Relación 2:. Tableros Semánticos.

Ejercicio 26.– Sea $F : p \wedge q \leftrightarrow \neg p \vee r$.

1. Escribe un tablero completo para F y otro para $\neg F$.
2. Describe todos los modelos y todos los contramodelos de la fórmula F.

Ejercicio 27.– Responde a las siguientes preguntas usando tableros semánticos:

1. ¿Es $(p \vee q \to r) \wedge (t \to \neg r) \wedge \neg(\neg t \to q)$ satisfactible?
2. ¿Es $(p \vee q \to r) \to (\neg r \to \neg p)$ una tautología?
3. ¿ $\{p \to q,\ q \to r\} \models p \to r$?
4. ¿ $p \wedge q \to r \ \equiv\ q \to p \vee r$?

Ejercicio 28.– Sea $U = \{p \to (q \leftrightarrow r),\ r\}$. Decide, mediante tableros semánticos, si:

1. $U \models r \to (p \wedge q)$.
2. $U \models (r \wedge p) \to q$.
3. $U \models (s \vee p) \wedge (s \to q) \to q$.

Ejercicio 29.– Usando tableros semánticos, decide si las siguientes fórmulas son tautologías:

$$(p \to q) \leftrightarrow (q \leftrightarrow (q \vee q)) \qquad p \leftrightarrow p \vee p$$
$$(p \wedge q) \leftrightarrow p \qquad p \to (p \to \neg p)$$

Ejercicio 30.– Prueba que $S = \{p \to q,\ \neg s \wedge r \to q,\ \neg q,\ q \leftrightarrow r \wedge s\}$ es satisfactible utilizando tableros semánticos.

Ejercicio 31.– Decide **razonadamente** si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

1. Si existe un tablero completo cerrado con raíz la fórmula proposicional F, entonces todo tablero completo para F es cerrado.
2. Si existe un tablero completo abierto con raíz la fórmula proposicional F, entonces todo tablero completo para F es abierto.
3. Si F es una tautología, cualquier hoja de un tablero completo para F es abierta.

4. Si existe un tablero completo para F tal que todas sus hojas son abiertas, F es una tautología.

Ejercicio 32.– Sean A, B, C y D fórmulas proposicionales. Usando los teoremas de correción y completitud para tableros semánticos, demuestra que:

1. Si cada uno de los siguientes conjuntos de fórmulas $U_1 = \{A, \neg B\}$ y $U_2 = \{B, \neg C\}$ admite un tablero completo cerrado, entonces la fórmula $\neg(A \to C)$ admite un tablero completo cerrado.

2. Si cada uno de los conjuntos $U_1 = \{A, \neg B, \neg C\}$, $U_2 = \{B, \neg D\}$ y $U_3 = \{C, \neg D\}$ admite un tablero completo cerrado, entonces la fórmula $\neg(A \to D)$ admite un tablero completo cerrado.

Ejercicio 33.– Alberto, Berta y Carlos son los tres sospechosos de un robo. Se les interroga por separado y éstas son sus declaraciones.

Alberto:	Berta es culpable y Carlos es inocente.
Berta:	Si Alberto es culpable, Carlos también.
Carlos:	Yo soy inocente, pero al menos uno de los otros dos es culpable.

1. Formaliza las declaraciones de los sospechosos en el lenguaje de la lógica proposicional.

2. ¿Son consistentes los testimonios de los tres?

3. El testimonio de un sospechoso se sigue lógicamente de los de los otros dos. ¿Cúal?

4. Se sabe que todos los culpables han mentido y todos los inocentes han dicho la verdad. ¿Quién es inocente y quién es culpable?

Ejercicio 34.– Formaliza los siguientes argumentos y estudia su validez:

1. Si llueve las calles están vacías. Si las calles están vacías, los comercios obtienen pérdidas. Los músicos no podrían sobrevivir si los comerciantes no les contratasen para componer canciones para publicidad. Los comerciantes invierten en canciones publicitarias cuando tienen pérdidas. Por tanto, si llueve los músicos pueden sobrevivir.

2. Si el barco entra en el puerto, habrá una gran fiesta. El barco entra en el puerto sólo si necesita repostar combustible. El barco no necesita combustible a menos que venga de muy lejos. Es imposible que no necesite combustible si la comida ya se les ha terminado. Sabemos que, o bien se le ha terminado la comida, o bien necesita combustible. Por tanto: habrá una gran fiesta.

3. Si f es diferenciable en $[a, b]$, es continua y acotada en $[a, b]$. Si f no fuese acotada en $[a, b]$ no podrá ser diferenciable en $[a, b]$. Por tanto: si f es discontinua y acotada en $[a, b]$ no es diferenciable en $[a, b]$.

4. Si llueve no iré al mercado. Si no iré al mercado, o bien no tendré comida o bien iré al restaurante. Llueve y tengo comida. Por lo tanto, no iré al restaurante.

Ejercicio 35.– En un texto de Lewis Carroll, el tio Jorge y el tío Jaime discuten acerca de la barbería del pueblo, atendida por tres barberos: Alberto, Benito y Carlos. Los dos tíos aceptan las siguientes premisas:

1. Si Carlos no está en la barbería, entonces ocurrirá que si tampoco está Alberto, Benito tendrá que estar para atender el establecimiento.
2. Si Alberto no está, tampoco estará Benito.

El tío Jorge concluye de todo esto que Carlos no puede estar ausente, mientras que el tío Jaime afirma que sólo puede concluirse que Carlos y Alberto no pueden estar ausentes a la vez. ¿Cuál de los dos tiene razón?

Ejercicio 36.– Las guerras clon han comenzado. Durante el transcurso de una refriega, tres caballeros Jedi, Anakin, Obi Wan y Yoda, se encuentran con el conde Dooku. Utilizaremos el lenguaje proposicional A, O, Y para denotar que el correspondiente caballero participa en el combate, y G para denotar los Jedi han ganado.

1. Formaliza las siguientes afirmaciones:

   F_1 : Para derrotar al conde Dooku deben participar al menos dos caballeros Jedi.

   F_2 : El Conde Dooku gana cuando sólo participa un caballero.

   F_3 : Si el Conde Dooku pierde entonces Anakin ha participado en el combate.

   F_4 : Si el Conde Dooku pierde, entonces no han participado los tres caballeros.

2. ¿Es cierto que $\{F_1, F_2, F_3\} \models G \to A \land O$? Razona formalmente la respuesta.

Ejercicio 37.– Determina, mediante tableros semánticos, cuáles de las siguientes fórmulas son lógicamente válidas y cuáles insatisfactibles (en cada caso, P y Q son predicados de aridad adecuada):

1. $\forall x \forall y (P(x) \lor Q(y)) \lor \exists x \exists y (\neg P(x) \land \neg Q(y))$
2. $\exists x \exists y P(x, y) \lor \neg \exists x P(x, x)$
3. $\forall x P(x, x) \to \exists x \forall y (P(x, y) \to P(y, x))$
4. $\exists x \forall y (P(x, y) \leftrightarrow \neg P(y, y))$
5. $\neg \exists x \exists y P(x, y) \lor \exists x P(x, x)$
6. $\forall x \forall y (P(x, y) \lor \neg P(y, x))$
7. $\forall x P(x, x) \to \forall x \exists y (P(x, y) \to P(y, x))$
8. $\exists x \forall y (P(x, y) \leftrightarrow \neg \exists z (P(y, z) \land P(z, y)))$

Ejercicio 38.– Decide, utilizando tableros semánticos, cuáles de los siguientes conjuntos de fórmulas son consistentes (P, Q y R son predicados de la aridad correcta):

1. $\{\exists x\, Q(x),\ \forall x\, (Q(x) \to R(x)),\ \forall x \neg R(x)\}$
2. $\{\exists y \forall x\, P(x, y),\ \forall x \neg P(x, x)\}$

3. $\{\forall x \forall y\,(P(x,y) \to P(y,x)),\ \forall x \neg P(x,x),\ \exists x \exists y\, P(x,y)\}$

4. $\{\forall x \exists y\, P(x,y),\ \forall x \neg P(x,x)\}$

Ejercicio 39.– Decide mediante tableros si son correctas o no las siguientes deducciones (a símbolo de constante):

1. $\{\forall x\,(P(x) \to Q(x))\} \models \forall x\, P(x) \to \forall x\, Q(x)$

2. $\{\forall x\, P(x) \to \forall x\, Q(x)\} \models \forall x\,(P(x) \to Q(x))$

3. $\{\neg \forall x\,(P(x) \wedge Q(x))\} \models \exists x \neg P(x) \wedge \exists x \neg Q(x)$

4. $\{\forall x\,(P(x) \vee Q(f(x)))\} \models \forall x\,(P(x) \vee Q(x))$

5. $\models \exists x P(x) \to P(a)$

6. $\{\forall x\,(P(x) \to Q(x)),\ \forall y\,(Q(a) \vee R(y) \to S(a))\} \models \forall x\,(P(x) \to S(a))$.

Ejercicio 40.– Prueba mediante tableros semánticos:

$$\forall x\,(P(x) \wedge Q(x)) \equiv \forall x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x) \qquad \exists x(P(x) \vee Q(x)) \equiv \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$$
$$\forall x(P(x) \vee Q(x)) \not\equiv \forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \qquad \exists x(P(x) \wedge Q(x)) \not\equiv \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$$

Ejercicio 41.– Prueba mediante tableros semánticos que:

1. $\{\forall x\, \exists y\,(f(y) = x),\ \forall x\,(g(f(x)) = x)\} \models \forall y\,(f(g(y)) = y)$.

2. $\{\forall x\, \neg(S(x) = 0),\ \forall x\, \forall y\,(S(x) = S(y) \to x = y)\} \models \neg(S(S(S(0))) = S(0))$

3. $\{\forall x\,(x + 0 = x),\ \forall x\, \forall y\,(x + S(y) = S(x + y))\} \models S(0) + S(S(0)) = S(S(S(0)))$.

Ejercicio 42.– Para representar propiedades sobre grafos usaremos el predicado $A(x,y)$ para denotar que existe una arista entre el nodo x y el nodo y, y el predicado $C(x,y)$ para denotar que existe un camino entre ellos.

1. Representa en el lenguaje anterior con igualdad las siguientes propiedades:

   F_1: No existe una arista que conecte un nodo consigo mismo

   F_2: Si existe un camino de un nodo a otro, entonces existe una arista entre ellos o existe un nodo distinto del segundo que está conectado por una arista al primero y por un camino al segundo.

2. Decide si es consecuencia lógica de las fórmulas anteriores el siguiente hecho: *Si no existe una arista entre dos nodos pero sí un camino, entonces existe un nodo distinto de los dos.*

Ejercicio 43.– Sea U el conjunto de fórmulas de la LPO con igualdad siguiente:

$$U = \{\forall x\, \forall y\, \forall z\, (x \star (y \star z)) = (x \star y) \star z),\ \forall x\, \exists y\, (x \star y = e),\ \forall x\, (x \star e = x \wedge e \star x = x)\}$$

Prueba mediante tableros semánticos que:

1. $U \models \forall x\, (\forall y\, (x \star y = y) \to x = e)$.
2. $U \models \forall x\, \exists y\, (y \star x = e)$.

Ejercicio 44.– En el lenguaje con igualdad $L = \{a, f\}$, siendo f un símbolo de función de aridad 1 y a una constante, se consideran las siguientes fórmulas:

$$\begin{array}{ll} \varphi_1: & \forall x(f(x) \neq a) \\ \varphi_2: & \forall x \forall y(f(x) = f(y) \to x = y) \\ \varphi_3: & \forall x(x \neq a \to \exists y(f(y) = x)) \end{array}$$

Prueba que ninguna de estas fórmulas es consecuencia lógica de las demás mediante tableros semánticos.

Ejercicios complementarios para resolver con la ayuda de *Tree Proof Generator*

Ejercicio 45.– (puede comprobarse con *Tree Proof Generator*) Un grupo es un conjunto dotado de una operación que es asociativa, tiene elemento neutro y todo elemento tiene inverso. Usemos $f(x, y)$ para denotar la operación y $g(x)$ para denotar el inverso de x y la constante e para el elemento neutro.

1. Formaliza las propiedades de grupo con ese lenguaje
2. Demuéstrese con tableros que en todo grupo el inverso del elemento neutro es él mismo

Ejercicio 46.– Demostrar, usando *Tree Proof Generator*, que existen grupos no triviales (con más de un elemento). Indicación: usa el programa para comprobar que los axiomas de grupo no implican que el grupo tiene un único elemento

Ejercicio 47.– Usando *Tree Proof Generator*:

1. Demuestra que existe un grupo de dos elementos. Indicación: usa una constante para el elemento distinto de e y usa el programa para comprobar que los axiomas de grupo no implican que exista un elemento distinto de esos dos.
2. Encuentra un modelo de los axiomas de elemento neutro e inverso de tamaño 3. Indicación: prueba que esos axiomas, junto con la existencia de $\{e, a, b\}$ no implican que exista un cuarto.

   ¿El modelo que da el programa es asociativo?