

# Tema 1: Sintaxis y Semántica de las Lógicas Proposicional y de Primer Orden

Dpto. Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial  
UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Lógica Informática  
(Tecnologías Informáticas)  
Curso 2019–20

Introducción

Lógica  
Proposicional

Sintaxis

Fórmulas

Inducción sobre  
fórmulas

Semántica

Funciones de verdad

Valoraciones

Consecuencia lógica  
y satisfactibilidad

Problemas de decisión

Limitaciones

Lógica de Primer  
Orden

Sintaxis

Términos y fórmulas

Sustituciones

Semántica

Estructuras

Interpretación de  
términos y fórmulas

Consecuencia lógica  
y validez

# Contenido

## Introducción

## Lógica Proposicional

### Sintaxis

Fórmulas

Inducción sobre fórmulas

### Semántica

Funciones de verdad

Valoraciones

Consecuencia lógica y satisfactibilidad

### Problemas de decisión

### Limitaciones

## Lógica de Primer Orden

### Sintaxis

Términos y fórmulas

Sustituciones

### Semántica

Estructuras

Interpretación de términos y fórmulas

Consecuencia lógica y validez

## Introducción

### Lógica Proposicional

#### Sintaxis

Fórmulas

Inducción sobre  
fórmulas

#### Semántica

Funciones de verdad  
Valoraciones

Consecuencia lógica  
y satisfactibilidad

Problemas de decisión  
Limitaciones

### Lógica de Primer Orden

#### Sintaxis

Términos y fórmulas

Sustituciones

#### Semántica

Estructuras

Interpretación de  
términos y fórmulas

Consecuencia lógica  
y validez

Dados un conjunto de **afirmaciones** (hechos, hipótesis,...),  $BC$ , y una afirmación,  $A$ , decidir si  $A$  ha de ser necesariamente cierta, suponiendo que todos las afirmaciones de  $BC$  lo son.

La **Lógica** proporciona formulaciones precisas de este problema y diferentes soluciones.

Para abordar este problema formalmente hemos de:

1. Dar un lenguaje para expresar las afirmaciones (*representación*).
2. Concretar qué entendemos por *afirmación cierta*.
3. Proporcionar mecanismos efectivos para garantizar la *corrección de las deducciones*.

A lo largo de este curso estudiaremos estas cuestiones en los dos casos más comunes: la **Lógica Proposicional**, y la **Lógica de Primer Orden**.

Introducción

Lógica  
Proposicional

Sintaxis

Fórmulas

Inducción sobre  
fórmulas

Semántica

Funciones de verdad  
Valoraciones

Consecuencia lógica  
y satisfactibilidad

Problemas de decisión  
Limitaciones

Lógica de Primer  
Orden

Sintaxis

Términos y fórmulas  
Sustituciones

Semántica

Estructuras

Interpretación de  
términos y fórmulas

Consecuencia lógica  
y validez

## Características generales de la Lógica Proposicional:

- ▶ Sus expresiones (fórmulas) representan *afirmaciones* que pueden considerarse *verdaderas* o *falsas*.
- ▶ Se construyen a partir de expresiones básicas usando operadores (*conectivas*).
- ▶ Las conectivas se corresponden con formas sencillas de construir afirmaciones complejas en el lenguaje natural partiendo de otras más sencillas:
  - ▶ Conjunción: "... tal ... **y** ... cual ..."
  - ▶ Disyunción: "... tal ... **o** ... cual ..."
  - ▶ Implicación "**Si** ... tal ... **entonces** ... cual ..."
  - ▶ Negación: "**No** es cierto que tal ..."
- ▶ Sólo permite analizar las formas de razonamiento ligadas a este tipo de construcciones.

Introducción

Lógica  
Proposicional

Sintaxis

Fórmulas

Inducción sobre  
fórmulas

Semántica

Funciones de verdad

Valoraciones

Consecuencia lógica  
y satisfactibilidad

Problemas de decisión

Limitaciones

Lógica de Primer  
Orden

Sintaxis

Términos y fórmulas

Sustituciones

Semántica

Estructuras

Interpretación de  
términos y fórmulas

Consecuencia lógica  
y validez

# El Lenguaje de la Lógica Proposicional

Formalmente, el *lenguaje de la Lógica Proposicional* consta de:

1. Un conjunto numerable de **variables proposicionales**:

$$VP = \{p, p_0, p_1, \dots, q, q_0, q_1, \dots, r, r_0, \dots\}$$

2. Operadores básicos de construcción, **Conectivas lógicas**:

- ▶ De aridad 1:  $\neg$  (negación).
- ▶ De aridad 2:  $\vee$  (disyunción),  $\wedge$  (conjunción),  $\rightarrow$  (condicional) y  $\leftrightarrow$  (bicondicional).

3. **Símbolos auxiliares**: “(” y “)”.

Introducción

Lógica  
Proposicional

Sintaxis

Fórmulas

Inducción sobre  
fórmulas

Semántica

Funciones de verdad  
Valoraciones

Consecuencia lógica  
y satisfactibilidad

Problemas de decisión  
Limitaciones

Lógica de Primer  
Orden

Sintaxis

Términos y fórmulas  
Sustituciones

Semántica

Estructuras

Interpretación de  
términos y fórmulas

Consecuencia lógica  
y validez

El conjunto de las *fórmulas proposicionales*, **PROP**, es el menor conjunto de expresiones que verifica:

- ▶  $VP \subseteq \mathbf{PROP}$ ,
- ▶ Es cerrado bajo las conectivas, es decir:
  - ▶ Si  $F \in \mathbf{PROP}$ , entonces  $\neg F \in \mathbf{PROP}$ .
  - ▶ Si  $F, G \in \mathbf{PROP}$ , entonces  $(F \vee G)$ ,  $(F \wedge G)$ ,  $(F \rightarrow G)$ ,  $(F \leftrightarrow G) \in \mathbf{PROP}$ .

La sintaxis del lenguaje pretende evitar la ambigüedad en la interpretación de las fórmulas. Esa es la función de los símbolos auxiliares.

Introducción

Lógica  
Proposicional

Sintaxis

**Fórmulas**

Inducción sobre  
fórmulas

Semántica

Funciones de verdad

Valoraciones

Consecuencia lógica  
y satisfactibilidad

Problemas de decisión

Limitaciones

Lógica de Primer  
Orden

Sintaxis

Términos y fórmulas

Sustituciones

Semántica

Estructuras

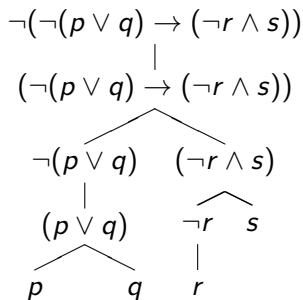
Interpretación de  
términos y fórmulas

Consecuencia lógica  
y validez

# Árboles de formación

- ▶ Asociamos a cada fórmula un *árbol de formación* (esencialmente único) que describe el modo en que se construye la fórmula a partir de otras más sencillas.

- ▶ **Ejemplo:**



- ▶ Las fórmulas que aparecen en el árbol de formación de una fórmula  $F$  se denominan **subfórmulas** de  $F$ .

# Reducción de paréntesis

Para facilitar la lectura de las fórmulas adoptaremos los siguientes convenios de notación:

1. Omitiremos los paréntesis externos.
2. Daremos a las conectivas una precedencia de asociación. De mayor a menor, están ordenadas por:  $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ .
  - ▶ **Ejemplo:**  $F \wedge G \rightarrow \neg F \vee G$  es  $((F \wedge G) \rightarrow (\neg F \vee G))$ .
3. Siempre se dejarán los paréntesis para la conectiva  $\leftrightarrow$ .
4. Cuando una conectiva se usa repetidamente, se asocia por la derecha:  $F \vee G \vee H$  es  $(F \vee (G \vee H))$ .

Introducción

Lógica  
Proposicional

Sintaxis

Fórmulas

Inducción sobre  
fórmulas

Semántica

Funciones de verdad

Valoraciones

Consecuencia lógica  
y satisfactibilidad

Problemas de decisión

Limitaciones

Lógica de Primer  
Orden

Sintaxis

Términos y fórmulas

Sustituciones

Semántica

Estructuras

Interpretación de  
términos y fórmulas

Consecuencia lógica  
y validez



# Principio de Inducción sobre fórmulas

Gracias a la definición de **PROP** si deseamos probar que toda fórmula proposicional satisface cierta propiedad  $\Psi$ , podemos probarlo por **inducción sobre fórmulas**.

Para ello probamos:

1. **Caso base:** Todos los elementos de  $VP$  tienen la propiedad  $\Psi$ .
2. **Paso de inducción:**
  - 2.1 Si  $F \in \mathbf{PROP}$  tiene la propiedad  $\Psi$ , entonces  $\neg F$  tiene la propiedad  $\Psi$ .
  - 2.2 Si  $F, G \in \mathbf{PROP}$  tienen la propiedad  $\Psi$ , entonces las fórmulas  $(F \vee G)$ ,  $(F \wedge G)$ ,  $(F \rightarrow G)$  y  $(F \leftrightarrow G)$  también tienen la propiedad  $\Psi$ .

Introducción

Lógica  
Proposicional

Sintaxis

Fórmulas

Inducción sobre  
fórmulas

Semántica

Funciones de verdad

Valoraciones

Consecuencia lógica  
y satisfactibilidad

Problemas de decisión

Limitaciones

Lógica de Primer  
Orden

Sintaxis

Términos y fórmulas

Sustituciones

Semántica

Estructuras

Interpretación de  
términos y fórmulas

Consecuencia lógica  
y validez

- ▶ Los elementos del conjunto  $\{0, 1\}$  se llaman **valores de verdad**. Se dice que 0 es el valor **falso** y el 1 es el valor **verdadero**.
- ▶ El significado de una conectiva se determina mediante su **función de verdad**:
  - ▶  $H_{\neg}(i) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = 0; \\ 0, & \text{si } i = 1. \end{cases}$
  - ▶  $H_{\vee}(i, j) = \begin{cases} 0, & \text{si } i = j = 0; \\ 1, & \text{en otro caso.} \end{cases}$
  - ▶  $H_{\wedge}(i, j) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j = 1; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$
  - ▶  $H_{\rightarrow}(i, j) = \begin{cases} 0, & \text{si } i = 1, j = 0; \\ 1, & \text{en otro caso.} \end{cases}$
  - ▶  $H_{\leftrightarrow}(i, j) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$

Introducción

Lógica  
Proposicional

Sintaxis

Fórmulas

Inducción sobre  
fórmulas

Semántica

**Funciones de verdad**

Valoraciones

Consecuencia lógica  
y satisfactibilidad

Problemas de decisión

Limitaciones

Lógica de Primer  
Orden

Sintaxis

Términos y fórmulas

Sustituciones

Semántica

Estructuras

Interpretación de  
términos y fórmulas

Consecuencia lógica  
y validez

- ▶ Las variables proposicionales se interpretan mediante una **valoración de verdad** (o interpretación), es decir, una aplicación

$$v : VP \rightarrow \{0, 1\}$$

- ▶ Podemos extender cada valoración,  $v$ , **de forma única**, al conjunto de todas las fórmulas de manera que para cada fórmula  $F$  se verifique:

- ▶  $v(\neg F) = H_{\neg}(v(F))$ .
- ▶  $v((F \vee G)) = H_{\vee}(v(F), v(G))$ .
- ▶  $v((F \wedge G)) = H_{\wedge}(v(F), v(G))$ .
- ▶  $v((F \rightarrow G)) = H_{\rightarrow}(v(F), v(G))$ .
- ▶  $v((F \leftrightarrow G)) = H_{\leftrightarrow}(v(F), v(G))$ .

- ▶ Se dice que  $v(F)$  es el **valor de verdad** de  $F$  respecto de  $v$ .

Introducción

Lógica  
Proposicional

Sintaxis

Fórmulas

Inducción sobre  
fórmulas

Semántica

Funciones de verdad

**Valoraciones**

Consecuencia lógica  
y satisfactibilidad

Problemas de decisión

Limitaciones

Lógica de Primer  
Orden

Sintaxis

Términos y fórmulas

Sustituciones

Semántica

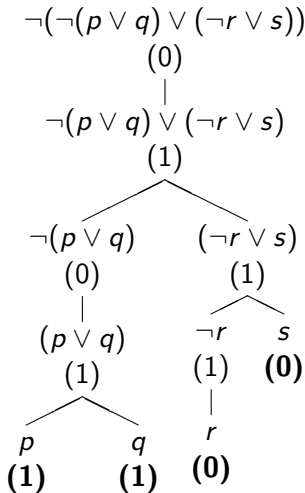
Estructuras

Interpretación de  
términos y fórmulas

Consecuencia lógica  
y validez

# Valor de verdad

Veamos el cálculo de  $v(\neg(\neg(p \vee q) \vee (\neg r \vee s)))$  en el árbol de formación (de abajo a arriba):



# Tablas de verdad

Dada una valoración,  $v$ , el valor de verdad de una fórmula  $F$  respecto de  $v$  está determinado por los valores de verdad de las subfórmulas de  $F$ .

Ejemplo: si  $v(p) = v(q) = 0$  y  $v(r) = 1$ , entonces

$$\begin{aligned} v(\neg((p \rightarrow q) \vee r)) &= H_{\neg}(H_{\vee}(v(p \rightarrow q), v(r))) = \\ &= H_{\neg}(H_{\vee}(H_{\rightarrow}(v(p), v(q)), 1)) = 0 \end{aligned}$$

Fijada  $v$  podemos presentar el cálculo de  $F$  mediante una tabla que recorre los valores de sus subfórmulas:

$p$	$q$	$r$	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \vee r$	$\neg((p \rightarrow q) \vee r)$
0	0	1	1	1	0

Una **tabla de verdad** para  $F$  es una tabla similar que contiene una fila por cada posible valoración que asigne valores a las variables proposicionales que aparecen en  $F$ .

Introducción

Lógica  
Proposicional

Sintaxis

Fórmulas

Inducción sobre  
fórmulas

Semántica

Funciones de verdad

**Valoraciones**

Consecuencia lógica  
y satisfactibilidad

Problemas de decisión

Limitaciones

Lógica de Primer  
Orden

Sintaxis

Términos y fórmulas

Sustituciones

Semántica

Estructuras

Interpretación de  
términos y fórmulas

Consecuencia lógica  
y validez

# Validez y satisfactibilidad (I)

- ▶ Decimos que una fórmula  $F$  es **válida en**  $v$ , o que  $v$  es un **modelo** de  $F$ , si  $v(F) = 1$ .
  - ▶ Notación:  $v \models F$ .
  - ▶ Una valoración  $v$  es *modelo* de un conjunto de fórmulas  $U$ ,  $v \models U$ , si  $v$  es modelo de todas las fórmulas de  $U$ .
- ▶ Una fórmula  $F$  es una **tautología** (o **válida**) si es válida para toda valoración (notación  $\models F$ ).
- ▶ Una fórmula  $F$  es **satisfactible** (o consistente) si existe una valoración que es modelo de  $F$ . En caso contrario diremos que es **insatisfactible** (o inconsistente).
  - ▶ Análogamente, un conjunto de fórmulas  $U$  es satisfactible (o consistente) si existe una valoración que es modelo de  $U$ . En caso contrario diremos que es insatisfactible (o inconsistente).

Introducción

Lógica  
Proposicional

Sintaxis

Fórmulas

Inducción sobre  
fórmulas

Semántica

Funciones de verdad

Valoraciones

Consecuencia lógica  
y satisfactibilidad

Problemas de decisión

Limitaciones

Lógica de Primer  
Orden

Sintaxis

Términos y fórmulas

Sustituciones

Semántica

Estructuras

Interpretación de  
términos y fórmulasConsecuencia lógica  
y validez

## Validez y satisfactibilidad (II)

Relación entre ambos conceptos:

**Lema.** Para cada  $F \in \mathbf{PROP}$  se verifica:

- ▶ Si  $F$  es un tautología entonces  $F$  es satisfactible.
- ▶  $F$  es una tautología si y sólo si  $\neg F$  insatisfactible.

**Ejemplos:**

- ▶ Son tautologías:  $(p \vee \neg p)$  y  $((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$ .
- ▶  $p \wedge \neg p$  es insatisfactible y, por tanto,  $\neg(p \wedge \neg p)$  es una tautología.
- ▶  $(p \rightarrow q) \rightarrow p$  es satisfactible pero no es una tautología.

Introducción

Lógica  
Proposicional

Sintaxis

Fórmulas

Inducción sobre  
fórmulas

Semántica

Funciones de verdad

Valoraciones

**Consecuencia lógica  
y satisfactibilidad**

Problemas de decisión

Limitaciones

Lógica de Primer  
Orden

Sintaxis

Términos y fórmulas

Sustituciones

Semántica

Estructuras

Interpretación de  
términos y fórmulas

Consecuencia lógica  
y validez

- ▶ Una fórmula  $F$  es **consecuencia lógica** de un conjunto de fórmulas  $U$ , si todo modelo de  $U$  es modelo de  $F$ .  
Es decir, para toda valoración,  $v$ ,

$$v \models U \implies v \models F$$

- ▶ Notación:  $U \models F$ .
- ▶ La relación de consecuencia lógica permite formular el problema básico en el marco de la lógica proposicional.

Relación entre consecuencia lógica, consistencia y validez:

**Proposición.** Sea  $\{F_1, \dots, F_n\} \subseteq \mathbf{PROP}$ . Son equivalentes:

- ▶  $\{F_1, \dots, F_n\} \models F$
- ▶  $F_1 \wedge \dots \wedge F_n \rightarrow F$  es un tautología.
- ▶  $\{F_1, \dots, F_n, \neg F\}$  es insatisfactible.



# Algoritmos de decisión (I)

Dado un conjunto de fórmulas proposicionales,  $U$ , un **algoritmo de decisión** para  $U$  es un algoritmo que dada  $A \in PROP$ , devuelve SI cuando  $A \in U$ , y NO si  $A \notin U$ .

Casos especialmente interesantes:

- ▶ **SAT** =  $\{A \in PROP : A \text{ es satisfactible}\}$
- ▶ **TAUT** =  $\{A \in PROP : A \text{ es una tautología}\}$
- ▶ Fijado  $U \subseteq PROP$ , la **Teoría de  $U$**  es

$$\mathcal{T}(U) = \{A \in PROP : U \models A\}$$

Un algoritmo de decisión para  $\mathcal{T}(U)$  proporciona una respuesta al Problema Básico expuesto al principio del tema.

Introducción

Lógica  
Proposicional

Sintaxis

Fórmulas

Inducción sobre  
fórmulas

Semántica

Funciones de verdad

Valoraciones

Consecuencia lógica  
y satisfactibilidad

Problemas de decisión

Limitaciones

Lógica de Primer  
Orden

Sintaxis

Términos y fórmulas

Sustituciones

Semántica

Estructuras

Interpretación de  
términos y fórmulas

Consecuencia lógica  
y validez

# Algoritmos de decisión (II)

## Problema Básico:

Obtener un algoritmo que, dado un conjunto finito de fórmulas proposicionales,  $U$ , y una fórmula  $F$ , decida si  $U \models F$ .

El problema anterior se reduce a decidir la **satisfactibilidad** de una cierta fórmula (o si se prefiere, la **validez** de otra). Por tanto,

- ▶ La construcción de tablas de verdad proporciona un algoritmo (ineficiente) para decidir la consecuencia lógica.
- ▶ El Problema Básico es resoluble algorítmicamente, aunque no se conoce ninguna solución eficiente y se duda de la existencia de algoritmos de decisión eficientes para este problema, ya que ...
- ▶ ... determinar la satisfactibilidad de una fórmula proposicional es un problema **NP-completo**.

# Algoritmos de decisión (III)

## Problema Básico (bis):

Obtener un algoritmo eficiente que, dado un conjunto finito de fórmulas proposicionales,  $U$ , y una fórmula  $F$ , decida si  $U \models F$ .

Observaciones:

- ▶ Este problema es equivalente al de obtener un algoritmo eficiente para determinar la satisfactibilidad de una fórmula proposicional.
- ▶ Se trata de un **problema abierto**, que posiblemente tendrá una respuesta negativa (se cree que no existen algoritmos eficientes para resolver SAT).
- ▶ Para propósitos prácticos puede bastar con algoritmos eficientes para alguna clase especial de fórmulas.

Introducción

Lógica  
Proposicional

Sintaxis

Fórmulas

Inducción sobre  
fórmulas

Semántica

Funciones de verdad

Valoraciones

Consecuencia lógica  
y satisfactibilidad

**Problemas de decisión**

Limitaciones

Lógica de Primer  
Orden

Sintaxis

Términos y fórmulas

Sustituciones

Semántica

Estructuras

Interpretación de  
términos y fórmulas

Consecuencia lógica  
y validez

# Limitaciones de la lógica proposicional

- ▶ La lógica proposicional posee una semántica sencilla y existen algoritmos de decisión para sus problemas básicos, como SAT o la consecuencia lógica.
- ▶ Sin embargo, la expresividad de la lógica proposicional es bastante limitada.
- ▶ Existen problemas cuya descripción mediante lógica proposicional es complicada, ya que requieren un gran número de fórmulas o bien fórmulas de gran tamaño.
- ▶ Más aún, existen formas de razonamiento válido que no pueden ser expresadas mediante la lógica proposicional, por ejemplo:
  - ▶ Todos los hombres son mortales
  - ▶ Sócrates es un hombre.
  - ▶ Por tanto, Sócrates es mortal.
- ▶ La Lógica de Primer Orden extiende a la Lógica Proposicional proporcionando mayor expresividad.

# Ejemplo (I)

Consideremos las siguientes afirmaciones:

1. Marco era pompeyano.
2. Todos los pompeyanos eran romanos.
3. Cada romano, o era leal a César, o le odiaba.
4. Todo el mundo es leal a alguien.
5. La gente sólo intenta asesinar a aquellos a quienes no es leal.
6. Marco intentó asesinar a César.
7. Todo pompeyano es leal a su padre.

¿Podemos deducir a partir de esta información que Marco era leal a César? ¿Podemos deducir que Marco odiaba a César? ¿Era César el padre de Marco?

## Ejemplo (II)

- ▶ Podemos formalizar las afirmaciones observando que todas ellas expresan propiedades de los elementos de un cierto conjunto de individuos (romanos) y las relaciones que se dan entre ellos.
- ▶ Introduzcamos símbolos para expresar estas relaciones y para referirnos a los individuos de los que estamos hablando:
  - ▶  $P(x)$  expresa “ $x$  es pompeyano”.
  - ▶  $R(x)$  expresa “ $x$  es romano”.
  - ▶  $L(x, y)$ : “ $x$  es leal a  $y$ ”.
  - ▶  $O(x, y)$ : “ $x$  odia a  $y$ ”.
  - ▶  $IA(x, y)$ : “ $x$  intentó asesinar a  $y$ ”.
  - ▶ Por último, parece natural introducir una función  $f$  que para cada  $x$ , devuelve el padre de  $x$ ,  $f(x)$ .

## Ejemplo (III)

Ahora podemos formalizar los enunciados anteriores:

1.  $P(\mathbf{Marco})$  expresa “Marco es pompeyano”
2.  $\forall x (P(x) \rightarrow R(x))$ 
  - ▶ “Todos los pompeyanos son romanos”
3.  $\forall x (R(x) \rightarrow (L(x, \mathbf{Cesar}) \vee O(x, \mathbf{Cesar})))$ 
  - ▶ “Todo romano es leal a César o le odia”
4.  $\forall x \exists y L(x, y)$ 
  - ▶ “Todo el mundo es leal a alguien”.
5.  $\forall x \forall y (IA(x, y) \rightarrow \neg L(x, y))$ 
  - ▶ “La gente sólo intenta asesinar a aquellos a quienes no es leal”.
6.  $IA(\mathbf{Marco}, \mathbf{Cesar})$ 
  - ▶ “Marco intentó asesinar a César”.
7.  $\forall x (P(x) \rightarrow L(x, f(x)))$ 
  - ▶ “Todo pompeyano es leal a su padre”.

Introducción

Lógica  
Proposicional

Sintaxis

Fórmulas

Inducción sobre  
fórmulas

Semántica

Funciones de verdad

Valoraciones

Consecuencia lógica  
y satisfactibilidad

Problemas de decisión

Limitaciones

Lógica de Primer  
Orden

Sintaxis

Términos y fórmulas

Sustituciones

Semántica

Estructuras

Interpretación de  
términos y fórmulasConsecuencia lógica  
y validez

## Ejemplo (IV)

- ▶ Para las preguntas podemos escribir:
  - a.  $L(\mathbf{Marco}, \mathbf{Cesar})$ : Marco es leal a César.
  - b.  $O(\mathbf{Marco}, \mathbf{Cesar})$ : Marco odia a César.
- ▶ Sin embargo, no podemos expresar que “Marco es el padre de César” sin considerar algún símbolo más.
- ▶ Una posibilidad es añadir a nuestro lenguaje el símbolo “=” para expresar al igualdad entre dos objetos. De este modo tendríamos:
  - ▶  $f(\mathbf{Marco}) = \mathbf{Cesar}$ : César es el padre de Marco.
- ▶ Como puede verse, hemos ampliado el conjunto de símbolos disponibles en la lógica proposicional.
- ▶ El conjunto de símbolos introducidos constituye lo que denominamos un **Lenguaje de Primer Orden**.



- ▶ Un **lenguaje de primer orden**  $L$  consta de:
  - ▶ Símbolos lógicos (comunes a todos los lenguajes):
    1. Un conjunto de **variables**:  $V = \{x_0, x_1, \dots\}$ .
    2. **Conectivas lógicas**:  $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$ .
    3. **Cuantificadores**:  $\exists$  (existencial),  $\forall$  (universal).
    4. **Símbolos auxiliares**: “(”, “)” y “;”
  - ▶ Símbolos no lógicos (propios de cada lenguaje):
    1. Un conjunto  $L_C$  de **constantes**.
    2. Un conjunto de **símbolos de función**  
 $L_F = \{f_0, f_1, \dots\}$ , cada uno con su aridad.
    3. Un conjunto de **símbolos de predicados**  
 $L_P = \{p_0, p_1, \dots\}$ , cada uno con su aridad.

(Los conjuntos  $V, L_F, L_C$  y  $L_P$  son disjuntos)
- ▶ Los símbolos de predicado de aridad 0 actúan como símbolos proposicionales.
- ▶ El símbolo  $=$  no es un predicado común a todos los lenguajes de primer orden. Cuando está incluido en el lenguaje decimos que se trata de un **Lenguaje de Primer Orden con igualdad**.

# Ejemplos

- ▶ En el ejemplo de los romanos se introdujo el lenguaje:

$$LR = \left\{ \underbrace{\text{Marco, Cesar}}_{\text{constantes}}, \underbrace{P, L, O, R, IA}_{\text{símb. predicado}}, \underbrace{f}_{\text{símb. función}} \right\}$$

$P, R$  y  $f$  tienen aridad 1.  $L, O$  y  $IA$  tienen aridad 2.

- ▶ El lenguaje de la Aritmética (números naturales):

$$LA = \left\{ \underbrace{0, 1}_{\text{constantes}}, \underbrace{<, =}_{\text{símb. predicado}}, \underbrace{\cdot, +}_{\text{símb. de función}} \right\}$$

$<, +$  y  $\cdot$  tienen aridad 2.

- ▶ Un lenguaje para el parentesco:

$$LP = \left\{ \underbrace{\text{padre\_de, madre\_de, hijo, hermano, casados}}_{\text{símb. predicado}} \right\}$$

Todos de aridad 2.

- ▶ Los **términos** de un lenguaje  $L$  se definen como:
  1. Las variables y las constantes son términos.
  2. Si  $t_1, \dots, t_n$  son términos y  $f$  es un símbolo de función de  $L$  de aridad  $n$ , entonces  $f(t_1, \dots, t_n)$  es un término.
- ▶ Los términos son expresiones que me permiten hablar de objetos del mundo.
- ▶ Ejemplos:
  - ▶ Son términos del lenguaje  $LR$ :

**Marco, Cesar,  $f(x)$ ,  $f(\mathbf{Cesar})$ ,  $f(f(\mathbf{Cesar}))$ , ...**

- ▶ Son términos del lenguaje de la Aritmética:

**$0$ ,  $+(x, y)$ ,  $\cdot(x, +(y, \mathbf{1}))$ , ...**

Utilizando la notación infija tradicional se escriben

$$x + y, x \cdot (y + \mathbf{1})$$

- ▶ Las fórmulas son expresiones que permiten hablar de veracidad y falsedad.
- ▶ Las **fórmulas atómicas** de  $L$  son las expresiones  $p(t_1, \dots, t_n)$ , donde  $p$  es un símbolo de predicado de aridad  $n$  y  $t_1, \dots, t_n$  son términos.
- ▶ Las **fórmulas** de  $L$  se definen como sigue:
  1. Las fórmulas atómicas de  $L$  son fórmulas de  $L$ .
  2. Si  $F$  y  $G$  son fórmulas de  $L$ , entonces  $\neg F$ ,  $(F \vee G)$ ,  $(F \wedge G)$ ,  $(F \rightarrow G)$  y  $(F \leftrightarrow G)$  también lo son.
  3. Si  $x$  es una variable y  $F$  es una fórmula de  $L$ , entonces  $\exists x F$  y  $\forall x F$  también son fórmulas.

Introducción

Lógica  
Proposicional

Sintaxis

Fórmulas

Inducción sobre  
fórmulas

Semántica

Funciones de verdad

Valoraciones

Consecuencia lógica  
y satisfactibilidad

Problemas de decisión

Limitaciones

Lógica de Primer  
Orden

Sintaxis

**Términos y fórmulas**

Sustituciones

Semántica

Estructuras

Interpretación de  
términos y fórmulas

Consecuencia lógica  
y validez

# Ejemplos

- ▶ En  $LA$ ,  $\neg \exists x(x \cdot \mathbf{0} = y)$
- ▶ En  $LP$ ,  $\exists x(\text{padre\_de}(x, y) \wedge \text{padre\_de}(x, z))$ .  
Pero  $\exists x \text{ padre\_de}(\text{padre\_de}(x, y), z)$ , NO es una fórmula.
- ▶ En  $LR$ ,

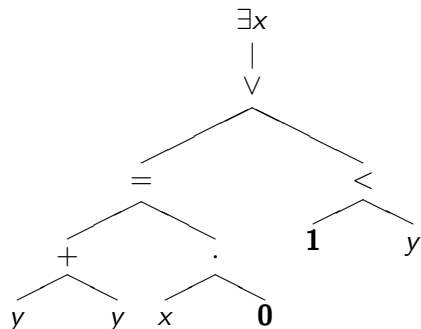
$$\forall x \exists y L(x, y)$$

$$\forall x (R(x) \rightarrow (L(x, \mathbf{Cesar}) \vee O(x, \mathbf{Cesar})))$$

- ▶ **Notación:** Para facilitar la lectura de las fórmulas y reducir el número de paréntesis adoptamos los mismos convenios que para la lógica proposicional:
  - ▶ Omitiremos los paréntesis externos.
  - ▶ Daremos a las conectivas una precedencia de asociación. De mayor a menor, están ordenadas por:  $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ .
  - ▶ Se dejan los paréntesis para la conectiva  $\leftrightarrow$ .

# Árboles de formación

Análisis sintáctico de la expresión  $\exists x(y + y = x \cdot 0 \vee 1 < y)$



O también:

$$\exists x(y + y = x \cdot 0 \vee 1 < y)$$

$$(y + y = x \cdot 0 \vee 1 < y)$$

$$y + y = x \cdot 0 \quad 1 < y$$

Las fórmulas de los nodos se denominan **subfórmulas**.

Introducción

Lógica  
Proposicional

Sintaxis

Fórmulas

Inducción sobre  
fórmulas

Semántica

Funciones de verdad  
Valoraciones

Consecuencia lógica  
y satisfactibilidad

Problemas de decisión

Limitaciones

Lógica de Primer  
Orden

Sintaxis

**Términos y fórmulas**

Sustituciones

Semántica

Estructuras

Interpretación de  
términos y fórmulas

Consecuencia lógica  
y validez

# Tratamiento de la cuantificación

- ▶ Significado intuitivo de  $\exists x(y \cdot x = \mathbf{1})$ :
- ▶ Dado  $y$ , existe un elemento, que denotamos por  $x$  (no sabemos exactamente su valor), que satisface la propiedad  $x \cdot y = \mathbf{1}$ , pero **no es cualquiera**.
- ▶ El símbolo que usemos para ese elemento no es importante: la fórmula  $\exists z(y \cdot z = \mathbf{1})$  expresa la misma propiedad para  $y$ .
- ▶ La fórmula dice algo sobre  $y$  (en este caso, si sustituyo  $y$  por un elemento del universo, afirma que tal elemento tiene inverso a la derecha), no sobre el elemento  $x$ : Si cambio  $x$  por  $y$ , la fórmula resultante  $\exists y(y \cdot y = \mathbf{1})$  **no expresa** lo mismo que la original.

## Introducción

### Lógica Proposicional

Sintaxis

Fórmulas

Inducción sobre  
fórmulas

Semántica

Funciones de verdad

Valoraciones

Consecuencia lógica  
y satisfactibilidad

Problemas de decisión

Limitaciones

### Lógica de Primer Orden

Sintaxis

**Términos y fórmulas**

Sustituciones

Semántica

Estructuras

Interpretación de  
términos y fórmulas

Consecuencia lógica  
y validez

- ▶ Una **estancia ligada** de una variable  $x$  en una fórmula  $F$  es una aparición de  $x$  en una subfórmula del tipo  $\exists x F$  o  $\forall x F$ . En otro caso, diremos que es una **estancia libre**.
  - ▶ **Variable libre** en  $F$ : Al menos una estancia libre.
  - ▶ **Variable ligada** en  $F$ : Al menos una estancia ligada.
- ▶ Según las estancias de sus variables, podemos distinguir los siguientes tipos de expresiones:
  - ▶ Término **cerrado**: no contiene variables.
  - ▶ Fórmula **cerrada**: no contiene variables libres.
  - ▶ Fórmula **abierta**: no contiene cuantificadores.

Introducción

Lógica  
Proposicional

Sintaxis

Fórmulas

Inducción sobre  
fórmulas

Semántica

Funciones de verdad  
Valoraciones

Consecuencia lógica  
y satisfactibilidad

Problemas de decisión

Limitaciones

Lógica de Primer  
Orden

Sintaxis

Términos y fórmulas

Sustituciones

Semántica

Estructuras

Interpretación de  
términos y fórmulas

Consecuencia lógica  
y validez



- ▶  $\exists x \forall y (x \cdot y = z \cdot \mathbf{1})$  no es cerrada ( $z$  es libre).
- ▶  $\exists x (\forall y (x \cdot y = \mathbf{1}) \vee x \cdot y = x)$  no es cerrada.
  - ▶ La variable  $y$  aparece libre **y** ligada.
  - ▶ Aunque sintácticamente es correcto, no escribiremos fórmulas en las que una misma variable aparezca libre y ligada. Usaremos en su lugar la fórmula

$$\exists x (\forall y (x \cdot y = \mathbf{1}) \vee (x \cdot z = x))$$

- ▶  $\forall x \exists y \forall z (z < x \leftrightarrow z < y)$  es una fórmula cerrada.
- ▶  $\text{padre\_de}(y, x) \vee \text{hermano}(z, x)$  es abierta.
- ▶ La fórmula

$$L(x, y) \wedge \exists z IA(y, z) \rightarrow \neg IA(x, z)$$

no es cerrada ni abierta.

# Sustituciones (I)

- ▶ Una **sustitución**,  $\theta$ , es una asignación de términos a un conjunto finito de variables.

- ▶ La forma de describirla, si  $\theta(x_1) = t_1, \dots, \theta(x_n) = t_n$  y las restantes variables quedan invariantes, es  $\theta = \{x_1/t_1, \dots, x_n/t_n\}$  ó  $\theta = \{(x_1, t_1), \dots, (x_n, t_n)\}$

- ▶ Aplicación de  $\theta$  a un término  $t$ :

$$\theta(t) := \begin{cases} \theta(t), & \text{si } t \text{ es una variable;} \\ f(\theta(t_1), \dots, \theta(t_n)), & \text{si } t \equiv f(t_1, \dots, t_n) \end{cases}$$

(también se denota por  $t\{x_1/t_1, \dots, x_n/t_n\}$ ).

- ▶ Ejemplos:

- ▶ Si  $\theta = \{x/(x + y), z/\mathbf{0}, u/\mathbf{1}\}$ , y  $t = (x + y) + z$ , entonces

$$\theta(t) \equiv ((x + y) + y) + \mathbf{0}$$

- ▶  $(x \cdot \mathbf{1})\{x/y, y/\mathbf{1}\} \equiv y \cdot \mathbf{1}$

# Sustituciones (II)

- Aplicación de  $\theta = \{x/t\}$  a una fórmula  $F$ :

$$F\{x/t\} := \begin{cases} p(t_1\{x/t\}, \dots, t_n\{x/t\}), & \text{si } F \equiv p(t_1, \dots, t_n) \\ \neg G\{x/t\}, & \text{si } F \equiv \neg G; \\ G\{x/t\} \vee H\{x/t\}, & \text{si } F \equiv G \vee H: \\ G\{x/t\} \wedge H\{x/t\} & \text{si } F \equiv G \wedge H: \\ G\{x/t\} \rightarrow H\{x/t\}, & \text{si } F \equiv G \rightarrow H: \\ G\{x/t\} \leftrightarrow H\{x/t\}, & \text{si } F \equiv G \leftrightarrow H: \\ \exists yG\{x/t\}, & \text{si } F \equiv \exists yG \text{ y } x \neq y; \\ \forall yG\{x/t\}, & \text{si } F \equiv \forall yG \text{ y } x \neq y; \\ \exists xG, & \text{si } F \equiv \exists xG; \\ \forall xG, & \text{si } F \equiv \forall xG; \end{cases}$$

- Análogamente se define  $F\{x_1/t_1, \dots, x_n/t_n\}$ .

# Sustituciones (III)

- ▶ No toda sustitución es admisible:  
Si  $F \equiv \exists x \neg(x = y)$  (“existen al menos dos elementos”) y  $\theta = \{y/x\}$ , entonces  $\theta(F) \equiv \exists x \neg(x = x)$  ¡Que es falso!
- ▶ Solución: No admitir la **creación** de nuevas estancias ligadas.
- ▶ Una variable  $x$  de  $F$  es **sustituible** por el término  $t$  si se cumple una de las siguientes condiciones:
  1.  $F$  es atómica;
  2.  $F \equiv \neg G$  y  $x$  es sustituible por  $t$  en  $G$ ;
  3.  $F \equiv G \vee H$ ,  $F \equiv G \wedge H$ ,  $F \equiv G \rightarrow H$  o bien  $F \equiv G \leftrightarrow H$  y  $x$  es sustituible por  $t$  en  $G$  y en  $H$ ;
  4.  $F \equiv \exists x G$ ; o bien,  $F \equiv \exists y G$ ,  $x \neq y$ , y no ocurre en  $t$ , y  $x$  es sustituible por  $t$  en  $G$ .
  5.  $F \equiv \forall x G$ ; o bien,  $F \equiv \forall y G$ ,  $x \neq y$ , y no ocurre en  $t$ , y  $x$  es sustituible por  $t$  en  $G$ .
- ▶  $x$  es sustituible por  $t$  en  $F$  si al hacer la sustitución no se crean estancias ligadas nuevas.

Introducción

Lógica  
Proposicional

Sintaxis

Fórmulas

Inducción sobre  
fórmulas

Semántica

Funciones de verdad

Valoraciones

Consecuencia lógica  
y satisfactibilidad

Problemas de decisión

Limitaciones

Lógica de Primer  
Orden

Sintaxis

Términos y fórmulas

**Sustituciones**

Semántica

Estructuras

Interpretación de  
términos y fórmulas

Consecuencia lógica  
y validez

- ▶ En lo sucesivo, al escribir  $F\{x/t\}$ , supondremos que  $x$  es sustituible por  $t$  en  $F$ .
- ▶ Escribiremos  $F(x_1, \dots, x_n)$  si  $x_1, \dots, x_n$  son sus variables libres.
- ▶ Cuando el orden de las variables esté claro, abreviaremos  $F\{x_1/t_1, \dots, x_n/t_n\}$  por  $F(t_1, \dots, t_n)$ .

- ▶ **Objetivo:** Dotar de significado a los términos y fórmulas de un lenguaje de primer orden.
  - ▶ Términos cerrados: elementos del universo.
  - ▶ Significado de las fórmulas: propiedades sobre los elementos del universo.
- ▶ Una  **$L$ -estructura** (o **interpretación**)  $\mathcal{M}$ , consta de:
  - ▶ Un conjunto no vacío  $M \neq \emptyset$  (el **universo** de la estructura).
  - ▶ Una interpretación en  $M$  para cada símbolo de  $L$ :
    1. Para cada constante  $c$ ,  $c^{\mathcal{M}} \in M$ .
    2. Para cada función,  $f$ , de aridad  $n > 0$ ,  $f^{\mathcal{M}} : M^n \rightarrow M$ .
    3. Para cada predicado,  $p$ , de aridad  $n > 0$ ,  
 $p^{\mathcal{M}} : M^n \rightarrow \{0, 1\}$  (equiv.,  $p^{\mathcal{M}} \subseteq M^n$ ).
    4. Si  $L$  es un LPO *con igualdad* la interpretación de  $=$  es

$$\{(a, a) : a \in M\}$$

- ▶ Si no hay confusión, escribiremos  $M$  en vez de  $\mathcal{M}$ ,  $p^M$  en lugar de  $p^{\mathcal{M}}$ , etc.

# Ejemplos (I)

- ▶ Para  $LP$ , sea  $\mathcal{M}_1$  la estructura dada por:
  - ▶ Universo:  $M_1 = \{Pedro, Pablo, Ana, Laura\}$ .
  - ▶  $padre\_de^{M_1} = \{(Pablo, Ana), (Pedro, Pablo)\}$ .
  - ▶  $madre\_de^{M_1} = \{(Ana, Laura)\}$ .
  - ▶  $hermano^{M_1} = \emptyset$ .
  - ▶  $casados^{M_1} = \emptyset$ .
  
- ▶ Para  $LP$ , consideremos  $\mathcal{M}_2$  dada por:
  - ▶ Universo:  $M_2 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .
  - ▶  $padre\_de^{M_2} \equiv$  ser múltiplo de.
  - ▶  $madre\_de^{M_2} \equiv$  ser menor.
  - ▶  $hermano^{M_2} \equiv$  primos entre sí.
  - ▶  $casados^{M_2} = \emptyset$ .

# Ejemplos (II)

▶ Para  $LA$ , sea  $\mathcal{M}_3$  dada por:

- ▶ Universo:  $M_3 = \mathbb{N}$
- ▶  $\mathbf{0}^{M_3} = 0$ .
- ▶  $\mathbf{1}^{M_3} = 1$ .
- ▶ La función  $+^{M_3}$  es la suma de números naturales.
- ▶ La función  $\cdot^{M_3}$  es el producto de números naturales.
- ▶  $=^{M_3}$  es la igualdad entre números naturales.
- ▶  $<^{M_3}$  es el orden entre números naturales.

▶ Para  $LA$ , sea  $\mathcal{M}_4$  dada por:

- ▶ Universo:  $M_4 = \mathbb{Q}$
- ▶  $\mathbf{0}^{M_4} = \frac{1}{2}$ .
- ▶  $\mathbf{1}^{M_4} = 2$ .
- ▶ La función  $+^{M_4}$  es la diferencia de números racionales.
- ▶ La función  $\cdot^{M_4}$  está dada por  $p \cdot^{M_4} q = p$ .
- ▶  $=^{M_4}$  es la igualdad entre números naturales.
- ▶  $<^{M_4}$  es el orden entre números racionales.

Introducción

Lógica  
Proposicional

Sintaxis

Fórmulas

Inducción sobre  
fórmulas

Semántica

Funciones de verdad  
Valoraciones

Consecuencia lógica  
y satisfactibilidad

Problemas de decisión  
Limitaciones

Lógica de Primer  
Orden

Sintaxis

Términos y fórmulas

Sustituciones

Semántica

**Estructuras**

Interpretación de  
términos y fórmulas

Consecuencia lógica  
y validez



# Interpretación de términos (I)

► Dada una  $L$ -estructura  $\mathcal{M}$ , a cada término  $t$  de  $L$ , **sin variables**, le corresponde un elemento de  $M$ , que denotamos por  $t^{\mathcal{M}}$  (su **interpretación** en  $\mathcal{M}$ ):

- Si  $t \equiv c$  una constante, entonces  $t^{\mathcal{M}} = c^{\mathcal{M}} \in M$ .
- Si  $t \equiv f(t_1, \dots, t_n)$ , entonces  $t^{\mathcal{M}} = f^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}, \dots, t_n^{\mathcal{M}})$ .

► Ejemplos:

$$\begin{aligned}((0 \cdot 1) + 1)^{M_3} &= ((0 \cdot 1)^{M_3} +^{M_3} 1^{M_3}) \\ &= (0^{M_3} \cdot^{M_3} 1^{M_3}) + 1 \\ &= (0 \cdot 1) + 1 = 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}((0 \cdot 1) + 1)^{M_4} &= ((0 \cdot 1)^{M_4} +^{M_4} 1^{M_4}) \\ &= (0^{M_4} \cdot^{M_4} 1^{M_4}) - 2 \\ &= \left(\frac{1}{2} \cdot^{M_4} 2\right) - 2 \\ &= \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}\end{aligned}$$

Introducción

Lógica  
Proposicional

Sintaxis

Fórmulas

Inducción sobre  
fórmulas

Semántica

Funciones de verdad

Valoraciones

Consecuencia lógica  
y satisfactibilidad

Problemas de decisión

Limitaciones

Lógica de Primer  
Orden

Sintaxis

Términos y fórmulas

Sustituciones

Semántica

Estructuras

Interpretación de  
términos y fórmulas

Consecuencia lógica  
y validez

## Interpretación de términos (II)

- ▶ Asociamos a cada  $L$ -estructura,  $\mathcal{M}$ , un lenguaje  $L(\mathcal{M})$ , que tiene todos los símbolos de  $L$  y, además, una constante  $\underline{a}$  por cada elemento  $a \in M$ .
- ▶ La interpretación de los símbolos de  $L(\mathcal{M})$  en  $\mathcal{M}$  es la misma para los símbolos de  $L$ , y para cada  $a \in M$ ,

$$\underline{a}^{\mathcal{M}} = a$$

- ▶ Ahora podemos calcular  $t^{\mathcal{M}}$  para todo término de  $L(\mathcal{M})$  sin variables:

$$\begin{aligned} ((\underline{2} \cdot \underline{5}) + \mathbf{1})^{M_3} &= ((\underline{2} \cdot \underline{5})^{M_3} +^{M_3} \mathbf{1}^{M_3}) \\ &= (\underline{2}^{M_3} \cdot^{M_3} \underline{5}^{M_3}) + \mathbf{1} \\ &= (2 \cdot 5) + 1 = 11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ((\underline{2}^{M_4} \cdot \underline{5}^{M_4}) + \mathbf{1})^{M_4} &= ((x \cdot y)^{M_4} +^{M_4} \mathbf{1}^{M_4}) \\ &= (\underline{2}^{M_4} \cdot^{M_4} \underline{5}^{M_4}) - 2 \\ &= 2 - 2 = 0 \end{aligned}$$

Introducción

Lógica  
Proposicional

Sintaxis

Fórmulas

Inducción sobre  
fórmulas

Semántica

Funciones de verdad

Valoraciones

Consecuencia lógica  
y satisfactibilidad

Problemas de decisión

Limitaciones

Lógica de Primer  
Orden

Sintaxis

Términos y fórmulas

Sustituciones

Semántica

Estructuras

Interpretación de  
términos y fórmulas

Consecuencia lógica  
y validez

# Interpretación de fórmulas (I)

Dada una  $L$ -estructura  $\mathcal{M}$ , decimos que una fórmula  $F$  cerrada de  $L(\mathcal{M})$  se **satisface** en  $\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{M} \models F$ , si:

- ▶ Si  $F$  es  $p(t_1, \dots, t_n)$  (atómica), entonces  $\mathcal{M} \models F$  sii  $(t_1^{\mathcal{M}}, \dots, t_n^{\mathcal{M}}) \in p^{\mathcal{M}}$ .
- ▶ Si  $F$  es  $F_1 \vee F_2$ , entonces  $\mathcal{M} \models F$  sii se verifica que

$$\mathcal{M} \models F_1 \quad \text{ó} \quad \mathcal{M} \models F_2$$

- ▶ Las conectivas  $\wedge$ ,  $\rightarrow$  y  $\leftrightarrow$  se tratan de manera similar.
- ▶ Si  $F$  es  $\neg F_1$ , entonces  $\mathcal{M} \models F$  sii no se tiene  $\mathcal{M} \models F_1$ .
- ▶ Si  $F$  es  $\exists x F_1(x)$ , entonces  $\mathcal{M} \models F$  sii

$$\text{existe } b \in M \text{ tal que } \mathcal{M} \models F_1(\underline{b})$$

- ▶ Si  $F$  es  $\forall x F_1(x)$ , entonces  $\mathcal{M} \models F$  sii

$$\text{para todo } b \in M, \text{ se tiene } \mathcal{M} \models F_1(\underline{b})$$

Introducción

Lógica  
Proposicional

Sintaxis

Fórmulas

Inducción sobre  
fórmulas

Semántica

Funciones de verdad

Valoraciones

Consecuencia lógica  
y satisfactibilidad

Problemas de decisión

Limitaciones

Lógica de Primer  
Orden

Sintaxis

Términos y fórmulas

Sustituciones

Semántica

Estructuras

Interpretación de  
términos y fórmulasConsecuencia lógica  
y validez

## Interpretación de fórmulas (II)

- ▶ En particular, la definición anterior nos permite precisar cuándo una fórmula cerrada de  $L$ ,  $F$ , es válida en  $\mathcal{M}$  (o bien que  $\mathcal{M}$  es un modelo de  $F$ ) y escribir  $\mathcal{M} \models F$ .
- ▶ Si  $F$  no es cerrada, por definición,

$$\mathcal{M} \models F(x_1, \dots, x_n) \iff \mathcal{M} \models \forall x_1 \cdots \forall x_n F(x_1, \dots, x_n)$$

- ▶ Si  $\Sigma$  es un conjunto de fórmulas de un lenguaje  $L$  y  $\mathcal{M}$  una estructura para  $L$ , decimos que  $\mathcal{M}$  **es un modelo de  $\Sigma$** , si

$$\text{para toda fórmula } F \in \Sigma, \quad \mathcal{M} \models F.$$

## Ejemplos

En  $\mathcal{M}_1$ :

- ▶ Universo:  $M_1 = \{\text{Pedro}, \text{Pablo}, \text{Ana}, \text{Laura}\}$ .
- ▶  $\text{padre\_de}^{M_1} = \{(\text{Pablo}, \text{Ana}), (\text{Pedro}, \text{Pablo})\}$ .
- ▶  $\text{madre\_de}^{M_1} = \{(\text{Ana}, \text{Laura})\}$ .
- ▶  $\text{hermano}^{M_1} = \emptyset$ ,  $\text{casados}^{M_1} = \emptyset$ .

Se tiene:

- ▶  $\mathcal{M}_1 \models \exists x(\text{padre\_de}(\text{Pablo}, x) \wedge \text{madre\_de}(x, \underline{\text{Laura}}))$
- ▶  $\mathcal{M}_1 \models \neg \exists x \text{ padre\_de}(x, \underline{\text{Laura}})$
- ▶  $\mathcal{M}_1 \models \forall x \forall y \forall z (\text{padre}(x, z) \wedge \text{madre}(y, z) \rightarrow \neg \text{casados}(x, y))$ .
- ▶  $\mathcal{M}_1 \models \text{hermano}(x, y) \leftrightarrow \text{hermano}(y, x)$
- ▶  $\mathcal{M}_1 \not\models \exists x \text{ padre\_de}(x, y)$

Introducción

Lógica  
Proposicional

Sintaxis

Fórmulas

Inducción sobre  
fórmulas

Semántica

Funciones de verdad

Valoraciones

Consecuencia lógica  
y satisfactibilidad

Problemas de decisión

Limitaciones

Lógica de Primer  
Orden

Sintaxis

Términos y fórmulas

Sustituciones

Semántica

Estructuras

Interpretación de  
términos y fórmulasConsecuencia lógica  
y validez

## Ejemplos (II)

En  $\mathcal{M}_2$ :

- ▶ Universo:  $M_2 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .
- ▶  $padre\_de^{M_2} \equiv$  ser múltiplo de.
- ▶  $madre\_de^{M_2} \equiv$  ser menor.
- ▶  $hermano^{M_2} \equiv$  primos entre sí,  $casados^{M_2} = \emptyset$ .

Se tiene:

- ▶  $\mathcal{M}_2 \models \exists x (padre\_de(\underline{4}, x) \wedge madre\_de(x, \underline{3}))$
- ▶  $\mathcal{M}_2 \models \exists x padre\_de(x, \underline{3})$
- ▶  $\mathcal{M}_2 \models hermano(x, y) \leftrightarrow hermano(y, x)$
- ▶  $\mathcal{M}_2 \models \exists x \forall y padre\_de(x, y)$  [ $x = 0$ ]
- ▶ ¿Se tiene  $\mathcal{M}_2 \models hermano(x, y) \rightarrow \neg padre\_de(x, y)$ ?

Introducción

Lógica  
Proposicional

Sintaxis

Fórmulas

Inducción sobre  
fórmulas

Semántica

Funciones de verdad  
Valoraciones

Consecuencia lógica  
y satisfactibilidad

Problemas de decisión  
Limitaciones

Lógica de Primer  
Orden

Sintaxis

Términos y fórmulas

Sustituciones

Semántica

Estructuras

Interpretación de  
términos y fórmulas

Consecuencia lógica  
y validez

- ▶ Una fórmula  $F(x_1, \dots, x_n)$  de  $L$  es **satisfactible** si existe una  $L$ -estructura  $\mathcal{M}$  y elementos  $a_1, \dots, a_n \in M$  tales que

$$\mathcal{M} \models F(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n)$$

- ▶ Ejemplo:  $\exists x \text{ padre\_de}(x, y)$
- ▶ Un conjunto de fórmulas cerradas  $\Sigma$  de un lenguaje  $L$  es **consistente** si existe una  $L$ -estructura,  $\mathcal{M}$ , tal que

$$\text{para toda formula } F \in \Sigma, \quad \mathcal{M} \models F$$

- ▶ Una fórmula  $F$  es **lógicamente válida** si para toda estructura  $\mathcal{M}$  se tiene que  $\mathcal{M} \models F$  (Notación:  $\models F$ ).
- ▶ Ejemplo:  $\forall x P(x) \vee \exists x \neg P(x)$

# Consecuencia lógica y equivalencia

- ▶ Diremos que una fórmula  $F$  es **consecuencia lógica** de un conjunto de fórmulas cerradas  $\Sigma$ , ( $\Sigma \models F$ ), si para toda  $L$ -estructura  $\mathcal{M}$  se tiene que

$$\text{si } \mathcal{M} \models \Sigma, \text{ entonces } \mathcal{M} \models F$$

- ▶ Es decir, si todo modelo de  $\Sigma$  es modelo de  $F$ .
- ▶ Los problemas de la consistencia, consecuencia lógica y la validez para la lógica primer orden, **no son decidibles**.

Introducción

Lógica  
Proposicional

Sintaxis

Fórmulas

Inducción sobre  
fórmulas

Semántica

Funciones de verdad

Valoraciones

Consecuencia lógica  
y satisfactibilidad

Problemas de decisión

Limitaciones

Lógica de Primer  
Orden

Sintaxis

Términos y fórmulas

Sustituciones

Semántica

Estructuras

Interpretación de  
términos y fórmulas

Consecuencia lógica  
y validez