1. Los 3 axiomas que definen una relación de equivalencia.
2. Los 3 axiomas que definen una relación de orden.

Solución: R es de equivalencia $\Leftrightarrow$ es reflexiva, simétrica y transitiva y R es de orden $\Leftrightarrow$ es reflexiva, antisimétrica y transitiva. Usaremos la signatura $\Sigma = \{R^{(2)}, =^{(2)}\}$ y las fórmulas que expresan estas 4 propiedades son las siguientes:

$$\begin{array}{rl} \text{Reflexiva} & \forall x R(x,x) \\ \text{Simétrica} & \forall x \forall y(R(x,y) \to R(y,x)) \\ \text{Transitiva} & \forall x \forall y \forall z(R(x,y) \wedge R(y,z) \to R(x,z)) \\ \text{Antisimétrica} & \forall x \forall y(R(x,y) \wedge R(y,x) \to x = y) \end{array}$$

Problema 2.18 Formaliza las siguientes sentencias:

1. Toda recta pasa al menos por dos puntos distintos.
2. Por dos puntos distintos siempre pasa una recta.
3. Por dos puntos distintos pasa una sóla recta.

Solución: Usaremos el predicado de igualdad y los predicados:

$P(x)$: x es un punto

$L(x)$: x es una recta

$R(x, y, z)$: la recta z pasa por los puntos x e y

1. $\forall x(L(x) \to \exists y \exists z(P(y) \wedge P(z) \wedge \neg y = z \wedge R(y, z, x)))$
2. $\forall x \forall y(P(x) \wedge P(y) \wedge \neg x = y \to \exists z(L(z) \wedge R(x, y, z)))$
3. $\forall x \forall y(P(x) \wedge P(y) \wedge \neg x = y \to \exists z(L(z) \wedge R(x, y, z) \wedge \forall u(L(u) \wedge R(x, y, u) \to u = z)))$

Problema (sin número) Formaliza la siguiente argumentación:

En el siglo XIX un demócrata podía ser tanto liberal como socialista. Los liberales aceptaban la revolución industrial y defendían la institución de la propiedad privada de los medios de producción, el establecimiento de una economía de mercado autorregulada y la conversión del trabajo en mercancía. Los socialistas aceptaban también la revolución industrial, pero rechazaban esos tres puntos de la ideología liberal. Los conservadores, por su parte, rechazaban la revolución industrial. De ello se desprende que ni los liberales ni los socialistas eran conservadores, que ningún liberal era socialista y que ningún conservador era demócrata.

Solución: Utilizaremos el lenguaje formado por los siguientes símbolos de predicado:

$D(x)$: x es demócrata

$C(x)$: x es conservador

$L(x)$: x es liberal

$S(x)$: x es socialista

$R(x)$: x acepta la revolución industrial

$T(x)$: x defiende los tres puntos de la ideología liberal

Consideramos que los tres puntos de la ideología liberal se refieren a la institución de la propiedad privada de los medios de producción, el establecimiento de una economía de mercado autorregulada y la conversión del trabajo en mercancía. La formalización es:

$$
\begin{array}{l}
\forall x(D(x) \to L(x) \vee S(x)) \\
\forall x(L(x) \to R(x) \wedge T(x)) \\
\forall x(S(x) \to R(x) \wedge T(x)) \\
\forall x(C(x) \to \neg R(x)) \\
\hline
\forall x(L(x) \vee S(x) \to \neg C(x)) \wedge \forall x(L(x) \to \neg S(x)) \wedge \forall x(C(x) \to \neg D(x))
\end{array}
$$