Lógica Informática (Tecnologías Informáticas). Curso 2019–2020

Relación 1: Sintaxis y Semántica.

Ejercicio 1.– Determina todas las subfórmulas de:

$$((\neg p \lor q) \land (q \to r)), \text{ y } (\neg(\neg(\neg p \lor p) \lor p) \lor q)$$

Ejercicio 2.– Simplificación de paréntesis:

1. Elimina todos los paréntesis posibles de las siguientes fórmulas:

$$\begin{array}{ccc} (((p \to q) \lor r) \to (p \land \neg p)) & (\neg(p \land q) \to (q \land r)) & ((p \to (q \land r)) \to (\neg\neg p \land q)) \\ \neg((p \land p) \land (p \land p)) & (((p \lor q) \lor (r \lor s)) \to \neg p) & (p \to ((q \leftrightarrow s) \to p)) \end{array}$$

2. Escribe con paréntesis las siguientes fórmulas:

$$p \to q \leftrightarrow r \lor s, \quad q \to \neg p \lor r \lor s, \quad p \lor q \leftrightarrow \neg r \lor s, \quad q \land \neg q \lor p \to r$$

Ejercicio 3.– Para cada una de las siguientes fórmulas, determina todos sus *modelos* e indica si son satisfactibles, insatisfactibles o tautologías.

$$\begin{array}{ll} p \to (q \to r \land q) & q \to (p \land \neg p) \to r \\ (p \leftrightarrow q) \land (p \to \neg q) \land p & (p \land r) \lor (\neg p \land q) \to \neg q \end{array}$$

Ejercicio 4.– Decide **razonadamente** si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos:

1. Si F y G son fórmulas consistentes, entonces $\{F, G\}$ es consistente.
2. Si F es una tautología y G es consistente, entonces $\{F, G\}$ es consistente.
3. Si G es una contradicción, entonces $F \to G \to F$ es una tautología.
4. Si F es satisfactible, todas sus subfórmulas también lo son.
5. F es satisfactible si, y sólo si, todas sus consecuencias lógicas también lo son.
6. Si $\{F, G, H\}$ es inconsistente, entonces $F \models \neg G \lor \neg H$.
7. $\{F, G\}$ es consistente si y sólo si $\{\neg F, \neg G\}$ es inconsistente.
8. Si U es un conjunto de fórmulas tal que $U \not\models F$, entonces $U \models \neg F$.
9. Si U es un conjunto de fórmulas tal que $U \models F$, entonces $U \not\models \neg F$.

Ejercicio 5.– En cada caso, propón ejemplos de fórmulas F y G tales que:

1. $\neg F \to G$ es una contradicción.
2. F y $F \to G$ son satisfactibles, pero G es una contradicción.
3. $F \not\models G$ y $F \not\models \neg G$.
4. $F \models G$ y $F \models \neg G$.

Ejercicio 6.– Expresa mediante fórmulas proposicionales las siguientes afimaciones. En cada caso, indica el significado que se asigna a las variables proposicionales (p, q, etc.) utilizadas.

1. Si el sol brilla hoy, entonces no brillará mañana.
2. O Roberto tiene celos de Chari o no está de buen humor hoy.
3. Cuando la presión atmosférica baja, entonces llueve o nieva.
4. Si has leído los apuntes y has hecho los ejercicios, estás preparado para el examen. En caso contrario, tienes un problema.
5. Si Pablo se encontró con Chari ayer, entonces tomaron café juntos o pasearon por el parque.
6. Juan duerme muchas horas y muy profundamente.
7. Mi hermana tiene un gato blanco y negro.

Ejercicio 7.– Decide cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas:

$$\begin{array}{ll} \{p \lor q\} \models p \to r & \{p \to q, q \to p \land r\} \models p \to (p \to q) \to r \\ \{p \land \neg p\} \models r \to r \lor q & \{p \land q \land r\} \models r \to \neg p \end{array}$$

Ejercicio 8.– Determina si los siguientes argumentos son lógicamente correctos:

1. Si Juan es comunista, entonces Juan es ateo. Juan es ateo. Por tanto, Juan es comunista.
2. Cuando tanto la temperatura como la presión atmosférica permanecen contantes, no llueve. La temperatura permanece constante. En consecuencia, en caso de que llueva, la presión atmosférica no permanece constante.
3. Siempre que un número x es divisible por 10, acaba en 0. El número x no acaba en 0. Luego, x no es divisible por 10.
4. Para que un número x sea divisible por 5, es necesario que el número acabe en 0. El número x no acaba en 0. Luego, x no es divisible por 5.

5. El número y es negativo si x es positivo. Cuando z es negativo, y también lo es. Por tanto, y es negativo siempre que o bien x sea positivo o bien z sea negativo.

Ejercicio 9.– Un rey somete a un prisionero a la siguiente prueba: lo enfrenta a tres puertas, de las que el prisionero debe elegir una, y entrar en la habitación correspondiente. Se informa al prisionero que en dos de las habitaciones hay sendos tigres, y en la otra una dama. Como es natural, el prisionero debe elegir la puerta que le lleva a la dama (entre otras cosas, para no ser devorado por el tigre). Para ayudarle, en cada puerta hay un letrero:

- **Puerta 1**: en esta habitación hay un tigre
- **Puerta 2**: en esta habitación está la dama
- **Puerta 3**: en esta habitación está la dama

El prisionero se da cuenta inmediatamente de que los tres letreros no pueden ser verdaderos, y el rey le informa que al menos uno es falso. Tras pensar unos minutos, el prisionero dice que, con todo, es imposible deducir lógicamente el resultado, pues la dama podría estar en cualquier habitación. Tras comprobar el rey que esto es cierto, le informa que al menos dos letreros son falsos. El prisionero pudo así deducir la puerta correcta.

Establece una tabla para los valores de verdad de los tres letreros y, en base a ella, justifica la historieta anterior, e indica razonadamente la puerta que eligió el prisionero.

Ejercicio 10.– En una isla habitan dos tribus de nativos, A y B. Todos los miembros de la tribu A siempre dicen la verdad, mientras que todos los de la tribu B siempre mienten. Llegamos a esta isla y le preguntamos a un nativo si allí hay oro, a lo que nos responde:

“Hay oro en la isla si y sólo si yo siempre digo la verdad”

¿Hay oro en la isla? ¿Podemos determinar a qué tribu pertenece el nativo que nos respondió?

Ejercicio 11.– Tres niños, Manolito, Juanito y Jesuli, son sorprendidos después de haberse roto el cristal de una ventana cerca de donde estaban jugando. Al preguntarles si alguno de ellos lo había roto, respondieron lo siguiente:

- Manolito: “Juanito lo hizo, Jesuli es inocente”.
- Juanito: “Si Manolito lo rompió, entonces Jesuli es inocente”.
- Jesuli: “Yo no lo hice, pero uno de los otros dos sí lo rompió”.

¿Son consistentes las afirmaciones anteriores? Si se comprueba que ninguno de los niños rompió el cristal, ¿quiénes han mentido? Si se asume que todos dicen la verdad, ¿quién rompió el cristal?

Ejercicio 12.– Determina las variables libres y ligadas de las siguientes fórmulas:

1. $\forall x \exists y [p(x,y) \to p(x,z) \vee \exists z (p(y,z) \wedge p(x,y))]$
2. $\exists x \exists z [p(x,y) \to p(x,z) \wedge \exists x (p(y,z) \wedge p(x,y))]$
3. $\forall x \exists z [p(x,y) \to p(x,z) \to \exists y (p(y,z) \wedge p(x,y))]$

Ejercicio 13.– Determina, en cada caso, si la variable que se indica es sustituible por el término propuesto en la siguiente fórmula del lenguaje de la Aritmética $LA = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, +, \cdot, <\}$:

$$\forall w\,(x = (y+z) \cdot w) \wedge (\exists x\,(x = z + \mathbf{0}) \vee \exists y\,(w + x = y \cdot z))$$

1. w por $x+z$	3. w por $z+\mathbf{1}$	5. x por $x+y$	7. y por $x+y$
2. y por $z+(w+\mathbf{1})$	4. y por $z+\mathbf{1}$	6. w por $z+w$	8. x por $z+(w+\mathbf{1})$

Ejercicio 14.– Consideremos el lenguaje de primer orden con igualdad:

$$LF = \{\mathbf{pepe}, \mathbf{pepa}, \mathbf{pepi}, pd, md, pm, PRG, HRO, HRA, M, H, CAS\}$$

donde, pd^1, md^1 y pm^2 son símbolos de función, y M^1, H^1, HRO^2, HRA^2, PRG^2 y CAS^2 son símbolos de predicado (los superíndices expresan la aridad).

Supóngase que: $pd(x)$ es el padre de x, $md(x)$ es la madre de x, $pm(x,y)$ es la persona de mayor edad entre x e y (o x si tienen la misma edad). $H(x)$: "x es un hombre"; $M(x)$: "x es una mujer"; $PRG(x,y)$: "x es un progenitor de y"; $HRO(x,y)$: "x es hermano de y"; $HRA(x,y)$: "x es hermana de y"; $CAS(x,y)$: "x está casado/a con y".

1. Escribe fórmulas de LF que expresen las siguientes afirmaciones:
   a) Pepi es hija de Pepe y Pepa.
   b) Un abuelo siempre es de mayor edad que cualquiera de sus nietos.
   c) Pepe tiene exactamente 2 hijos.
   d) Pepe tiene al menos un cuñado.
   e) La suegra de Pepa es la madre de Pepe.
   f) Pepi tiene una prima y un primo.
   g) Todo hijo de Pepi es nieto de Pepe.
   h) Pepa es la abuela materna de toda hija de Pepi.
2. Expresa en lenguaje natural el sentido de las siguientes fórmulas de LF.
   a) $\exists x\,(x \neq \mathbf{pepe} \wedge CAS(x, \mathbf{pepa}) \wedge \neg PROG(\mathbf{pepi}, x))$
   b) $\exists x \exists y\,(HRO(x,y) \wedge CAS(\mathbf{pepe}, y) \wedge \forall z (PRG(x,z) \to M(z)))$
   c) $\forall x\,(HRA(\mathbf{pepa}, md(x)) \vee HRA(\mathbf{pepa}, pd(x)) \to \forall y \neg CAS(x,y))$

d) $pd(\mathbf{pepi}) = \mathbf{pepe} \wedge \exists x(CAS(x, \mathbf{pepi}) \wedge \neg \exists y\,(HRO(y, x) \vee HRA(y, x)))$

e) $\exists x_1 \exists x_2\,[pd(md(x_1)) = \mathbf{pepe} \wedge pd(md(x_2)) = \mathbf{pepe} \wedge \forall x\,(pd(md(x)) = \mathbf{pepe} \to x = x_1 \vee x = x_2)]$

Ejercicio 15.– Sea L un lenguaje de primer orden con dos símbolos de predicado, P (de aridad 1) y Q (de aridad 2) y un símbolo de función, f, de aridad 1. Sea M la L–estructura con universo $|M| = \{a, b, c, d\}$ e interpretaciones:

$$P^M = \{a, b\},\ Q^M = \{(a, b),\ (b, b),\ (c, b)\},\ f^M(a) = b,\ f^M(b) = b,\ f^M(c) = a \text{ y } f^M(d) = c$$

Decide cuáles de las siguientes fórmulas de L se satisfacen en M:

$$U = \{\forall x\,(P(x) \to \exists y Q(y, x)),\ \forall x\,Q(f(x), x),\ \forall x\,(Q(f(x), x) \to Q(x, x)),$$
$$\forall x \forall y\,(Q(x, y) \to P(x)),\ \forall x \exists y\,(Q(x, y) \vee Q(y, x))\}$$

Ejercicio 16.– Consideremos el lenguaje $L = \{A,\ F,\ P,\ c\}$, siendo A y F predicados de aridad 1, P un predicado binario y c una constante. Sea U el siguiente conjunto de fórmulas:

$$U = \{A(c) \to \exists y\,(A(y) \wedge P(y, c))),\ \forall x\,(F(x) \to \neg \exists y\,(A(y) \wedge P(x, y))),\ F(c)\}$$

Sea $\mathcal{M}$ la L–estructura con universo $M = \{0, 1, 2, 3\}$ e interpretaciones:

$$c^{\mathcal{M}} = 0, \quad A^{\mathcal{M}} = \{0, 1, 2\}, \quad F^{\mathcal{M}} = \{0, 1, 3\}, \quad y \quad P^{\mathcal{M}} = \{(0, 3),\ (1, 0),\ (1, 2),\ (2, 3)\}.$$

1. Decide razonadamente qué fórmulas de U son válidas en $\mathcal{M}$ y cuáles no lo son.
2. Modifica razonadamente la interpretación $F^{\mathcal{M}}$ para que $\mathcal{M} \models U$.

Ejercicio 17.– ¿Cuáles de los siguientes conjuntos de fórmulas son consistentes? (en cada caso, suponemos que P, Q y R son predicados de la aridad correcta).

1. $\{\exists x\,Q(x),\ \forall x\,(Q(x) \to R(x)),\ \forall x \neg R(x)\}$
2. $\{\exists y \forall x\,P(x, y),\ \forall x \neg P(x, x)\}$
3. $\{\forall x \forall y\,(P(x, y) \to P(y, x)),\ \forall x \neg P(x, x),\ \exists x \exists y\,P(x, y)\}$
4. $\{\forall x \exists y\,P(x, y),\ \forall x \neg P(x, x)\}$
5. $\{\exists x\,Q(x),\ \forall x \neg Q(x)\}$

Ejercicio 18.– Decide si son correctas o no las siguientes deducciones:

1. $\{\forall x\,(P(x) \vee Q(x))\} \models \forall x\,P(x) \vee \forall x\,Q(x)$
2. $\{\forall x\,(P(x) \to Q(x))\} \models \forall x\,P(x) \to \forall x\,Q(x)$

3. $\{\forall x\, P(x) \to \forall x\, Q(x)\} \models \forall x\, (P(x) \to Q(x))$

4. $\{\neg\forall x\, (P(x) \wedge Q(x))\} \models \exists x \neg P(x) \wedge \exists x \neg Q(x)$

5. $\{\exists x\, P(x) \wedge \exists x\, Q(x)\} \models \exists x\, (P(x) \wedge Q(x))$

6. $\{\forall x\, (P(x) \vee Q(f(x)))\} \models \forall x\, (P(x) \vee Q(x))$

Ejercicio 19.– Sea el lenguaje de primer orden $L = \{C, T, E, IZQ, DER, \mathbf{a}, \mathbf{b}\}$, donde C, T, E son símbolos de predicado de aridad 1, IZQ, DER son símbolos de predicado de aridad 2, y $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ son símbolos de constante.

En este ejercicio, una *cinta* es una estructura para el lenguaje L cuyo universo puede ser descrito por una lista (posiblemente infinita) de figuras (cuadrados, triángulos y estrellas) y la interpretación de los símbolos de predicado es la natural si suponemos que $C(x)$ expresa "x es un cuadrado", $T(x)$ expresa "x es un triángulo", $E(x)$ expresa "x es una estrella", $IZQ(x, y)$ expresa "x está a la izquierda de y" y $DER(x, y)$ expresa "x está a la derecha de y".

Consideramos las tres *cintas* siguientes:

M1	□	□	★	△	□
	a			**b**	

M2	△	★	△	□	△	△
				b	**a**	

M3	□	□	□	□
		a **b**		

1. Estudia la validez de las siguientes fórmulas en cada una de las *cintas* anteriores:

   $\psi_1 : \forall x\ [E(x) \to \exists y\ (C(y) \wedge IZQ(x, y))]$
   $\psi_2 : \exists x\ [\neg T(x) \wedge IZQ(x, \mathbf{a}) \wedge DER(\mathbf{b}, x)]$
   $\psi_3 : \exists x\ [C(x) \wedge (\exists y\ (T(y) \wedge DER(y, x)) \leftrightarrow \forall y\ (T(y) \to DER(y, x)))]$
   $\psi_4 : \forall x \exists y\ IZQ(x, y)$

2. Para cada una de las siguientes fórmulas, describe una *cinta* en la que sea válida:

   $\varphi_1 :\quad C(\mathbf{a}) \vee [\neg E(\mathbf{b}) \wedge (T(\mathbf{b}) \to \exists x\, C(x))]$
   $\varphi_2 :\quad \forall x\ [C(x) \to \exists y\ (T(y) \wedge IZQ(y, x))]$
   $\varphi_3 :\quad \forall x\ [T(x) \leftrightarrow (\exists y\ (E(y) \wedge IZQ(y, x))]$
   $\varphi_4 :\quad \exists x\ [E(x) \wedge \forall y\ (C(y) \to \neg DER(y, x))]$

3. Describe, si es posible, una *cinta* en la que sean válidas todas las fórmulas del apartado anterior. ¿Es consistente el conjunto $U = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$?